Новиков О.А., Шулик Т.В.

[1]*Доцент кафедри математичного аналізу СДПУ,*
[2]*Студентка 5 курсу фізико-математичного факультету СДПУ*

Интегральные представления уклонений повторных сумм Валле Пусена на классах аналитических функций

Получены асимптотические формулы для верхних граней уклонений тригонометрических полиномов, порождаемых повторным методом суммирования Валле Пуссена, взятых по классам аналитических периодических функций действительной переменной.

Следуя А.И. Степанцу [1], обозначим C_β^q классы непрерывных 2π-периодических функций $f(\cdot)$, которые можно представить в виде свертки

$$f(x) = A_0 + \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(x+t)P_\beta^q(t)\,dt,$$

в которой

$$P_\beta^q(t) = \sum_{k=1}^{\infty} q^k \cos\left(kt + \frac{\beta\pi}{2}\right), \qquad q\in(0;1),\ \beta\in R$$

– ядро Пуассона.

Известно (см., например, [2]), что классы C_β^q, которые принято называть классами интегралов Пуассона, состоят из функций f, которые являются сужениями на действительную ось функций $F(z)$, аналитических в полосе $|\operatorname{Im} z| \le \ln\frac{1}{q}$.

Обозначим через $S_n(f;x)$ частичные суммы ряда Фурье. Применяя к суммам $S_n(f;x)$ метод суммирования Валле Пуссена (см. [2, с. 47]), получаем суммы Валле Пуссена функции $f\in L$

$$V_{n,p}(f,x) = \frac{1}{p}\sum_{k=n-p}^{n-1} S_k(f,x).$$

Применяя метод суммирования Валле Пуссена r раз, получаем следующий метод построения тригонометрических полиномов.

Пусть $p_1, p_2, ..., p_r$ – произвольные натуральные числа такие, что $\sum_{k=1}^{r} p_r < n$. Функции $f \in L$ поставим в соответствие последовательность тригонометрических многочленов

$$V_{n,p_1,p_2,...,p_r}(f,x) = V_{n,\overline{p}}^{(r)}(f,x) =$$

$$= \frac{1}{p_1} \sum_{k_1=n-p_1}^{n-1} \frac{1}{p_2} \sum_{k_2=k_1-p_2+1}^{k_1} ... \frac{1}{p_r} \sum_{k_r=k_{r-1}-p_r+1}^{k_{r-1}} S_{k_r}(f,x), \tag{1}$$

которые будем называть r-повторними суммами Валле Пуссена (в случае $r = 2$ см. [3]).

Задача приближения классов интегралов Пуассона имеет свою историю, связанную с известными именами. В 1946 году С.М. Никольский [4] показал, что для верхних граней уклонений частных сумм Фурье, взятых по классам $C_{\beta,\infty}^q$,

$$\varepsilon\left(C_{\beta,\infty}^q; S_n\right) \overset{\mathrm{df}}{=} \sup_{f \in C_{\beta,\infty}^q} \| f(\cdot) - S_n(f;\cdot) \|_C,$$

имеет место асимптотическое равенство

$$\varepsilon\left(C_{\beta,\infty}^q; S_n\right) = \frac{8q^n}{\pi^2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{du}{\sqrt{1-q^2 \sin^2 u}} + O(1)\frac{q^n}{n},\ q = e^{-\alpha}, \text{ где}$$

$$K(q) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{du}{\sqrt{1-q^2 \sin^2 u}}$$

– полный эллиптический интеграл первого рода. В 1980 году С.Б. Стечкин [5] уточнил остаточный член в этой формуле, показав, что он равен $O(1) q^n (1-q)^{-2} n^{-1}$.

