УДК 517.5

Сілін Є.С.

Старший викладач кафедри економіко-математичних дисциплін СДПУ

Сильні середні відхилень операторів Валле Пусена

Робота присвячена розповсюдженню результатів досліджень сильних середніх відхилень операторів Фур'є на випадок, коли в якості агрегатів наближення виступають оператори Валле Пуссена.

1. В теорії рядів Фур'є добре відомо, що $\forall f \in L$ майже всюди на $\mathbb{R}$ виконується співвідношення $\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}(f(x)-S_k(f;x))=o(1)$, де $S_k(f;x)$ — частинні суми Фур'є функції $f(x)$, $o(1)\to 0$ при $n\to\infty$.

Харді та Літтлвуд поставили питання: чи буде $\forall f \in L$ виконуватися більш загальне співвідношення

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}|f(x)-S_k(f;x)|^p=o(1), \quad p>0 \quad ? \tag{1}$$

Якщо співвідношення (1) виконано, то кажуть, що ряд Фур'є функції $f(x)$ є сильно сумовним з показником p.

Дослідженню цього питання для сум та операторів Фур'є на класах $\overline{\psi}$-інтегралів періодичних функцій та класах (ψ,β)-похідних локально інтегровних функцій були присвячені роботи [1, 2].

Ми розглядаємо узагальнення цих досліджень на випадок класів $\overline{\psi}$-інтегралів локально інтегровних функцій у разі, коли апаратом апроксимації виступають оператори Валле Пуссена.

Спочатку наведемо означення класів Степанця (див. [3]).

Нехай $\hat{L}$ — множина функцій f, які визначені на дійсній осі і такі, що мають скінченну норму $\|f\|_{\hat{p}}=\sup_{a\in\mathbb{R}}\int_a^{a+2\pi}|f(t)|\,dt, \quad p\in[1,\infty)$, $\|f\|_{\hat{\infty}}\overset{df}{=}\mathrm{ess}\sup_{t\in\mathbb{R}}|f(t)|$.

Позначимо через $\mathfrak{A}$ множину неперервних при $v\geq 0$ функцій $\psi(v)$, які задовольняють умови: 1) $\psi(v)\geq 0$, $\psi(0)=0$, $\psi(v)$ зростає на $[0,1)$; 2) $\psi(v)$ опукла донизу на $[1,\infty)$ і $\lim_{v\to\infty}\psi(v)=0$; 3) похідна $\psi'(v)=\psi'(v+0)$ має обмежену варіацію на $[0,\infty)$. Підмножину функцій $\psi(v)$, для яких $\int_1^{\infty}\frac{\psi(v)}{v}\,dv<\infty$, позначають $\mathfrak{A}'$. Множину функцій $\psi(v)$, які задовольняють лише умову 2) позначають $\mathfrak{M}$.

Для пари $\psi_1, \psi_2 \in \mathfrak{A}$ визначимо функцію $\overline{\psi}$: $\overline{\psi} \overset{\mathrm{df}}{=} \psi_{1+} + i\psi_{2-}$, де ψ_{1+} та ψ_{2-} — парне і непарне продовження функцій ψ_1, ψ_2 відповідно.

Тоді через $\widehat{C}^{\overline{\psi}}\mathcal{M}$ будемо позначати підмножину неперервних функцій $f \in \widehat{L}$, які для всіх x можна подати у вигляді наступної рівності:

$$f(x) = A + \int_{\mathbb{R}} \varphi(x+t)\widehat{\overline{\psi}}(t)\,dt \overset{\mathrm{df}}{=} A + \varphi * \widehat{\overline{\psi}}(x), \tag{2}$$

де $A = const$, інтеграл розуміємо як границю по симетричних проміжках, що розширюються, $\varphi \in \mathcal{M}$, тобто, $\operatorname{ess\,sup} |\varphi(t)| < \infty$,

$$\widehat{\overline{\psi}}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \overline{\psi}(x) e^{-ixt}\,dx. \tag{3}$$

Якщо $\psi_1 \in \mathfrak{A}$, $\psi_2 \in \mathfrak{A}'$, то перетворення $\widehat{\overline{\psi}}(t)$ сумовне на дійсній осі (див., наприклад, [4]).

Наслідуючи О.І. Степанця [5], функцію $\varphi(\cdot)$ в зображенні (2) називають $\overline{\psi}-$похідною функції $f(\cdot)$ і позначають $f^{\overline{\psi}}(\cdot)$.

