Саманцов О.О., Пірус Є.М.

[1]*Студент 2 курсу ХНУРЕ, спеціальність «Програмна інженерія»,*
[2]*Старший викладач кафедри алгебри СДПУ*

Використання середовища MS Excel для розв’язання оптимізаційних задач вибору

Стаття присвячена розв’язку оптимізаційних задач економіки за допомогою надбудованого засобу «Пошук розв’язків» середовища MS Excel

Ключові слова: *оптимізаційна задача, пошук розв’язку,задача вибору.*

Для вирішення будь-якої економічної задачі математичними методами необхідна побудова математичної моделі. Аналізуючи наявну інформацію, людина приймає рішення. Якість прийнятого рішення залежить від багатьох факторів: від досвіду, знань, точності наявною інформацією, інтелекту, інтуїції і т.п.

У багатьох ситуаціях ми застосовуємо моделі, розроблені раніше, але іноді треба побудувати нову модель (або модифікувати стару) самостійно. Правильний вибір моделі є першим кроком на шляху одержання рішення. Математичні моделі в економіці повинні будуватися в процесі діалогу економіста – практика з математиком. Після того, як модель побудована, ми вирішуємо отримане математичне завдання. Отримане рішення треба перевірити на правдоподібністю і з точки зору математика, і з точки зору економіста. На цій стадії модель часто уточнюється.

Як побудувати математичну модель? При побудові моделі треба вибрати основні, суттєві ознаки об'єкта і записати їх на мові математики. Спочатку треба зрозуміти ситуацію так, щоб її можна було розповісти іншій людині. Потім визначити математичну мову, на якій буде будуватися наша модель. Замість того, щоб сказати «треба знайти план дій», слід вказати, як його можна формалізувати.

План може бути заданий визначенням значення змінних x, y, або вектора $z = (z_1, z_2, \cdots, z_n)$, або матриці A і т.п. Далі необхідно визначити множину допустимих варіантів, тобто множину обмежень, якій допустимі варіанти повинні задовольняти. Після цього треба відповісти на запитання «як порівнювати варіанти?». Зазвичай визначається деяка функція (вона називається цільовою функцією або функцією корисності). Для порівняння двох допустимих варіантів ми для кожного з них підраховуємо значення цієї функції і оголошуємо кращим те значення, за якого значення функції більше (або менше).

У результаті багато моделей можна записати у вигляді задачі математичного програмування.

Знайти max f(x), $x \in A$, де f(x) – цільова функція , а А множина допустимих варіантів.

У випадку, якщо функція f(x) – лінійна, а множина обмежень задана системою лінійних рівнянь і нерівностей, задача математичного програмування перетворюється у задачу лінійного програмування.

Розглянемо одну з оптимізаційних економічних задач , так звану задачу про призначення.

Постановка задачі. Припустимо, що є n різних робіт A_1 , A_2 , ..., A_n і n механізмів B_1 , B_2 , ..., B_n , кожний з яких може виконати будь-яку роботу, але з неоднаковою ефективністю. Продуктивність механізму B_i при використанні роботи A_j позначимо через C_{ij} , $i = 1,..., n;$ j $= 1, ..., n$. Необхідно так розподілити механізми по роботах, щоб сумарний ефект від їх виконання був максимальним. Ця задача зветься *задачею вибору* або *задачею про призначення.*Формально вона записується так.

Необхідно вибрати таку послідовність елементів $\left\{C_{1,j_1}, C_{2,j_2}, \cdots, C_{n,j_n}\right\}$ з матриці $C = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & \cdots & C_{1n} \\ C_{21} & C_{22} & \cdots & C_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ C_{n1} & C_{n2} & \cdots & C_{nn} \end{pmatrix}$, щоб сума $\sum_{k=1}^{n} C_{k,j_k}$ була максимальною і при цьому із кожного рядка і стовпця матриці С було вибрано рівно один елемент.

Для розв’язання такого роду задач найчастіше застосовують так званий «угорський метод».

Алгоритм угорського методу складається з попереднього етапу і не більше, ніж *(n-2)* послідовно виконуваних ітерацій. Кожна ітерація пов'язана з еквівалентними перетворюваннями матриці, отриманої внаслідок проведення попередньої ітерації, а також з вибором в ній максимального числа незалежних нулів. Кінцевим результатом ітерації є збільшення числа незалежних нулів на одиницю. Як тільки число незалежних нулів досягне *n,* то проблему набору вирішено, а оптимальний варіант призначення визначається позиціями незалежних нулів в останній матриці.