Аналогичная задача для классов $C_\beta^q H_\omega$ была решена в 2000 году А.И. Степанцом. В работе [1] было показано, что при $n \to \infty$ выполняется равенство

$$\varepsilon\left(C_\beta^q H_\omega; S_n\right) = \frac{4q^n}{\pi^2} K(q) \theta_n(\omega) \int_0^{\pi/2} \omega\left(\frac{2t}{n}\right) \sin t\, dt + \frac{O(1) q^n}{(1-q)^2 n} \omega(1/n), \tag{2}$$

где $\theta_n(\omega) \in [1/2; 1]$, причем $\theta_n(\omega) = 1$, если $\omega(t)$ – выпуклый модуль непрерывности.

В работе [6] (см. также [7, с. 218], [8]) для верхних граней отклонений сум Валле Пуссена на классах $C^q_{\beta,\infty}$ получены асимптотические формулы

$$\varepsilon\left(C^q_\beta H_\omega; V_{n,p}\right) = \frac{2\theta_n(\omega) q^{n-p+1}}{\pi p(1-q^2)} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \omega\left(\frac{2t}{n-p}\right) \sin t dt +$$

$$+O(1)\omega\left(\frac{1}{n-p}\right)\left(\frac{q^{n-p+1}}{p(n-p)(1-q)^3} + \frac{q^n}{p(1-q^2)}\right),\ 1 < p < n \qquad (3)$$

$$\varepsilon\left(C^q_{\beta,\infty}; V_{n,p}\right) = \frac{4q^{n-p+1}}{\pi p(1-q^2)} + O(1)\left(\frac{q^{n-p+1}}{p(n-p)(1-q)^3} + \frac{q^n}{p(1-q)^2}\right). \qquad (4)$$

А.С. Сердюком [9] также было показано, что имеет место более общий результат, чем формула (4):

$$\varepsilon\left(C^q_{\beta,\infty}; V_{n,p}\right) = \frac{q^{n-p+1}}{p}\left(\frac{4}{\pi^2} K_{p,q} + O(1)\left(\frac{q}{(n-p+1)(1-q)^s}\right)\right),\ \text{где}$$

$$K_{p,q} = \int_0^\pi \frac{\sqrt{1-2q^p \cos pt + q^{2p}}}{1-2q\cos pt + q^2} dt, \quad s = s(p) = \begin{cases} 1, p = 1; \\ 3, p = 2,3,.... \end{cases}$$

В данной работе получены интегральные представления величин

$$\delta_{n,p_1,p_2,...,p_r}(f;x) = \delta^{(r)}_{n,\bar{p}}(f;x) = | f(x) - V^{(r)}_{n,\bar{p}}(f;x) | .$$

Нами доказано следующее утверждение.

Теорема. *Пусть* $q \in (0;1)$, $\beta \in R$, $\sum_{k=1}^{r} p_r \overset{\text{df}}{=} \Sigma_{\bar{p}} < n$. *Тогда для всякой функции* $f \in C^q_\beta$ *в каждой точке* $x \in [-\pi;\pi]$ *справедливо равенство*

$$\delta^{(r)}_{n,\bar{p}}(f;x) = \frac{1}{\pi \prod_{i=1}^{r} p_i} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{f^q_\beta(x+t)}{(1-2q\cos t + q^2)^{r+1}} \times$$

$$\times \sum_{\alpha \subset \bar{r}} (-1)^{(r-|\alpha|)} \sum_{\nu=0}^{r+1} (-1)^\nu C^\nu_{r+1} q^{\left(n-1-\sum_{j\in\alpha} p_j + r + \nu\right)} \cos\left[\left(n-1-\sum_{j\in\alpha} p_j + r - \nu\right)t + \frac{\beta\pi}{2}\right], \qquad (5)$$

где $|\alpha|$ – количество элементов множества α, а $\bar{r} = \{1, 2, ..., r\}$.