Для наближення функцій з класів $\widehat{C}^{\overline{\psi}}\mathcal{M}$ будемо використовувати оператори Валле Пуссена

$$V_{\sigma,c}(f;x) = A + f^{\overline{\psi}} * \widehat{\lambda_{\sigma,c}\overline{\psi}}(x), \tag{4}$$

де $f \in \widehat{C}^{\overline{\psi}}\mathcal{M}$, а $\widehat{\lambda_{\sigma,c}\overline{\psi}}(x)$ перетворення вигляду (3) функції $\lambda_{\sigma,c}(t)\overline{\psi}(t)$, в якій

$$\lambda_{\sigma,c}(t) = 1, 0 \le |t| \le c, \frac{\sigma - |t|}{\sigma - c}, c \le |t| \le \sigma, 0, \sigma \le |t|, \quad \sigma > c \ge 1. \tag{5}$$

Такі оператори розглядалися О.І. Степанцем у роботах [3, 4, 6], де показано, що за певних умов $V_{\sigma,c}(f;x)$ належать до множини ε_σ цілих функцій експоненціального типу $\le \sigma$, а у періодичному випадку, при натуральних σ і c, оператори $V_{\sigma,c}(f;x)$ співпадають з сумами Валле Пуссена.

Далі, наслідуючи [4], з множини $\mathfrak{A}$ оберемо підмножини $\mathfrak{A}_0$ та $\overline{F}$. Кожній функції $\psi \in \mathfrak{M}$ $\forall t \ge 1$ співставимо пару функцій $\eta(t) = \psi^{-1}(\psi(t)/2))$ та $\mu(t) = t/(\eta(t) - t)$.

Тоді: $\mathfrak{M}_0 = \{\psi \in \mathfrak{M} : 0 < \mu(\psi, t) \le K_1\}$, $\mathfrak{A}_0 = \mathfrak{M}_0 \bigcap \mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}'_0 = \mathfrak{A}_0 \bigcap \mathfrak{A}$, $\overline{F} = \{\psi \in \mathfrak{A} : \eta'(t) \le K_2\}$, де K_1, K_2 — деякі сталі, які, можливо, залежать від функції $\psi(t)$.

Апроксимативні властивості операторів Валле Пуссена в нашій роботі характеризуються функціоналами

$$\mathcal{H}_d^{(p)}(f;x;\alpha)=\int_d^{\infty}\alpha(\sigma)\,|\,f(x)-V_{\sigma,c}(f;x)|^p\,d\sigma,\quad d\geq 1,\quad p>0,$$

в яких $\alpha(\sigma)$ — деяка невід'ємна неперервна при всіх $\sigma\geq d$ функція.

Покладемо: $W_\sigma^2=\left\{\varphi\in\varepsilon_\sigma:\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{|\varphi^2(t)|}{(1+|t|)^2}dt<\infty\right\}$;

$E_\sigma(f)=\inf\limits_{\varphi\in W_\sigma^2}\operatorname{esssup}\limits_{x\in\mathbb{R}}|\,f(x)-\varphi(x)|$; $c=\sigma-h$ і $\Theta=\lim\limits_{\sigma\to\infty}\frac{h}{\sigma}$.

В прийнятих позначеннях мають місце твердження.

Теорема 1. *Нехай $\psi_i\in\overline{F}$, $i=1,2$ й такі, що знайдуться константи K_1 та K_2 для яких виконується умова*

$$0<K_1\leq\frac{\eta(\psi_1;\sigma)-\sigma}{\eta(\psi_2;\sigma)-\sigma}\leq K_2<\infty,\quad \sigma\geq 1. \tag{6}$$

Числа $h=h(\sigma)$, обираються так, що $\sigma-h\in[\eta^{-1}(\psi_i;\sigma),\sigma]$, $i=1,2$. Нехай, далі, p — довільне додатне число і функція $\alpha(\sigma)$ така, що добуток $\alpha(\sigma)|\overline{\psi}(\sigma)|^p$ не зростає $\forall\sigma>1$.

Тоді, якщо $f\in\widehat{C}^{\overline{\psi}}\mathcal{M}$, то для довільних $d\geq 1$ виконується нерівність

$$\|\mathcal{H}_d^{(p)}(f;x;\alpha)\|_C\leq K(\alpha(d)|\overline{\psi}(d)|^p\,(\eta(d)-d)E_{d-h}^p(f^{\overline{\psi}})+\int_d^{\infty}\alpha(\sigma)|\overline{\psi}(\sigma)|^p\,E_{\sigma-h}^p(f^{\overline{\psi}})d\sigma), \tag{7}$$

в якій K — величина, яка не залежить від $f(\cdot)$, d та h; в якості величини $\eta(\sigma)=\eta(\sigma,\psi)$ може виступати будь яка з функцій $\eta(\sigma,\psi_i)$, $i=1,2$.

