

УДК 519.115.1: 519.175.3

Сторожилова О.В., Сторожилова Н.В., Кадубовський О.А.

¹Студентка 5 курсу 2 групи фізико-математичного факультету СДПУ,

²Студентка 5 курсу 2 групи фізико-математичного факультету СДПУ,

³Доцент кафедри геометрії та методики викладання математики СДПУ

Двокольорові O – і N –діаграми

Встановлено формули для підрахунку числа як неізоморфних (з точністю до повороту), так і нееквівалентних (відносно дії дієдральної групи) двокольорових O – і N –діаграм з n хордами. Для початкових n наведено неізоморфні діаграми з вказаних класів.

Ключові слова: хордова діаграма, циклічна група, група дієдра, лема Бернсайда.

1. Основні поняття та визначення

Означення 1.1. Нехай на площині задано коло і $2n$ точок на ньому, які є вершинами правильного $2n$ –кутника. Розіб'ємо ці точки на n пар і з'єднаємо кожну таку пару хордою. Отриману конструкцію (коло з n хордами на ньому) називають хордовою діаграмою з n хордами, або ж n –діаграмою (рис. 1 а)).

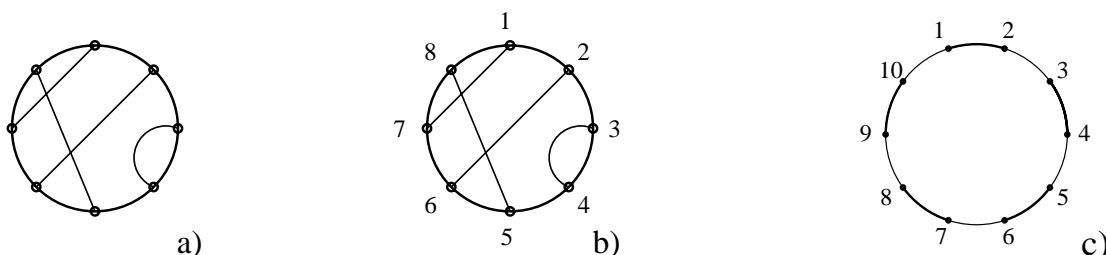


Рис. 1. а), б) Хордова 4–діаграма; в) 2–кольоровий $2n$ –шаблон

Нехай D – хордова діаграма з $2n$ вершинами. Занумеруємо останні числами від 1 до $2n$ рухаючись за годинниковою стрілкою від деякої фіксованої точки на колі (рис. 1 б)). Побудуємо перестановку α (інволюцію)

$$\alpha = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & a_2 & b_2 & \dots & a_n & b_n \\ b_1 & a_1 & b_2 & a_2 & \dots & b_n & a_n \end{pmatrix} = (a_1, b_1) \circ (a_2, b_2) \circ \dots \circ (a_n, b_n),$$

де a_i і b_i – номери вершин діаграми, які сполучено хордою. Надалі будемо вважати, що всі n –діаграми будуються на основі $2n$ –шаблону – рис. 1 б)).

Тоді кожна діаграма $D = D(\alpha)$ однозначно визначає перестановку α і навпаки.

Означення 1.2. Перестановку α , що визначає хордову діаграму $D(\alpha)$ на шаблоні, будемо називати склейкою, а множину таких склейок позначати B_{2n} .

В подальшому діаграму $D(\alpha)$ та її склейку будемо ототожнювати.

Означення 1.3 2-кольоровою хордовою діаграмою будемо називати n -діаграму, дуги кола якої по черзі розфарбовано у два кольори так, що будь-які сусідні дуги різного кольору. Надалі 2-кольорову n -діаграму будемо позначати D_n^* , а множину всіх таких діаграм – \mathfrak{D}_n^* .

Означення 1.4 2-кольорову n -діаграму, яка не містить (містить) хорд, що сполучають вершини з номерами однакової парності, будемо називати O - або ж N -діаграмою, а множину таких діаграм позначати \mathfrak{D}_n^O та \mathfrak{D}_n^N відповідно.

Означення 1.5 Склейку α , яка визначає діаграму $D^*(\alpha)$, будемо називати O -склейкою (N -склейкою), якщо діаграма $D^*(\alpha) \in O$ - або N -діаграмою відповідно. Множину O -склейок (N -склейок) будемо позначати B_{2n}^O (B_{2n}^N).

Означення 1.6 Дві діаграми $D_1^*(\alpha)$ і $D_2^*(\alpha')$ називають ізоморфними, якщо одну можна одержати з іншої в результаті повороту навколо спільного центру.