Доказательство. Положим для удобства $k_0 = n-1$. В силу соотношения (1) имеем

$$\delta_{k_0,p_1,p_2,...,p_r}(f;x)=$$
$$=\frac{1}{p_1}\sum_{k_1=k_0-p_1+1}^{k_0}\frac{1}{p_2}\sum_{k_2=k_1-p_2+1}^{k_1}...\frac{1}{p_r}\sum_{k_r=k_{r-1}-p_r+1}^{k_{r-1}}(f(x)-S_{k_r}(f,x))=$$
$$=\frac{1}{p_1}\sum_{k_1=k_0-p_1+1}^{k_0}\frac{1}{p_2}\sum_{k_2=k_1-p_2+1}^{k_1}...\frac{1}{p_{r-1}}\sum_{k_{r-1}=k_{r-2}-p_r}^{k_{r-2}}\delta_{k_{r-1}+1,p_r}(f,x)=...$$
$$...=\frac{1}{p_1}\sum_{k_1=k_0-p_1+1}^{k_0}\delta_{k_1+1,p_2,p_3,...,p_r}(f,x). \qquad (6)$$

В работе [3] показано, что при $r=2$ справедлива формула

$$\delta_{n,p_1,p_2}(f,x)=\delta^{(r)}_{n,\bar{p}}(f,x)=$$
$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f_\beta^q(x+t)\left[\Sigma_1^{(r)}\cos(\beta\pi/2)-\Sigma_2^{(r)}\sin(\beta\pi/2)\right]dt, \qquad (7)$$

где

$$\Sigma_1^{(r)}=\Sigma_1^{(r)}(t,q,n)=\frac{\Gamma^{r+1}(t,q)}{\prod_{i=1}^{r}p_i}\sum_{\alpha\subset\bar{r}}(-1)^{(r-|\alpha|)}\sum_{\nu=0}^{r+1}(-1)^{\nu}C_{r+1}^{\nu}q^{\left(n-1-\sum_{j\in\alpha}p_j+r+\nu\right)}\times$$
$$\times\cos\left(n-1-\sum_{j\in\alpha}p_j+r-\nu\right)t, \qquad (8)$$

$$\Sigma_2^{(r)}=\Sigma_2^{(r)}(t,q,n)=\frac{\Gamma^{r+1}(t,q)}{\prod_{i=1}^{r}p_i}\sum_{\alpha\subset\bar{r}}(-1)^{(r-|\alpha|)}\sum_{\nu=0}^{r+1}(-1)^{\nu}C_{r+1}^{\nu}q^{\left(n-1-\sum_{j\in\alpha}p_j+r+\nu\right)}\times$$
$$\times\sin\left(n-1-\sum_{j\in\alpha}p_j+r-\nu\right)t, \qquad (9)$$

где $\Gamma(t,q)=(1-2q\cos t+q^2)^{-1}$.

Воспользуемся методом математической индукции, чтобы показать, что эти соотношения справедливы для любого $r\in\mathbb{N}$. Предположим, что для $p_0,p_1,p_2,...,p_r$ выполнены условия: $p_i\in\mathbb{N}$, $i=0,1,2,...,r$, $\sum_{i=0}^{r}p_i<n$, и имеет место соотношение (8). Имея в виду соотношение (6), отправляясь от

предположения справедливости соотношения (8) для числа r, найдем выражение для $\Sigma_1^{(r+1)}$. Имеем

$$\Sigma_1^{(r+1)}(t,q,k_0)=\frac{1}{p_0}\sum_{k_1=k_0-p_0+1}^{k_0}\Sigma_1^{(r)}(t,q,k+1)=\frac{\Gamma^{r+1}(t,q)}{p_0\prod_{i=1}^{r}p_i}\times$$

$$\times\sum_{k=k_0-p_0+1}^{k_0}\sum_{\alpha\subseteq\overline{r}}(-1)^{(r-|\alpha|)}\sum_{\nu=0}^{r+1}(-1)^{\nu}C_{r+1}^{\nu}q^{\left(k-\sum_{j\in\alpha}p_j+r+\nu\right)}\cos\left(k-\sum_{j\in\alpha}p_j+r-\nu\right)t=$$

$$=\frac{\Gamma^{r+1}(t,q)}{2\prod_{i=0}^{r}p_i}\sum_{\alpha\subseteq\overline{r}}(-1)^{(r-|\alpha|)}\sum_{\nu=0}^{r+1}(-1)^{\nu}C_{r+1}^{\nu}\sum_{k=k_0-p_0+1}^{k_0}q^{\left(k-\sum_{j\in\alpha}p_j+r+\nu\right)}\times$$

$$\times\left(e^{i\left(k-\sum_{j\in\alpha}p_j+r-\nu\right)t}+e^{-i\left(k-\sum_{j\in\alpha}p_j+r-\nu\right)t}\right).$$