Теорема 2. *Нехай $\psi_1\in\mathfrak{A}_0$, $\psi_2\in\mathfrak{A}_0'$, числа σ і $h=h(\sigma)$, $\sigma>h$ обрані таким чином, що $0\leq\Theta<1$, $p>0$, а функція $\alpha(\sigma)$ така, що добуток $\alpha(\sigma)\beta(\sigma)$, де $\beta(\sigma)=\int\limits_\sigma^{\infty}\frac{|\psi_2(t)|}{t}dt+|\overline{\psi}(\sigma)|$, не зростає $\forall\sigma>1$.*

Тоді, якщо $f\in\widehat{C}^{\overline{\psi}}\mathcal{M}$, то для довільних $d\geq 1$ виконується нерівність

$$\|\mathcal{H}_d^{(p)}(f;x;\alpha)\|_C\leq K(d\alpha(d)\beta^p(d)E_{d-h}^p(f^{\overline{\psi}})+\int_d^{\infty}\alpha(\sigma)\beta(\sigma)E_{\sigma-h}^p(f^{\overline{\psi}})d\sigma), \tag{8}$$

в якій K — величина, яка не залежить від $f(\cdot)$, d та h.

Зауваження. У випадку $h=1$, $\psi_1(\sigma)=\psi(\sigma)\cos\frac{\beta\pi}{2}$, $\psi_2(\sigma)=\psi(\sigma)\sin\frac{\beta\pi}{2}$, $\beta\in\mathbb{R}$ та

$$\lambda_{\sigma,1}^*(t)=1,0\leq t\leq\sigma-1,1-\frac{(t-\sigma+1)\psi(\sigma)}{\psi(t)},\sigma-1\leq t\leq\sigma,0,t\geq\sigma;$$

$\operatorname*{ess\,sup}_{t\in\mathbb{R}} | f^{\bar\psi}(t)| \le 1$, (тобто, для класів $\widehat{C}^{\bar\psi}_{\beta,\infty}$) теореми 1 й 2 доведені О.І. Степанцем та Н.Л. Пачуліа [2]. Зазначимо, що в аналогу теореми 2 розглядається лише випадок $\beta = 0$. Для сум Фур'є в періодичному випадку така задача була розв'язана О.І. Степанцем в [1].

2. Доведення теорем почнемо зі встановлення деяких допоміжних тверджень. Нехай $f(x) - V_{\sigma,\sigma-h}(f;x) = \rho_{\sigma,\sigma-h}(f;x)$. Величину $\rho_{\sigma,\sigma-h}(f;x)$ розглянемо у двох окремих випадках, в залежності від швидкості прямування до нуля пари функцій ψ_1, ψ_2.

Лемма 1. *Нехай* $\psi_1 \in \mathfrak{A}_0$, $\psi_2 \in \mathfrak{A}'_0$, *числа* σ *і* $h = h(\sigma)$, $\sigma > h \ge 1$ *обрані так, що* $\Theta \in [0,1)$, *стала* $a \in (0, \pi\sigma/h)$.

Тоді $\forall f \in \widehat{C}^{\bar\psi}\mathcal{M}$ *в кожній точці* $x \in \mathbb{R}$

$$\rho_{\sigma,\sigma-h}(f;x) = \frac{-|\overline{\psi}(\sigma)|}{\pi} \int\limits_{\frac{a}{\sigma}\le|t|\le\frac{\pi}{h}} \delta(x+t)\frac{\sin(\sigma t-\theta)}{t}\,dt +$$

$$+\frac{1}{\pi}\int\limits_{|t|\le a/\sigma}\delta(x+t)\int\limits_0^\infty \psi_2(s)\sin st\,ds\,dt + A_{\sigma,h}(f;x), \qquad (9)$$

де $\delta(v) = f^{\bar\psi}(v) - \varphi(v)$, $\varphi(v)$ *— функція з множини* $W^2_{\sigma-h}$,. *для якої*

$$E_{\sigma-h}(f) = \| f^{\bar\psi}(x) - \varphi(x)\|_C,\ \theta = \operatorname{arctg}\frac{\psi_2(\sigma)}{\psi_1(\sigma)},$$

$$| A_{\sigma,h}(f;x)| \le K\,|\overline{\psi}(\sigma)|\,E_{\sigma-h}(f^{\bar\psi}).$$

Лемма 2. *Нехай* $\psi_i \in \overline{F}$, $i = 1,2$ *та виконана умова (6), числа* $h = h(\sigma)$ *обираються так, що* $\sigma - h \in [\eta^{-1}(\psi_i;\sigma);\sigma]$, $i = 1,2$. *Функції* $a_i = a_i(\sigma) = (\eta(\psi_i,\sigma)-\sigma)^{-1}.$, $i = 1,2$.

