УДК 517.925

Божко В.О., Ковальов В.І.

[1]*Доцент кафедри математичного аналізу СДПУ,*
[2]*Доцент кафедри математичного аналізу СДПУ*

Метод ітерацій для побудови періодичних розв’язків сингулярно збурених нелінійних диференціальних рівнянь

За допомогою збіжного ітераційного процесу побудовано періодичний розв’язок сингулярно збудженої системи нелінійних диференціальних рівнянь. Збіжність гарантована в деякій скінченній області зміни малого параметру. Розглянуто ілюстративний приклад.

Ключові слова: *вектор-функція, скалярна функція, мажоранта по відношенню до даної, лінійна неоднорідна система, функціональне рівняння.*

Розглядається нелінійна система

$$\varepsilon \frac{dx}{dt} = Ax + \varepsilon F(t, x), \tag{1}$$

де A – стала $(n\times n)$ – матриця, що не має чисто уявних власних значень, x-n-вимірний вектор, $\varepsilon>0$ – малий параметр, $F(t, x)$ – неперервна вектор-функція в деякій області t і x, періодична по t з періодом 2π.

Періодичний розв’язок системи (1) шукаємо методом ітерацій:

$$\begin{aligned} &x_0 = 0, \\ &\varepsilon \frac{dx_k}{dt} = Ax_k + \varepsilon F(t, x_{k-1}), k = 1, 2, ... \end{aligned} \tag{2}$$

Згідно [1] k-наближення виражається формулою

$$x_k(t,\varepsilon) = \left[e^{-\frac{A}{\varepsilon}(t+2\pi)} - e^{-\frac{A}{\varepsilon}t} \right]^{-1} \int\limits_t^{t+2\pi} e^{-\frac{A}{\varepsilon}\theta} F(\theta, x_{k-1}(\theta,\varepsilon)) d\theta.$$

При цьому справедлива оцінка

$$||x_k(t,\varepsilon)|| \le \varepsilon M sup ||F(t,x_{k-1})||,$$

де M – стала або не залежна від ε або є обмеженою при $\varepsilon\to 0$.

У всякому випадку існує таке ε_0, що для $0<\varepsilon<\varepsilon_0$ маємо $M<M_0$, M_0 не залежить від ε.

Нехай $U(u,\varepsilon)$ скалярна функція, додатна для $u\geq 0$, неперервна по ε і u, що має додатну і монотонно зростаючу по u похідну, є мажорантною по відношенню до функції F, тобто така, що для довільних $||x||\leq u$, $0<\varepsilon<\varepsilon_0$ виконуються нерівності

$$U(u,\varepsilon)\geq\|F(t,x,\varepsilon)\|,\ \ \frac{\partial U(u,\varepsilon)}{\partial u}\geq\left\|\frac{\partial F(t,x,\varepsilon)}{\partial x}\right\|.$$

Функціональне рівняння

$$u=f(u,\ \varepsilon), \tag{3}$$

де

$$f(u,\ \varepsilon)=\varepsilon MU(u,\varepsilon),$$

визначає u як функцію додатного аргумента ε. Розв'язок (3), отриманий методом послідовних наближень, має вигляд

$$u^{(1)}=f(0,\ \varepsilon),$$
$$u^{(2)}=f(u^{(1)},\ \varepsilon)$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Послідовність $\{u^{(k)}\}$ [2] мажорантна по відношенню до послідовності $\{x_k\}$:

$$\|x_k\|\leq u^{(k)},\ \ k=\overline{1,n}$$
$$\|x_k-x_{k-1}\|\leq u^{(k)}-u^{(k-1)}$$

Отже, вказаний процес збігається, якщо збігається послідовність $\{u^{(k)}\}$. Але з теорії рівнянь вигляду (3) [3] випливає, що послідовність $\{u^{(k)}\}$ збігається для всіх ε, при яких (3) має додатний розв'язок $u=u(\varepsilon)$. Верхня межа $\bar{\varepsilon}$ таких значень ε і відповідне значення $u\left(\bar{\varepsilon}\right)=\bar{u}$ суть єдині додатні корені рівнянь

$$U(u,\varepsilon)=0,\ \ \frac{\partial U(u,\varepsilon)}{\partial u}=0. \tag{4}$$

Таким чином, послідовність $\{x_k(t,\varepsilon)\}$ збігається до періодичного розв'язку вихідного рівняння (1), у всякому випадку, на проміжку $0<\varepsilon\leq\bar{\varepsilon}$, де $\bar{\varepsilon}$ визначається з (4).