Применяя формулу суммы элементов бесконечной убывающей геометрической прогрессии, получаем

$$\sum_{k=k_0-p_0+1}^{k_0}\left(qe^{it}\right)^{\left(k-\sum_{j\in\alpha}p_j+r-\nu\right)}=$$

$$=\left(qe^{it}\right)^{\left(k_0+1-p_0-\sum_{j\in\alpha}p_j+r-\nu\right)}\frac{1}{1-qe^{it}}-\left(qe^{it}\right)^{\left(k_0+1-\sum_{j\in\alpha}p_j+r-\nu\right)}\frac{1}{1-qe^{it}},$$

$$\sum_{k=k_0+1-p_0}^{k_0}\left(qe^{-it}\right)^{\left(k-\sum_{j\in\alpha}p_j+r-\nu\right)}=$$

$$=\left(qe^{-it}\right)^{\left(k_0+1-p_0-\sum_{j\in\alpha}p_j+r-\nu\right)}\frac{1}{1-qe^{-it}}-\left(qe^{-it}\right)^{\left(k_0+1-\sum_{j\in\alpha}p_j+r-\nu\right)}\frac{1}{1-qe^{-it}}.$$

Поэтому, выполняя элементарные преобразования, получаем

$$\sum_{k=k_0-p_0+1}^{k_0}\left(qe^{it}\right)^{\left(k-\sum_{j\in\alpha}p_j+r-\nu\right)}+\left(qe^{-it}\right)^{\left(k-\sum_{j\in\alpha}p_j+r-\nu\right)}=$$

$$=\left\{q^{\left(k_0+1-p_0-\sum\limits_{j\in\alpha}p_j+r-\nu\right)}\cos\left(k_0+1-p_0-\sum_{j\in\alpha}p_j+r-\nu\right)t-\right.$$

$$-q^{\left(k_0+1-p_0+1-\sum\limits_{j\in\alpha}p_j+r-\nu\right)}\cos\left(k_0+1-p_0-1-\sum_{j\in\alpha}p_j+r-\nu\right)t-$$

$$-q^{\left(k_0+1-\sum\limits_{j\in\alpha}p_j+r-\nu\right)}\cos\left(k_0+1-\sum_{j\in\alpha}p_j+r-\nu\right)t+$$

$$\left.+q^{\left(k_0+1-\sum\limits_{j\in\alpha}p_j+r-\nu+1\right)}\cos\left(k_0+1-\sum_{j\in\alpha}p_j+r-\nu-1\right)t\right\}\frac{1}{1-2q\cos t+q^2}.$$

Таким образом,

$$\Sigma_1^{(r+1)}=\frac{\Gamma^{r+1}(t,q)}{\prod\limits_{i=0}^{r}p_j}\sum_{\alpha\subset\underline{r}}(-1)^{r-|\alpha|}\sum_{\nu=0}^{r+1}(-1)^{\nu}C_{r+1}^{\nu}\times$$

$$\times\left\{q^{\left(k_0+1-p_0-\sum\limits_{j\in\alpha}p_j+r+\nu\right)}\cos\left(k_0+1-p_0-\sum_{j\in\alpha}p_j+r-\nu\right)t-\right.$$

$$-q^{\left(k_0+2-p_0-\sum\limits_{j\in\alpha}p_j+r+\nu\right)}\cos\left(k_0-p_0-\sum_{j\in\alpha}p_j+r-\nu\right)t-$$