Означення 1.7 Діаграми $D_1^*(\alpha)$ і $D_2^*(\alpha')$ називають еквівалентними, якщо вони є або ізоморфними, або ж одну можна одержати з іншої в результаті перевертання (дзеркального відбиття) та повороту навколо спільного центру.

Означення 1.8 Віссю симетрії $l_{(k,k+1)}$ 2-кольорового $2n$ -шаблону будемо називати пряму, що проходить через центр шаблону та середину дуги, що визначається відповідними номерами вершин k і $k+1$ ($k = 0, \dots, n-1$).

Означення 1.9 Діаграму $D^*(\alpha)$ будемо називати симетричною, якщо вона симетрична відносно деякої осі симетрії шаблону.

Твердження 1.1 [4] Діаграма $D^*(\alpha) \in$ симетричною відносно осі $l_k = l_{(k,k+1)}$, тоді і лише тоді, коли з кожною парою $(a_i, b_i) \in \alpha$ остання містить й пару (a'_i, b'_i) : $a_i + a'_i \equiv 2k + 1 \pmod{2n}$, $b_i + b'_i \equiv 2k + 1 \pmod{2n} \quad \forall i = 1, \dots, \lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor$.

Означення 1.10 Циклічну групу порядку $2n$, породжену перестановкою $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & 2n-1 & 2n \\ 2 & 3 & \dots & 2n & 1 \end{pmatrix}$, будемо позначати $C_{2n} = \{\sigma^k \mid k = 1, 2, \dots, 2n\}$.

Означення 1.11 Циклічну групу порядку n , породжену елементом $\xi = \sigma^2$, будемо позначати $C_{2n}^* = \{\xi^k \mid k = 1, 2, \dots, n\}$.

Не важко бачити, що всі симетрії двокольорового $2n$ -шаблону (рис. 1с)) породжуються поворотом ξ (на кут $\varphi = \frac{2\pi}{2n}$) і осьовою симетрією (дзеркальним відбиттям) b

$$\xi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & 2n-1 & 2n \\ 3 & 4 & \dots & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & 2n-1 & 2n \\ 2n & 2n-1 & \dots & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Таким чином, всі симетрії двокольорового $2n$ -шаблону складаються з $2n$ елементів $D_{2n}^* = \{\xi^i, \tau_i = b \circ \xi^i \mid i = 1, \dots, n\}$ і утворюють групу діедра порядку $2n$.

Більш повну інформацію можна знайти, наприклад в [2–4].

2. Число двокольорових O - і N -діаграм

Добре відомо (див. напр. [1]), що число всіх n -діаграм побудованих на шаблоні (потужність множини \mathfrak{T}_n) дорівнює числу $d_n = (2n-1)!! = \frac{(2n)!}{2^n \cdot n!}$.

Тоді потужність множини \mathfrak{T}_n^* всіх 2-кольорових n -діаграм дорівнює $2 \times d_n$, бо дуги кожної n -діаграми можна пофарбувати точно у два способи.

Твердження 2.1 Число неізоморфних 2-кольорових n -діаграм співпадає з числом неізоморфних 2-кольорових n -діаграм, побудованих на 2-кольоровому $2n$ -шаблоні (з фіксованим розфарбуванням дуг кола).

Доведення. Для доведення достатньо показати, що для кожної діаграми $D^*(\alpha) \in \mathfrak{T}_n^*$, отриманої на шаблоні з фіксованим розфарбуванням, існує діаграма $D^*(\alpha') \in \mathfrak{T}_n^*$ (отримана на цьому ж шаблоні), яка при зміні кольорів на альтернативні є ізоморфною $D^*(\alpha)$. Нехай $\alpha = (a_1, b_1) \dots (a_n, b_n) \in B_{2n}$. Розглянемо склейку $\alpha' = (a_1 + 1 \bmod(2n), b_1 + 1 \bmod(2n)) \dots (a_n + 1 \bmod(2n), b_n + 1 \bmod(2n)) \in B_{2n}$.

Очевидно, що діаграма $D^*(\alpha') \in \mathfrak{T}_n^*$, тобто належить множині діаграм шаблону.

Не важко бачити, що якщо замінити кольори дуг діаграми $D^*(\alpha')$ на альтернативні та повернути її на кут $\omega = \frac{2\pi}{2n}$ (проти годинникової стрілки), то $D^*(\alpha) \equiv D^*(\alpha')$. □

Зауваження 2.1 Оскільки кінцевою метою є підрахунок числа саме неізоморфних 2-кольорових n -діаграм, то надалі будемо розглядати лише ті діаграми, які одержано на одному 2-кольоровому $2n$ -шаблоні. Тому за потужність множини \mathfrak{T}_n^* слід прийняти величину $|\mathfrak{T}_n^*| = (2n-1)!! = \frac{(2n)!}{2^n \cdot n!}$ (1)

Твердження 2.2 $|\mathfrak{T}_n^O| = |B_{2n}^O| = n!$ (2)

Доведення. За означенням O -склейки не можуть визначати хорд, які сполучають вершини шаблону з номерами однакової парності.