Тоді, якщо $f \in \widehat{C}^{\bar\psi}\mathcal{M}$, *то* $\forall x \in \mathbb{R}$ *і дійсних чисел* $\sigma > h \ge 1$,

$$\rho_{\sigma,\sigma-h}(f;x) = \nu_a\frac{|\overline{\psi}(\sigma)|}{\pi}\int\limits_{m_a\le|t|\le M_a}\delta(x+t)\frac{\sin(\sigma t-\theta)}{t}\,dt + d^{\psi_1}_{\sigma,h}(a_1;f;x) + d^{\psi_2}_{\sigma,h}(a_2;f;x), \qquad (10)$$

де $\nu_a = \operatorname{sign}(a(\sigma) - \frac{\pi}{h})$, $m_a = \min\{a(\sigma);\frac{\pi}{h}\}$, $M_a = \max\{a(\sigma),\frac{\pi}{h}\}$, *в ролі функції* $a(\sigma)$ *може виступати будь-яка з функцій* $a_i(\sigma), i = 1,2$, $\delta(v) = f^{\bar\psi}(v) - \varphi(v)$, $\varphi(v)$ *— функція з* $W^2_{\sigma-h}$, *для якої* $E_{\sigma-h}(f) = \| f^{\bar\psi}(x) - \varphi(x)\|_C$, $\theta = \operatorname{arctg}\frac{\psi_2(\sigma)}{\psi_1(\sigma)}$, *і*

$$| d^{\psi_i}_{\sigma,h}(a_i;f;x)| \le K E_{\sigma-h}(f^{\bar\psi})\,|\overline{\psi}_i(\sigma)|, \qquad i = 1,2.. \qquad (11)$$

3. Нехай $d \ge 1$ і $\gamma(d) = \begin{cases} \eta(d) - d, & \psi_1, \psi_2 \in \overline{F}; \\ d, & \psi_1 \in \mathfrak{A}_0, \psi_2 \in \mathfrak{A}_{0'}; \end{cases}$

$$A_d^p(f;x) = \left(\frac{1}{\gamma(d)} \int_d^{d+\gamma(d)} |\rho_{\sigma,\sigma-h}(f,x)|^p \, d\sigma \right)^{1/p}, \quad p > 0. \tag{12}$$

Наступним кроком у доведенні теореми 1 й теореми 2 буде таке твердження.

Лемма 3. *Нехай* $\psi_i \in \overline{F}$, $i = 1,2$ *й існують константи* K_1, K_2 *для яких виконується умова (6), числа* $h = h(\sigma)$ *обираються так, що* $\sigma - h \in [\eta^{-1}(\psi_i;\sigma), \sigma]$, $i = 1,2$.

Тоді, якщо $f \in \widehat{C}^{\overline{\psi}}\mathcal{M}$, *то для будь-яких* $x \in \mathbb{R}$, $d \ge 1$, $p > 0$

$$A_d^p(f;x) \le K E_{d-h}(f^{\overline{\psi}}) |\overline{\psi}(\sigma)| \tag{13}$$

Якщо ж $\psi_1 \in \mathfrak{A}_0$, $\psi_2 \in \mathfrak{A}_0'$, *числа* σ *і* h, $\sigma > h \ge 1$ *обрані так, що* $\Theta \in [0,1)$, *стала* $a \in (0, \pi\sigma/h)$, *то* $\forall x \in \mathbb{R}$, $d \ge 1$, $p > 0$ *і* $f \in \widehat{C}^{\overline{\psi}}\mathcal{M}$

$$A_d^p(f;x) \le K E_{d-h}(f^{\overline{\psi}}) \left(\int_d^\infty \frac{|\psi_2(t)|}{t} dt + |\overline{\psi}(\sigma)| \right). \tag{14}$$

У співвідношеннях (13) й (14) K *— величина, яка рівномірно обмежена по* σ, h *та* $f \in \widehat{C}^{\overline{\psi}}\mathcal{M}$.

Доведення. З нерівності Гельдера випливає, що величина $A_d^p(f;x)$ не спадає по параметру p, тому нерівності (13) та (14) досить довести лише при $p \ge 2$. Спочатку доведемо нерівність (13).

Використовуючи рівність (10) та нерівність Мінковського, отримаємо

$$A_d^p(f;x) \le \Big(\frac{1}{\gamma(d)} \int_d^{\gamma(d)} \Big| \nu_a \frac{|\overline{\psi}(\sigma)|}{\pi} \int_{m_a \le |t| \le M_a} \frac{\delta(x+t)}{t} \times \sin(\sigma t - \theta) dt \Big|^p d\sigma \Big)^{1/p} +$$

$$+K \left(\frac{1}{\gamma(d)} \int_d^{\gamma(d)} (|\overline{\psi}(\sigma)| E_{\sigma-h}(f^{\overline{\psi}}))^p d\sigma \right)^{1/p} \stackrel{df}{=} I_1 + I_2. \tag{15}$$