При $\varepsilon\rightarrow 0$ цей періодичний розв'язок також прямує до нуля. З структури рівнянь для наближень $x_k(t,\varepsilon)$, $k=1,2,\ldots$, видно, що різниці x_{k+1}-x_k мають порядок ε^{k+1}. Тому шуканий періодичний розв'язок $x(t,\varepsilon)$ можна представити у вигляді ряду

$$x(t,\varepsilon)=x_1(t,\varepsilon)+[\,x_2(t,\varepsilon)-x_1(t,\varepsilon)]+[\,x_3(t,\varepsilon)-x_2(t,\varepsilon)]+\ldots, \tag{5}$$

збіжного в деякій області. Разом з тим цей ряд не є звичайним степеневим рядом за степенями ε, застосування якого для побудови періодичного розв'язку, як і у випадку простих лінійних неоднорідних систем, є недоцільним [1].

Ряд (5) більш зручніший, оскільки гарантовна його збіжність в деякій скінченній області зміни ε [4].

Приклад.

$$\begin{cases} \varepsilon \dot{x}_1 = -\frac{4}{3}x_1 + \frac{2}{3}x_2 + \varepsilon(1 + x_1x_2)\cos t, \\ \varepsilon \dot{x}_2 = \frac{1}{3}x_1 - \frac{5}{3}x_2 + \varepsilon(\frac{1}{2} + x_1x_2 \cos t). \end{cases} \qquad (6)$$

Тут $F_1(x_1, x_2, t) = 1 + x_1x_2 \cos t,\ F_2(x_1, x_2, t) = \frac{1}{2} + x_1x_2 \cos t.$

Оцінками для $x_1(t,\varepsilon)$ і $x_2(t,\varepsilon)$ будуть

$$| x_1(t,\varepsilon) | \le \frac{2}{3}\sup | F_1 + F_2 | + \frac{1}{6}\sup | F_1 - 2F_2 |,$$

$$| x_2(t,\varepsilon) | \le \frac{1}{3}\sup | F_1 + F_2 | + \frac{1}{6}\sup | F_1 - 2F_2 |,$$

де $F_1 + F_2 = \frac{3}{2} + 2x_1x_2 \cos t$ і $F_1 - 2F_2 = -x_1x_2 \cos t,$

а функціями $U_1(u_1,u_2)$ і $U_2(u_1,u_2)$ – $U_1(u_1,u_2) = \frac{3}{2} + 2u_1u_2,\ U_2 = u_1u_2.$

Тепер запишемо відповідні функціональні рівняння

$$u_1 = \frac{2}{3}\varepsilon U_1(u_1,u_2) + \frac{1}{6}\varepsilon U_2(u_1,u_2),$$

$$u_2 = \frac{1}{3}\varepsilon U_1(u_1,u_2) + \frac{1}{6}\varepsilon U_2(u_1,u_2),$$

або

$$u_1 = \varepsilon(1 + \frac{9}{6}u_1u_2),\ \text{і}\ u_2 = \varepsilon(\frac{1}{2} + \frac{5}{6}u_1u_2).$$

Ця система має додатний розв'язок при $\varepsilon \le 0{,}56,$ що дає оцінку області збіжності ітерацій (2) для системи (6).

Література

1. *Рябов Ю.А., Кайбылдаев О.К.* О периодических решениях линейных дифференциальных уравнений с малым параметром при производных // Математические методы оптимального управления системами с распределенными параметрами (сборник статей), «Илим», Фрунзе, 1973. – с. 104 – 110.

2. *Рябов Ю.А.* Определение области существования некоторых неявных функцій // Тр. Всесоюзного заочного энергетического ин-та, М., 1957, № 11. – с. 28 – 58.

3. *Рябов Ю.А.* Об одном способе оценки области применимости метода малого параметра в теории нелинейных колебаний. // Инженерный журнал АН СССР, т. I, 1961, № 1. – с. 5 – 32.

4. *Божко В.О., Ковальов В.І.* Про періодичні розв'язки сингулярно збуджених нелінійних диференціальних рівнянь. // International Conference. Dynamical System Modelling and Stability investication. Modelling & stability. Thesis of conference reports. May 27 – 29, 2009, Kyiv – 2009. – c. 49.