Попередній етап. Відшукують максимальний елемент в j-му стовпці та всі елементи цього стовпця послідовно віднімають від максимального. Названу процедуру виконують над усіма стовпцями матриці С. В результаті отримують матрицю з невід'ємними елементами, у кожному стовпці якої є хоча б один нуль.

Далі розглядають і'-й рядок одержаної матриці, відшукують її мінімальний елемент а: і від кожного елемента даного рядка віднімають мінімальний. Цю процедуру повторюють з усіма рядками. В результаті отримаємо матрицю C_0 ($C_0 \sim C$), в кожному рядку і стовпці якої є хоча б один нуль. Описаний процес перетворення C в C_0 зветься зведенням матриці.

Знаходимо довільний нуль у першому стовпці й відмічаємо його зірочкою. Далі переглядаємо другий стовпець, і якщо в ньому знайдеться нуль, що розташований в рядку, де немає ще нуля із зірочкою, то відмічаємо його зірочкою. Аналогічно переглядаємо один за одним всі стовпці матриці C_0 й відмічаємо, якщо можливо, наступні нулі знаком "*". Очевидно, що нулі матриці C_0, відмічені зірочкою, є незалежними. На цьому попередній етап закінчується.

(k+1)-а ітерація. Припустимо, що k-*ту* ітерацію вже проведено внаслідок чого одержано матрицю C_k. Якщо в ній вже є рівно *n* нулів із зірочкою, то процес розв'язання закінчується. В іншому випадку переходимо до (k+1)-ї ітерації.

Кожна ітерація починається першим, а закінчується другим етапом. Між ними може декілька разів проводитися пара етапів: третій -перший. Перед початком ітерації знаком «+-» виділяють стовпці матриці C_k, які містять нулі з зірочками.

Перший етап. Переглядають невиділені стовпці C_k. Якщо в них немає нульових елементів, то переходять до третього етапу. В іншому випадку, якщо невиділений нуль матриці C_k. знайдено, то можливий один з двох випадків: 1) рядок, що містить невиділений нуль, містить також і нуль із зірочкою; 2) цей рядок не містить нуля із зірочкою.

У другому випадку переходимо одразу до другого етапу, відмітивши цей нуль штрихом.

У першому випадку цей невиділений нуль відмічають штрихом і виділяють рядок, в якому він розташований (знаком «+» праворуч від рядка). Переглядають цей рядок, знаходять нуль із зірочкою й скасовують знак «+» виділення стовпця, в якому розташовано даний нуль.

Відтак проглядають цей стовпець (який вже став невиділеним) і відшукують у ньому невиділений нуль (або нулі), в якому він розташований. Цей нуль відмічають штрихом і виділяють рядок, де він розташований. Далі розглядають цей рядок і шукають у ньому нуль із зірочкою.

Цей процес за скінченне число кроків закінчується одним з двох результатів:

1) всі нулі матриці C_k. виявилися виділеними, тобто розташовуються у виділених рядках або стовпцях. Тоді переходять до третього етапу;

2) знайдеться такий невиділений нуль в рядку, в якому немає нуля із зірочкою. Тоді переходять до другого етапу, відмітивши цей нуль штрихом.

Другий етап. На цьому етапі будують такий ланцюжок із нулів матриці C_k.: вихідний нуль зі штрихом, нуль із зірочкою, що розташований в одному стовпці з першим нулем, потім нуль із штрихом, розташований в одному рядку з попереднім нулем із зірочкою і т.д.

Можна довести, що описаний процес побудови ланцюжка однозначний і скінчений, при цьому ланцюжок завжди починається і закінчується нулем зі штрихом.

Далі над елементами ланцюжка, що знаходиться на непарних місцях ($0^{'}$)-, ставимо зірочки, знищуючи їх над елементами на парних позиціях (тобто 0^{*}). Відтак знищуємо всі позначки типу штрих над елементами C_k. і знаки виділення «+». Кількість незалежних нулів збільшується на одиницю. На цьому *(к+1)-ша* ітерація закінчується.