Таким чином, O -склейка α має вид: $\alpha = (1, b_1)(3, b_2) \dots (2n-3, b_{n-1})(2n-1, b_n)$,

де b_i – парні номери вершин шаблону. Очевидно, що: b_1 можна обрати n способами; $b_2 - n-1$ способом; ... $b_i - i$ способами; ... $b_n - 1$ способом.

Таким чином, існує точно $n!$ O -склейок. □

Наслідок 2.1 $|\mathfrak{T}_n^N| = |B_{2n}^N| = (2n-1)!! - n!$ (3)

3. Число неізоморфних двокольорових діаграм

Як впливає з роботи [3], циклічна група C_{2n} діє на множині \mathfrak{T}_n хордових n -діаграм як *спряження*, а саме

Твердження 3.1 Дві діаграми $D(\alpha)$ і $D(\beta)$ з \mathfrak{T}_n є ізоморфними ізоморфними (під дією групи C_{2n}), тоді і лише тоді, коли $\exists i \in \{1, \dots, 2n\}$: $\alpha = \sigma^{-i} \circ \beta \circ \sigma^i$.

Перестановку $\sigma^i \in C_{2n}$ називають автоморфізмом діаграми $D(\alpha) \in \mathfrak{T}_n$, $\alpha \in B_{2n}$, якщо $\alpha = \sigma^{-i} \circ \alpha \circ \sigma^i$.

В роботах [2] і [3], встановлено, що число неізоморфних діаграм з класу \mathfrak{S}_n може бути підраховане за допомогою співвідношень

$$\mu_n^* = \frac{1}{2n} \left((2n-1)!! + \sum_{i|2n, i \neq 2n} \phi\left(\frac{2n}{i}\right) \cdot \rho(n, i) \right), \text{ де}$$

$$\rho(n, i) = \begin{cases} (i-1)!! \cdot \left(\frac{2n}{i}\right)^{\frac{i}{2}}, & \frac{2n}{i} = 2l+1 \\ \sum_{r=0}^{i/2} C_i^{2r} \cdot (2r-1)!! \cdot \left(\frac{2n}{i}\right)^r, & \frac{2n}{i} = 2l \end{cases} \quad (4)$$

підсумовування ведеться за всіма дільниками i числа $2n$ (окрім $2n$); $\phi(q)$ – функція Ейлера (число натуральних менших за q чисел і взаємнопростих із ним); $\rho(n, i)$ – число n – діаграм, для яких перестановка σ^i є автоморфізмом.

Зауваження 3.1 Очевидно, що "не кольорову" діаграму можна повертати на довільний кут $\varphi = i \cdot \frac{2\pi}{2n}$, $0 < i \leq 2n$. Поворот 2 – кольорових діаграми коректно визначений лише для "парних кутів" ($i = 2m$), оскільки при непарних m кожна чорна (біла) дуга діаграми накладається на білу (чорну) дугу шаблону.

Твердження 3.2 Діаграми $D_1 = D^*(\alpha)$, $D_2 = D^*(\alpha') \in \mathfrak{S}_n^*$ є ізоморфними тоді і лише тоді, коли одна спряжена іншій під дією деякого парного степеня циклічної перестановки σ , тобто $D_1 \cong D_2 \Leftrightarrow \exists m \in \{1, \dots, n\} : \alpha = \sigma^{-2m} \circ \alpha' \circ \sigma^{2m}$.

З урахуванням останнього та співвідношень (4) маємо

Теорема 3.1 Для довільного натурального $n \geq 2$ число d_n^* неізоморфних діаграм з класу \mathfrak{S}_n^* можна обчислити за допомогою співвідношень

$$d_n^* = \frac{1}{n} \left((2n-1)!! + \sum_{m|n, m \neq n} \phi\left(\frac{n}{m}\right) \cdot \text{Fix}_{\mathfrak{S}_n^*}(\sigma^{2m}) \right), \text{ де} \quad (5)$$

$$\text{Fix}_{\mathfrak{S}_n^*}(\sigma^{2m}) = \begin{cases} (2m-1)!! \cdot \left(\frac{n}{m}\right)^m, & \left(\frac{n}{m}\right) = 2l+1 \\ \sum_{r=0}^m C_{2m}^{2r} \cdot (2r-1)!! \cdot \left(\frac{n}{m}\right)^r, & \left(\frac{n}{m}\right) = 2l \end{cases} \quad (6)$$

$\text{Fix}_{\mathfrak{S}_n^*}(\sigma^{2m})$ – число діаграм з \mathfrak{S}_n^* , для яких перестановка σ^{2m} є автоморфізмом.