Оскільки функція $|\overline{\psi}(\sigma)| E_{\sigma-h}(f^{\overline{\psi}})$ не зростає, то

$$I_2 \le K \left(\frac{1}{\gamma(d)} |\overline{\psi}(d)|^p \, E_{d-h}^p(f^{\overline{\psi}})(\eta(d) - d) \right)^{1/p} = K |\overline{\psi}(d)| E_{d-h}(f^{\overline{\psi}}). \tag{16}$$

Перейдемо до встановлення оцінки величини I_1. Відзначимо, що

$$\left| \int_{m_a \le |t| \le M_a} \frac{\delta(x+t)}{t} \sin(\sigma t - \theta) dt \right| =$$

$$=\left|\int_{\pi/h}^{a(d)}\frac{\delta(x+t)}{t}\sin(\sigma t-\theta)dt+\int_{a(d)}^{a(\sigma)}\frac{\delta(x+t)}{t}\sin(\sigma t-\theta)dt\right|.$$

Застосовуючи нерівність Мінковського, одержимо

$$I_1\le\frac{|\overline{\psi}(d)|}{\pi}\left(\frac{1}{\gamma(d)}\int_d^{\eta(d)}\left|\int_{\pi/h}^{a(d)}\frac{\delta(x+t)}{t}\sin(\sigma t-\theta)dt\right|^p d\sigma\right)^{1/p}+$$

$$+\frac{|\overline{\psi}(d)|}{\pi}\left(\frac{1}{\gamma(d)}\int_d^{\eta(d)}\left|\int_{a(d)}^{a(\sigma)}\frac{\delta(x+t)}{t}\sin(\sigma t-\theta)dt\right|^p d\sigma\right)^{1/p}\overset{df}{=}I_1^*+I_1^{**}. \qquad (17)$$

Далі,

$$I_1^{**}\le\max_{\sigma\in[d,\eta(d)]}\frac{|\overline{\psi}(d)|}{\pi}\left|\int_{a(d)}^{a(\sigma)}\frac{\delta(x+t)}{t}\sin(\sigma t-\theta)dt\right|\le K|\overline{\psi}(d)|E_{d-h}(f^{\overline{\psi}})\max_{\sigma\in[d,\eta(d)]}\left|\ln\frac{\gamma(d)}{\gamma(\sigma)}\right|.$$

Оскільки, як було встановлено в роботі [8] (співвідношення (14.21), стор. 239),

$$0<K_1\le\frac{\gamma(d)}{\gamma(\sigma)}\le K_2,\quad \sigma\in[d,\eta(d)], \qquad (18)$$

то

$$I_1^{(2)}\le K|\overline{\psi}(d)|E_{d-h}(f^{\overline{\psi}}). \qquad (19)$$

Для оцінювання інтеграла I_1^* застосуємо нерівність Хаусдорфа-Юнга:

$$\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left|\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(t)e^{-ixt}dt\right|^{q'}dx\right)^{1/q'}\le\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|^q\,dx\right)^{1/q},\ f\in L_q,1<q\le 2,$$

$$q'=\frac{q}{1-q}.$$

З цією метою покладемо $\Phi_x(t)=\begin{cases}\dfrac{\delta(x+t)}{t}, & t\in[m_a,M_a];\\ 0, & t\notin[m_a,M_a].\end{cases}$

Тоді

$$I_1^*=\frac{|\overline{\psi}(d)|}{\pi}\left(\frac{1}{\gamma(d)}\int_d^{\eta(d)}\left|\int_{-\infty}^{\infty}\Phi_x(t)\sin(\sigma t-\theta)dt\right|^p d\sigma\right)^{1/p}\le$$

$$\le K|\overline{\psi}(d)|(\gamma(d))^{-1/p}\left(\int_{-\infty}^{\infty}\left|\int_{-\infty}^{\infty}\Phi_x(t)\sin(\sigma t-\theta)dt\right|^p d\sigma\right)^{1/p}\le$$

$$\le K|\overline{\psi}(d)|(\gamma(d))^{-1/p}\left|\int_{\pi/h}^{a(d)}\left|\frac{\delta(x+t)}{t}\sin(\sigma t-\theta)dt\right|^{p'}\right|^{1/p'}\le$$

$$\le K\,|\overline{\psi}(d)|\,(\gamma(d))^{-1/p}E_{d-h}(f^{\overline{\psi}})\,|(a(d))^{1-p'}-(\pi/h)^{1-p'}|^{1/p'}.$$

Оскільки $\sigma-h\in[\eta^{-1}(\psi_i;\sigma),\sigma]$, то, беручи до уваги нерівності [4]

$$\frac{1}{2}\le\frac{\eta(\psi;\sigma)-\sigma}{\sigma-\eta^{-1}(\psi;\sigma)}\le K_1,\qquad\frac{\sigma-\eta^{-1}(\psi;\sigma)}{\eta^{-1}(\psi;\sigma)}\le K_2,$$