$$-q^{\left(k_0+1-\sum\limits_{j\in\alpha}p_j+r+\nu\right)}\cos\left(k_0+1-\sum_{j\in\alpha}p_j+r-\nu\right)t+$$

$$\left.+q^{\left(k_0+2-\sum\limits_{j\in\alpha}p_j+r+\nu\right)}\cos\left(k_0-\sum_{j\in\alpha}p_j+r-\nu\right)t\right\}\cdot\frac{1}{1-2q\cos t+q^2}=$$

$$=\frac{\Gamma^{r+1}(t,q)}{\prod\limits_{i=0}^{r}p_i}\times$$

$$\times\sum_{\alpha\subseteq\overline{r}}(-1)^{(r-|\alpha|)}\left\{C_{r+1}^{0}\left[q^{\left(k_0+1-p_0-\sum\limits_{j\in\alpha}p_j+r\right)}\cos\left(k_0+1-p_0-\sum_{j\in\alpha}p_j+r\right)t\right]+\right.$$

$$+\sum_{\nu=1}^{r+1}(-1)^{\nu}C_{r+1}^{\nu}\left[q^{\left(k_0+1-p_0-\sum\limits_{j\in\alpha}p_j+r+\nu\right)}\cos\left(k_0+1-p_0-\sum_{j\in\alpha}p_j+r-\nu\right)t\right]+$$

$$+\sum_{\nu=1}^{r+1}(-1)^{\nu}C_{r+1}^{\nu-1}\left[q^{\left(k_0+1-p_0-\sum\limits_{j\in\alpha}p_j+r+\nu\right)}\cos\left(k_0+1-p_0-\sum_{j\in\alpha}p_j+r-\nu\right)t\right]+$$

$$+(-1)^{r+2}C_{r+1}^{r+1}\left[q^{\left(k_0+1-p_0-\sum\limits_{j\in\alpha}p_j+r+r+2\right)}\cos\left(k_0+1-p_0-\sum_{j\in\alpha}p_j+r-r-2\right)t\right]-$$

$$-C_{r+1}^{0}\left[q^{\left(k_0+1-\sum\limits_{j\in\alpha}p_j+r\right)}\cos\left(k_0+1-\sum_{j\in\alpha}p_j+r\right)t\right]-$$

$$-\sum_{\nu=1}^{r+1}(-1)^{\nu}C_{r+1}^{\nu}\left[q^{\left(k_0+1-\sum\limits_{j\in\alpha}p_j+r+\nu\right)}\cos\left(k_0+1-\sum_{j\in\alpha}p_j+r-\nu\right)t\right]-$$

$$-\sum_{\nu=1}^{r+1}(-1)^{\nu}C_{r+1}^{\nu-1}\left[q^{\left(k_0+1-\sum\limits_{j\in\alpha}p_j+r+\nu\right)}\cos\left(k_0+1-\sum_{j\in\alpha}p_j+r-\nu\right)t\right]-$$

$$\left.-(-1)^{r+2}C_{r+1}^{r+1}\left[q^{\left(k_0+1-\sum\limits_{j\in\alpha}p_j+r+r+2\right)}\cos\left(k_0+1-\sum_{j\in\alpha}p_j+r-r-2\right)t\right]\right\}\cdot$$

$$\cdot\frac{1}{1-2q\cos t+q^2}=$$

$$=\frac{\Gamma^{r+2}(t,q)}{\prod_{i=0}^{r}p_i}\times$$

$$\times\sum_{\alpha\subseteq r}(-1)^{(r-|\alpha|)}\left\{C_{r+1}^{0}\left[q^{\left(k_0+1-p_0-\sum_{j\in\alpha}p_j+r\right)}\cos\left(k_0+1-p_0-\sum_{j\in\alpha}p_j+r\right)t\right]+\right.$$