Третій етап. До цього етапу переходять після першого, якщо всі нулі матриці C_k. виділені. У цьому випадку серед невиділених лементів C_k. знаходять мінімальний й позначають його через h (h > 0). Віднімають h від усіх елементів матриці C_k., розташованих у невиділених рядках і додають до всіх елементів виділених стовпців. В результаті отримують нову матрицю C'_k., еквівалентну до C_k. Зауважимо, що при такому перетворенні, всі нулі з зірочкою матриці C_k. залишаються нулями і в C'_k., крім того, в ній з'являються нові невиділені нулі. Тому переходять знову до першого етапу. Виконавши перший етап, залежно від його результату або переходять до другого етапу, або знову повертаються на третій етап.

Після скінченного числа повторів пара етапів третій-перший обов'язково закінчиться переходом на другий етап. Після його виконання кількість незалежних нулів збільшиться на одиницю і *(к+1)-а* ітерація закінчиться.

А тепер розглянемо як можна розв'язати дану задачу в середовищі Ms Excel. Чотири робітника можуть виконувати чотири види робіт. Вартості робіт задано наступною матрицею.

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 6 & 3 \\ 9 & 10 & 7 & 3 \\ 4 & 5 & 11 & 7 \\ 8 & 7 & 8 & 5 \end{pmatrix}$$

В цій матриці рядки відповідають робітникам , а стовпці – роботам. Необхідно скласти план виконання робіт так, щоб всі роботи були виконані , кожний робітник був завантажений тільки однією роботою, а сумарна вартість робіт була мінімальною. Відзначимо, що дана задача є збалансованою, тобто кількість робіт співпадає з кількістю робітників. Якби задача біла не збалансованою, то перед початком її розв'язку необхідно збалансувати, ввівши відсутню кількість рядків або стовпчиків з достатньо великими штрафними вартостями робіт.

Для розв'язку даної задачі побудуємо математичну модель. Нехай змінна $x_{ij} = 1$, якшо і-тим робітником виконується j-та робота, та $x_{ij} = 0$, якшо і-тим робітником не виконується j-та робота.

Тоді модель має наступний вид :

потрібно мінімізувати $z = \sum_{i=1}^{4} \sum_{j=1}^{4} c_{ij} * x_{ij}$,

при обмеженнях $\sum_{j=1}^{4} x_{ij} = 1,\ j \in [1,4],$

$$\sum_{j=1}^{4} x_{ij} = 1, i \in [1,4], x_{ij} \in \{0,1\}, i \in [1,4], j \in [1,4].$$

Для розв'язання даної задачі внесемо дані в таблицю середовища MS Excel. В комірки A1:D4 внесемо значення матриці вартостей робіт. В комірку G1 впишемо «Вартість робіт ». Блок клітин F2:I5 відведемо під шукані невідомі. В комірку J1 внесемо цільову функцію «=СУММПРОИЗВ(F2:I5; A1:D4)», яка обчислює загальну вартість робіт. В комірки J2..J5 відповідно внесемо формули «=СУММ(F2:I2)», «=СУММ(F3:I3)», «=СУММ(F4:I4)», «=СУММ(F5:I5)», в комірки F6, G6, H6, J6 відповідно внесемо формули «=СУММ(F2:F5)», «=СУММ(G2:G5)», «=СУММ(H2:H5)», «=СУММ(I2:I5)».

Роз'язок даної задачі про призначення проведемо за допомого. Засобу «Поиск решений». Тобто виберемо команду *Сервис, Поиск решения (Tools? Solver).* Потім заповнимо вікно діалогу, що відкриється, тобто заповнимо всі поля цього вікна діалогу. В поле «установить целевую ячейку» впишемо $J$1. В блоці перемикачів вибрати «минимальному значению». В поле «изменяя ячейки» впишемо $F$2:$I$5. В поле обмежень потрібно вписати настіпні обмеження : $F$2:$I$5 ≤1, $F$2:$I$5 = целое, $F$2:$I$5≥ 0, $F$6:$I$6 = 1, $J$2:$J$5 = 1.

В вікні діалогу **Параметры** пошуку розв'язку встановити флажок *Линейная модель*. Після натискання кнопки **Выполнить (Solve)** засіб пошуку розв'язку знайде оптимальний розв'язок.

Література

1. *Копылов Г.Н., Суханова Н.Н.* Математические методы в экономике: Методическое пособие. – Волгоград : Издательство ВолГУ, 2002. – 108с.
2. *Гарнаев А.Ю.* Использование MS EXECL и VBA в экономике и финансах. – СПб.: БХВ – Санкт-Петербург, 2000. – 336 с. : ил.