які справджуються $\forall\psi\in\overline{F}$ і всіх $\sigma\ge 1$, знаходимо

$$\frac{h}{\eta(\psi_i;\sigma)-\sigma}=\frac{h}{\sigma-\eta^{-1}(\psi_i;\sigma)}\,\frac{\sigma-\eta^{-1}(\psi_i;\sigma)}{\eta(\psi_i;\sigma)-\sigma}\le K,\quad i=1,2. \tag{20}$$

А тому $(\gamma(d))^{-1/p}\,|(a(d))^{1-p'}-(\pi/h)^{1-p'}|^{1/p'}\le K.$

Отже,

$$I_1^*\le K\,|\overline{\psi}(d)|\,E_{d-h}(f^{\overline{\psi}}) \tag{21}$$

Порівнюючи співвідношення (12) та (15) – (21) приходимо до оцінки (13).

Перейдемо до доведення нерівності (14).

Використовуючи співвідношення (9) з леми 1 та нерівність Мінковського, згідно до рівності (12), отримаємо

$$A_d^p(f;x)\le\left(\frac{1}{d}\int_d^{2d}\left|\frac{|\overline{\psi}(\sigma)|}{\pi}\int\limits_{\frac{a}{\sigma}\le|t|\le\frac{\pi}{h}}\frac{\delta(x+t)}{t}\sin(\sigma t-\theta)dt\right|^p d\sigma\right)^{\frac{1}{p}}+$$

$$+\left(\frac{1}{d}\int_d^{2d}\left|\frac{1}{\pi}\int\limits_{|t|\le a/\sigma}\delta(x+t)\int_\sigma^\infty\psi_2(s)\sin st\,ds\,dt\right|^p d\sigma\right)^{1/p}+$$

$$+K\left(\frac{1}{d}\int_d^{2d}(|\overline{\psi}(\sigma)|\,E_{\sigma-h}(f^{\overline{\psi}}))^p d\sigma\right)^{1/p}\overset{df}{=}J_1+J_2+J_3. \tag{22}$$

Оскільки функція $|\overline{\psi}(\sigma)|\,E_{\sigma-h}(f^{\overline{\psi}})$ не зростає, то

$$J_3\le K\,|\overline{\psi}(d)|\,E_{d-h}(f^{\overline{\psi}}). \tag{23}$$

Далі ми скористаємося співвідношенням (5.5.4) з роботи [7] (стор. 236), при доведенні якого періодичність функції $f(\cdot)$ і включення $\sigma\in\mathbb{N}$ не використовувались, а тому

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_{|t|\le\frac{a}{\sigma}}\left|\int_\sigma^\infty\psi_2(s)\sin st\,ds\right|dt=\frac{2}{\pi}\int_\sigma^\infty\frac{|\psi_2(t)|}{t}dt+O(|\overline{\psi}(\sigma)|). \tag{24}$$

Беручи до уваги співвідношення (24), маємо

$$J_2\le 2E_{d-h}(f^{\overline{\psi}})\left(\frac{2}{\pi}\int_\sigma^\infty\frac{|\psi_2(t)|}{t}dt+O(1)\,|\overline{\psi}(\sigma)|\right). \tag{25}$$

Залишається встановити аналогічну оцінку і для інтеграла J_1.

При кожних фіксованих x та σ покладемо

$$\phi_x(t) = \begin{cases} \dfrac{\delta(x+t)}{t}, & |t| \in [a/\sigma, \pi/h]; \\ 0, & |t| \notin [a/\sigma, \pi/h]. \end{cases}$$

Застосовуючи нерівність Хаусдорфа-Юнга одержимо

$$J_1 \le \frac{|\overline{\psi}(d)|}{\pi}\left(\frac{1}{d}\int_{-\infty}^{\infty}\left|\int_{-\infty}^{\infty}\phi_x(t)\frac{\delta(x+t)}{t}\sin(\sigma t-\theta)dt\right|^p d\sigma\right)^{1/p} \le$$

$$\le \left(\frac{1}{d}\right)^{1/p}\left|\int_{a/\sigma\le|t|\le\pi/h}\left|\frac{\delta(x+t)}{t}\sin(\sigma t-\theta)\right|^{p'}dt\right|^{1/p'} \le$$

$$\le \left(\frac{1}{d}\right)^{1/p} E_{d-h}(f^{\overline{\psi}})\left|\int_{\frac{a}{\sigma}\le|t|\le\frac{\pi}{h}}\left|\frac{dt}{t}\right|^{p'}\right|^{1/p'} \le K\left(\frac{1}{d}\right)^{1/p} E_{d-h}(f^{\overline{\psi}}). \qquad (26)$$

При знаходженні цієї нерівності ми скористалися також умовою $\Theta \in [0,1)$.
Зі співвідношень (22) – (23) та (25) – (26) випливає нерівність (14).