$$+\sum_{\nu=1}^{r+1}(-1)^{\nu}(C_{r+1}^{\nu}+C_{r+1}^{\nu-1})\left[q^{\left(k_0+1-p_0-\sum_{j\in\alpha}p_j+r+\nu\right)}\cos\left(k_0+1-p_0-\sum_{j\in\alpha}p_j+r-\nu\right)t\right]+$$

$$+(-1)^{r+2}C_{r+1}^{r+1}\left[q^{\left(k_0+1-p_0-\sum_{j\in\alpha}p_j+r+r+2\right)}\cos\left(k_0+1-p_0-\sum_{j\in\alpha}p_j+r-r-2\right)t\right]-$$

$$-C_{r+1}^{0}\left[q^{\left(k_0+1-\sum_{j\in\alpha}p_j+r\right)}\cos\left(k_0+1-\sum_{j\in\alpha}p_j+r\right)t\right]-$$

$$-\sum_{\nu=1}^{r+1}(-1)^{\nu}(C_{r+1}^{\nu}+C_{r+1}^{\nu-1})\left[q^{\left(k_0+1-\sum_{j\in\alpha}p_j+r+\nu\right)}\cos\left(k_0+1-\sum_{j\in\alpha}p_j+r-\nu\right)t\right]-$$

$$\left.-(-1)^{r+2}C_{r+1}^{r+1}\left[q^{\left(k_0+1-\sum_{j\in\alpha}p_j+r+r+2\right)}\cos\left(k_0+1-\sum_{j\in\alpha}p_j+r-r-2\right)t\right]\right\}.$$

Учитывая, что $k_0+1=n$ и

$$C_{r+1}^{\nu}+C_{r+1}^{\nu-1}=\frac{(r+1)!}{(r+1-\nu)!\,\nu!}+\frac{(r+1)!}{(r+1-(\nu-1))!(\nu-1)!}=$$

$$=\frac{(r+1)!(r+1-(\nu-1))+(r+1)!\,\nu}{(r+1-(\nu-1))!\,\nu!}=$$

$$=\frac{(r+1)!(r+1-(\nu-1)+\nu)}{(r+1-(\nu-1))!\,\nu!}=\frac{(r+1)!(r+2)}{(r+2-\nu)!\,\nu!}=C_{r+2}^{\nu},$$

$$C_{r+1}^{0}=1=C_{r+2}^{0},C_{r+1}^{r+1}=1=C_{r+2}^{r+2},$$

получаем

$$\Sigma_1^{(r+1)}=$$

$$=\frac{\Gamma^{r+2}(t,q)}{\prod_{i=0}^{r}p_i}\sum_{\alpha\subseteq r}(-1)^{(r-|\alpha|)}\left\{C_{r+2}^{0}\left[q^{\left(n-p_0-\sum_{j\in\alpha}p_j+r\right)}\cos\left(n-p_0-\sum_{j\in\alpha}p_j+r\right)t\right]+\right.$$

$$+\sum_{\nu=1}^{r+1}(-1)^{\nu}C_{r+2}^{\nu}\left[q^{\left(n-p_0-\sum_{j\in\alpha}p_j+r+\nu\right)}\cos\left(n-p_0-\sum_{j\in\alpha}p_j+r-\nu\right)t\right]+$$

$$+(-1)^{r+2}C_{r+2}^{r+2}\left[q^{\left(n-p_0-\sum_{j\in\alpha}p_j+r+r+2\right)}\cos\left(n-p_0-\sum_{j\in\alpha}p_j+r-r-2\right)t\right]-$$

$$-C_{r+2}^{0}\left[q^{\left(n-\sum_{j\in\alpha}p_j+r\right)}\cos\left(n-\sum_{j\in\alpha}p_j+r\right)t\right]-$$

$$-\sum_{\nu=1}^{r+1}(-1)^{\nu}C_{r+2}^{\nu}\left[q^{\left(n-\sum_{j\in\alpha}p_j+r+\nu\right)}\cos\left(n-\sum_{j\in\alpha}p_j+r-\nu\right)t\right]-$$

