УДК 622.539.219.1

Божко В.О., Ковальов В.І., Ковальова Л.В.
[1]*Доцент кафедри математичного аналізу СДПУ,*
[2]*Доцент кафедри математичного аналізу СДПУ,*
[3]*Старший викладач кафедри математичного аналізу СДПУ*

Ймовірнісна модель полів напруг пружно-пластичного півпростору при заглибленні в нього системи індентотрів.

Об'єктом досліджень є поле напруг, яке виникає у пружно-пластичному середовищі в результаті дії на нього зовнішнього циклічного тангенціального навантаження. Пропонується ймовірнісна математична модель.

Ключові слова: *поле напруг, ймовірнісна модель, пружно-пластичний півпростір, індентор, резольвентний оператор, метричний тензор.*

Пропонується математична модель поля напруг [1] на підставі ймовірнісного підходу.

Розглядаються дві нескінченно близькі точки $A(x_1, x_2, x_3)$ та $\mathrm{A}_1(x_1 + dx_1; x_2 + dx_2; x_3 + dx_3)$,що знаходяться у заданій області перед руйнування. Ці точки визначають випадковий вектор, який не залежить від вибору системи координат: $d\overline{r} = ds \cdot \overline{e}$,

де ds – довжина вектора, $\overline{e}$ – одиничний вектор, направлений вздовж прямої AA_1.

Базисні вектори розглядаються як випадкові функції положення точки, в якій вони визначають координатний триедр. Зміни базисних векторів характеризуються значеннями похідних $\frac{\partial \ell_n}{\partial x_k}$,що мають випадковий характер. Застосовуючи символи Кристофеля, отримаємо:

$$\frac{\partial \ell_n}{\partial x_k} = \Gamma_{nk}{}^{j} \ell_j$$

При цьому $$ds^2 = \frac{\partial x_m}{\partial x_n} \cdot \frac{\partial x_m}{\partial x_k} dx_n dx_k = q_{nk} dx_n dx_k$$

Коефіцієнти q_{nk} утворюють симетричну матрицю $q_{nk} = q_{kn}$ крім того похідні метричного тензора допускають вираз через символи Кристофеля:

$$\frac{\partial q_{nm}}{\partial x_k} + \frac{\partial q_{km}}{\partial x_n} - \frac{\partial q_{kn}}{\partial x_m} = 2\Gamma_{nk}{}^{j} q_{jm}$$

Паралельне векторне поле задовольняє системі диференціальних рівнянь:

$$\frac{\partial \mathrm{A}^{\beta}}{\partial x_n} + \Gamma^{\beta}{}_{nk} \cdot \mathrm{A}^{k} = 0$$

або

$$\frac{d\mathrm{A}^{\beta}}{ds} = \frac{\partial \mathrm{A}^{\beta}}{\partial x_n} \cdot \frac{dx_n}{ds}$$

Нехай до пружно-пластичного півпростору через систему надтвердих індеторів прикладена періодична зовнішня сила f(t), компоненти якої $f_i \sin(\omega t + \delta_i)$, змінюються гармонійно з частотою $\omega = \sqrt{\lambda}$ в 2π сек. і з амплітудами $\left(f_{1,} f_{2,\dots} f_n\right)$ які слід розглядати як координати деякого фіксованого вектора $\overline{f}$.

Для розв'язування задачі про визначення амплітудно-частотних характеристик полів напруг у пружно-пластичному середовищі пропонується метод резольвентного оператора. В такому випадку модель визначається рівняннями Лагранжа:

$$\ddot{x}_i + \lambda_i x_i = f_i \sin(\omega t + \delta_i), \tag{1}$$

де $fi = (f, u)$ – проекція вектора $\overline{f}$ на і-ту вісь;

$fi \sin(\omega t + \delta_i)$ – узагальнена компонента зовнішньої сили, що відповідає нормальній координаті x_i.