Лему 4 остаточно доведено.

4. Перейдемо безпосередньо до доведення теореми 1.

Нехай $d_0 = d,\ d_i = \eta(d_{i-1}),\ i \in \mathbb{N}$. Тоді

$$\mathcal{H}_d^{(p)}(f;x;\alpha) = \int_d^{\infty}\alpha(\sigma)\,|\rho_{\sigma,\sigma-h}(f;x)|^p\,d\sigma = \sum_{i=0}^{\infty}\int_{d_i}^{d_{i+1}}\alpha(\sigma)\,|\rho_{\sigma,\sigma-h}(f;x)|^p\,d\sigma.$$

Оберемо числа $\sigma_i \in [d_i, d_{i+1}],\ i = 0,1,2,\ldots$ виходячи з умови $\alpha(\sigma_i) = \max\limits_{\sigma\in[d_i,d_{i+1}]}\alpha(\sigma)$.

Згідно з лемою 3, маємо

$$\int_{d_i}^{d_{i+1}}\alpha(\sigma)\,|\rho_{\sigma,\sigma-h}(f;x)|^p\,d\sigma \le \alpha(\sigma_i)\int_{d_i}^{d_{i+1}}|\rho_{\sigma,\sigma-h}(f;x)|^p\,d\sigma \le K\alpha(\sigma_i)\,|\overline{\psi}(d_i)|^p\,E_{d_i-h}(f^{\overline{\psi}})\gamma(d_i).$$

Тому
$$\mathcal{H}_d^{(p)}(f;x;\alpha) \le K\sum_{i=0}^{\infty}\alpha(\sigma_i)\,|\overline{\psi}(d_i)|^p\,E^p_{d_i-h}(f^{\overline{\psi}})\gamma(d_i) =$$

$$= K\alpha(\sigma_0)\,|\overline{\psi}(d)|^p\,E^p_{d-h}(f^{\overline{\psi}})\gamma(d) + K\sum_{i=1}^{\infty}\alpha(\sigma_i)\,|\overline{\psi}(d_i)|^p\,E^p_{d_i-h}(f^{\overline{\psi}})\gamma(d_i). \quad (27)$$

Але, якщо $\psi \in \overline{F}$, то, згідно з (18), $\dfrac{\gamma(d_i)}{\gamma(d_{i-1})} \le K$. Отже,

$$\mathcal{H}_d^{(p)}(f;x;\alpha) \le K\alpha(\sigma_0)\,|\overline{\psi}(d)|^p\,E^p_{d-h}(f^{\overline{\psi}})\gamma(d) + K\sum_{i=1}^{\infty}\alpha(\sigma_i)\,|\overline{\psi}(d_i)|^p\,E^p_{d_i-h}(f^{\overline{\psi}})\gamma(d_i).$$

(28)

Функція $\alpha(\sigma)|\bar{\psi}(\sigma)|^p$ не зростає і $\psi(d_i)=2\psi(d_{i+1})$. Відповідно, $\forall\sigma_i\in[d_i,d_{i+1}]$

$$\alpha(\sigma_i)|\bar{\psi}(d_i)|^p=\alpha(\sigma_i)2^p|\bar{\psi}(d_{i+1})|^p\le 2^p\alpha(\sigma_i)|\bar{\psi}(\sigma_i)|^p\le 2^p\alpha(d_i)|\bar{\psi}(d_i)|^p .$$

Тому, згідно зі співвідношенням (28), одержуємо шукану оцінку:

$$\mathcal{H}_d^{(p)}(f;x;\alpha)\le K(\alpha(d)|\bar{\psi}(d)|^p\,E_{d-h}^p(f^{\bar{\psi}})\gamma(d)+\sum_{i=1}^{\infty}\alpha(d_i)|\bar{\psi}(d_i)|^p\,E_{d_i-h}^p(f^{\bar{\psi}})\gamma(d_{i-1}))\le$$

$$\le K(\alpha(d)|\bar{\psi}(d)|^p\,E_{d-h}^p(f^{\bar{\psi}})\gamma(d)+\sum_{i=1}^{\infty}\int_{d_{i-1}}^{d_i}\alpha(\sigma)|\bar{\psi}(\sigma)|^p\,E_{\sigma-h}^p(f^{\bar{\psi}})d\sigma)=$$

$$=K(\alpha(d)|\bar{\psi}(d)|^p\,E_{d-h}^p(f^{\bar{\psi}})\gamma(d)+\int_{d}^{\infty}\alpha(\sigma)|\bar{\psi}(\sigma)|^p\,E_{\sigma-h}^p(f^{\bar{\psi}})d\sigma). \qquad (29)$$

Теорема 1 доведена.

5. Доведення теореми 2.