$$\left.-(-1)^{r+2}C_{r+2}^{r+2}\left[q^{\left(n-\sum_{j\in\alpha}p_j+r+r+2\right)}\cos\left(n-\sum_{j\in\alpha}p_j+r-r-2\right)t\right]\right\}=$$

$$=\frac{\Gamma^{r+2}(t,q)}{\prod_{i=0}^{r}p_i}\times$$

$$\times\sum_{\alpha\subseteq r}(-1)^{(r-|\alpha|)}\left\{\sum_{\nu=0}^{r+2}(-1)^{\nu}C_{r+2}^{\nu}\left[q^{\left(n-p_0-\sum_{j\in\alpha}p_j+r+\nu\right)}\cos\left(n-p_0-\sum_{j\in\alpha}p_j+r-\nu\right)\right]t-\right.$$

$$-\sum_{\nu=0}^{r+2}(-1)^{\nu} C_{r+2}^{\nu}\left[q^{\left(n-\sum_{j\in\alpha} p_j+r+\nu\right)}\cos\left(n-\sum_{j\in\alpha}p_j+r-\nu\right)t\right]\Bigg]\Bigg\}=$$

$$=\frac{\Gamma^{(r+1)+1}(t,q)}{\prod_{i=0}^{r}p_i}\sum_{\alpha\subset\underline{r+1}}(-1)^{(r+1-|\alpha|)}\sum_{\nu=0}^{(r+1)+1}(-1)^{\nu} C_{(r+1)+1}^{\nu}\left[q^{\left(n-1-\sum_{j\in\alpha} p_j+(r+1)+\nu\right)}\times\right.$$

$$\left.\times\cos\left(n-1-\sum_{j\in\alpha}p_j+(r+1)-\nu\right)t\right].$$

Таким образом, для всякого натурального r справедлива формула (8). Справедливость (9) для всякого $r\in\mathbb{N}$ доказывается аналогично. Следовательно, для всякого $r\in\mathbb{N}$ справедливо и соотношение (7) .

Объединяя соотношения (7) – (9), приходим к формуле (5).

Литература

1. *Степанец А.И.* Приближение аналитических непрерывных функций // Мат. сборник. – 2001. – 192, № 1. – С. 113 – 138.
2. *Степанец А.И.* Классификация и приближение периодических функций, – Киев: Наук. думка, 1987. – 268 с.
3. *Рукасов В.И., Новиков О.А., Ровенская О.Г.* Интегральные представления уклонений средних сумм Фурье на классах $C^{\alpha}_{\beta,\infty}$ // Вісник Слов'янського державного педагогічного університету. Математика. – 2008. 1(3). – С. 33 – 41.
4. *Никольский С.М.* Приближение функций тригонометрическими полиномами в среднем// Изд. АН СССР. сер.мат. – 1946. – 10, № 3. – С. 207 – 256.
5. *Стечкин С.Б.* Оценка остатка ряда Фурье для дифференцируемых функций // Тр. Мат. ин-та им. В.А. Стеклова АН СССР. – 1980. – 145. – С. 126 – 151.
6. *Рукасов В.І., Чайченко С.О.* Наближення аналітичних періодичних функцій сумами Валле-Пуссена // Укр. мат. журн. – 2002. – 54, № 12. – С. 1653 – 1668.
7. *Степанец А.И., Рукасов В.И., Чайченко С.О.* Приближения суммами Валле Пуссена // Праці Ін-ту математики НАН України. – 2007. Т. 68. – 368 с.
8. *Рукасов В.И., Новиков О.А.* Приближение аналитических функций суммами Валле-Пуссена // Ряды Фурье: теория и приложения. – Киев: Ин-т математики НАН Украины, 1998. – С. 228 – 241.
9. *Сердюк А.С.* Наближення інтегралів Пуасона сумами Валле Пуссена // Укр. мат. журн. – 2004. – 56 №1. – С. 97-107.