Загальний розв'язок рівнянь (1) будується у вигляді:

$$x_i(t) = \frac{(f, u)}{\lambda_i - \lambda} = \sin\left(\sqrt{\lambda} t + \delta_i\right) + a_i \sin\sqrt{\lambda_i}\left(t + \theta_i\right), i = \overline{1, n} \tag{2}$$

де a_i та θ_i-сталі інтегрування;

$\frac{(f, u)}{\lambda_i - \lambda}$ – компоненти резольвентного вектора;

$$\Re_{\lambda} = \frac{(f_1 u_1)}{\lambda_1 - \lambda} u_1 + \frac{(f_2 u_2)}{\lambda_2 - \lambda} u_2 + \dots + \frac{(f, u_n)}{\lambda_n - \lambda} u_n, \lambda = \omega^2. \tag{3}$$

Для зручності подальших міркувань припустимо, що $\delta_i = a_i = \theta_i = o$, тоді проекція зовнішньої сили на напрямок руху:

$$\Re_{\lambda} f \sin \omega t = c\left(\Re_{\lambda}\ f, f\right) \sin \omega t = c \cdot w(\lambda) \sin \omega t,$$

де

$w(\lambda) = \dfrac{\left(\lambda^{r}{}_{1} - \lambda\right)\left(\lambda^{r}{}_{2} - \lambda\right)\dots\left(\lambda^{r}{}_{n-2} - \lambda\right)}{\left(\lambda^{(0)} - \lambda\right)\left(\lambda^{(0)}{}_{2} - \lambda\right)\dots\left(\lambda^{(0)}{}_{n} - \lambda\right)}$ – функція Вайнштейна;

$c = \left(\Re_{\lambda} f, f\right)^{\frac{1}{2}}$ – стала, яка при певному виборі f може бути рівною 1.

Таким чином, для довільної періодичної зовнішньої сили f сталої амплітуди, але довільної за напрямом та для довільної частоти $\omega = \sqrt{\lambda}$ значення $w(\lambda)$ визначає амплітуду рівнодіючої періодичної сили. Поведінка системи під дією зовнішньої сили з частотою $\sqrt{\lambda}$ $\forall\lambda$ фіксованого визначається значенням $w(\lambda)$.

Процес руйнування пружно-пластичного середовища суттєво залежить від градієнта напруг. Область концентрацій напруг, в якій зароджується руйнація, може бути настільки малою, що в ній можливе навіть пластичне протікання. Таким чином, в результаті плинності напруга в точці, де зароджується руйнація, може бути відмінною від обчислених теоретичних та визначених вимірюваннями змін деформацій.

Припускаючи, що щілини виникають незалежно одна від одної, отримаємо вітковий марківський процес, який описується рівняннями Колмогорова [3].

$$\frac{dp_k(t)}{dt} = \sum_{n=1}^{k} \gamma_n p_{nk}(t),\ k = 1,2... \qquad (5)$$

де $p_{nk(t)}$ – ймовірність утворення з n щілини k щілин $n \le k$ $P_{k(t)} \equiv P_{1k(t)}$ Динаміка зростання кількості щілин визначається як сумарною інтенсивністю $\sum\limits_{n\ge2}\gamma_n$ так і характером накопичення цієї суми.

Нехай γ_n змінюються так, що

$$\frac{\gamma_n - \gamma_{n+1}}{\gamma_{n+1}} = \frac{M}{n} + \frac{Q}{n^2} + 0\left(\frac{1}{n^2}\right), n \to \infty$$

Параметр М визначає швидкість спадання щільностей ймовірностей γ_n так, що меншому М відповідає менш інтенсивне затухання γ_n з ростом n а значить більша інтенсивність генерації щілини.

Ситуація катастрофічного руйнування має місце тоді, коли на момент часу t в середовищі накопичується нескінченна кількість щілин. При цьому ймовірність «вибуху» визначається рівністю:

$$p_\infty(t) = 1 - \sum_{k\ge1} p_k(t)$$

(умова збіжності $\sum\limits_{n\ge2}\gamma_n$ забезпечується нерівністю $M < 1$).

Література

1. *Ковалев В. И., Божко В.А., Тихонов А.П.* Исследование напряженного состояния упруго-пластического полупространства при внедрении в него тройки инденторов различной геометрии / Международная конференция. Механика горных пород при бурении. Тезисы докладов. Нефтяной институт, Грозный, 1991. с 65

2. *Родин Р.А.* Физическая сущность процесса разрушения хрупких горных пород. / Известия ВУЗов Горный журнал. № 11. 1991. с.12–19

3. *Розанов Ю.А.* Лекции по теории вероятностей. – М.: Наука. 1986. – 120с.