Нехай $d_i=2^i d,\ i\in\mathbb{N}$, тоді, згідно з лемою 1,

$$\mathcal{H}_d^{(p)}(f;x;\alpha)=\sum_{i=0}^{\infty}\int_{2^i d}^{2^{i+1}d}\alpha(\sigma)|\rho_{\sigma,\sigma-h}(f;x)|^p\,d\sigma\le\sum_{i=0}^{\infty}\alpha(\sigma_i)\int_{2^i d}^{2^{i+1}d}|\rho_{\sigma,\sigma-h}(f;x)|^p\,d\sigma\le$$

$$\le K\sum_{i=0}^{\infty}\alpha(\sigma_i)2^i dE_{2^i d-h}^p(f^{\bar{\psi}})\left(\int_{2^i d}^{\infty}\frac{|\psi_2(t)|}{t}dt+|\bar{\psi}(2^i d)|^p\right), \qquad (30)$$

де $\sigma_i\in[2^i d,2^{i+1}d]$ і такі, що $\alpha(\sigma_i)=\max\limits_{\sigma\in[2^i d,2^{i+1}d]}\alpha(\sigma)$.

В монографії [7] (стор. 391) для натуральних значень d встановлено оцінку

$$\int_d^{\infty}\frac{|\psi_2(t)|}{t}dt+|\bar{\psi}(d)|\le\int_{2d}^{\infty}\frac{|\psi_2(t)|}{t}dt+A|\bar{\psi}(2d)|,\ A=const. \qquad (31)$$

Але вона залишається вірною і в нашому випадку $\forall d>1$, оскільки при її доведенні не використовувався той факт, що $d\in\mathbb{N}$.

Введемо позначення: $\beta(\sigma)=\int\limits_{\sigma}^{\infty}\frac{|\psi_2(t)|}{t}dt+|\bar{\psi}(\sigma)|$.

Згідно з умовою, числа $\alpha(\sigma)\beta^p(\sigma)$ не зростають. Тому, враховуючи (31), одержимо

$$\alpha(\sigma_i)\beta^p(d_i)\le K\alpha(\sigma_i)\beta^p(2d_i)\le K\alpha(\sigma_i)\beta^p(\sigma_i)\le K\alpha(d_i)\beta^p(d_i)$$

Застосовуючи цю оцінку до нерівності (30), знаходимо

$$\mathcal{H}_d^{(p)}(f;x;\alpha)\le\sum_{i=0}^{\infty}d_i\alpha(d_i)\beta^p(d_i)E_{d_i-h}^p(f^{\bar{\psi}})\le K(d_0\alpha(d_0)\beta^p(d_0)E_{d_0-h}^p(f^{\bar{\psi}})+$$

$$+\sum_{i=1}^{\infty}\frac{d_i}{d_{i-1}}\int\limits_{d_{i-1}}^{2d_{i-1}}\alpha(\sigma)\beta^p(\sigma)E_{\sigma-h}^p(f^{\overline{\psi}})d\sigma)\le$$

$$\le K(d\alpha(d)\beta^p(d)E_{d-h}^p(f^{\overline{\psi}})+\int\limits_d^{\infty}\alpha(\sigma)\beta^p(\sigma)E_{\sigma-h}^p(f^{\overline{\psi}})d\sigma).$$

Таким чином, теорема 2 остаточно доведена.

Література

1 *Степанец А.И.* Скорость сходимости группы отклонений на множествах ψ-интегралов // Укр. мат. журн. – 1999. – 51, №12. – С. 1673--1693.

2 *Степанец А.И., Пачулиа Н.Л.* Сильные средние уклонения операторов Фурье // Укр. мат. журн. – 1990. – 42, №9. – С. 1225--1231.

3 *Stepanets A.I., Wang Kunyang, Zhang Xirong* Approximation of locally integrable function on the real line // Укр. мат. журн. – 1999. – 51, №11. – С. 1549--1561.

4 *Степанец А.И.* Приближение в пространствах локально интегрируемых функций // Укр. мат. журн. – 1994. – 46, №5. – С. 597 – 625.

5 *Степанец А.И.* Приближение $\overline{\psi}$ – интегралов периодических функций суммами Фурье. – Киев, 1996. – 70 с. – (Препринт / АН Украины. Ин-т математики; 96.11).

6 *Степанец А.И.* Приближение операторами Фурье функций, заданных на действительной оси // Укр. мат. журн. – 1988. – 40, №2. – С. 198 – 209.

7 *Степанец А.И.* Методы теории приближений: В 2 т. – Киев: Ин-т математики НАН Украины, 2002. – Т.1. – 426 с.

8 *Степанец А.И.* Методы теории приближений: В 2 т. – Киев: Ин-т математики НАН Украины, 2002. – Т.2. – 468 с.