4. Число неізоморфних O – і N – діаграм

За лемою Бернсайда число неізоморфних 2 – кольорових O – діаграм (породжених O – склейками з B_{2n}^O) можна обчислити за формулою:

$$d_n^{*(O)} = \frac{1}{n} \left(|\mathfrak{S}_n^O| + \sum_{k|n, k \neq n} \phi\left(\frac{n}{k}\right) \cdot \text{Fix}_{\mathfrak{S}_n^O}(\sigma^{2k}) \right), \text{ де} \quad (7)$$

$\text{Fix}_{\mathfrak{S}_n^O}(\xi^k) = \left| \left\{ D(\alpha) \in \mathfrak{S}_n^O \mid \xi^{-k} \circ \alpha \circ \sigma^k = \alpha \right\} \right| = \left| \left\{ \alpha \in B_{2n}^O \mid \alpha + 2k \pmod{2n} = \alpha \right\} \right|$ –

число діаграм, для яких перестановка $\xi^k = \sigma^{2k}$ є автоморфізмом.

Лема 4.1 Для довільного натурального $n = i \cdot m$ має місце рівність

$$\text{Fix}_{\mathfrak{S}_n^O}(\sigma^{2i}) = (i)! \cdot \left(\frac{n}{i}\right)^i. \quad (8)$$

Доведення зводиться до задачі про підрахунок числа всіх O -склейок α , що задовольняють умову: $\alpha + 2k \bmod(2n) = \alpha$. Всі такі склейки мають вид

$$\alpha = (1, b_1)(3, b_2) \dots (2i-1, b_i) \dots (2n-1, b_n), \text{ де } b_i \in \{2, 4, \dots, 2n\} \quad \forall i = 1, \dots, n, \quad b_i \neq b_j.$$

$k = 1$: оскільки $\alpha + 2 \bmod(2n) = \alpha$, то $b_i = b_{i-1} + 2$. Але ж тоді всі такі склейки мають вид: $\alpha = (1, b_1)(3, b_1 + 2)(5, b_1 + 4) \dots (2i-1, b_1 + 2i - 2) \dots (2n-1, b_1 + 2n - 2)$.

Очевидно, що число таких склейок дорівнює n .

$k = 2$: оскільки $\alpha + 4 \bmod(2n) = \alpha$, то $b_i = b_{i-2} + 4$. Але ж тоді всі такі склейки розпадаються на дві підсклейки α_1, α_2 : $\alpha = \alpha_1 \wedge \alpha_2$, які мають вид:

$$\alpha = (1, b_1)(5, b_1 + 4)(9, b_1 + 8) \dots (4i-3, b_1 + 4i - 4) \dots (2n-3, b_1 + 2n - 4) \wedge \\ \wedge (3, b_2)(7, b_2 + 4)(11, b_2 + 8) \dots (4j-1, b_2 + 4j - 4) \dots (2n-1, b_2 + 2n - 4).$$

Оскільки $2n$ повинно ділитися на 4, то, очевидно, що $n = 2m$. Не важко помітити, що в підсклейках індекси $i, j = 1, \dots, m$.

Але ж тоді число всіх таких склейок дорівнює $2m \cdot (n - m) = 2m \cdot m$.

$k = 3$: Оскільки $2n$ повинно ділитися на 6, то, очевидно, що $n = 3m$. Оскільки $\alpha + 6 = \alpha$, то $b_i = b_{i-3} + 6 \quad \forall i \in \{4, \dots, n\}$. Тоді всі такі склейки розпадаються на три підсклейки $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$: $\alpha = \alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \alpha_3$ і мають вид:

$$\alpha = (1, b_1)(7, b_1 + 6)(13, b_1 + 12) \dots (6i-5, b_1 + 6i - 6) \dots (2n-5, b_1 + 2n - 6) \wedge \\ \wedge (3, b_2)(9, b_2 + 6)(15, b_2 + 12) \dots (6j-3, b_2 + 6j - 6) \dots (2n-3, b_2 + 2n - 6) \wedge \\ \wedge (5, b_3)(11, b_3 + 6)(17, b_3 + 12) \dots (6r-1, b_3 + 6r - 6) \dots (2n-1, b_3 + 2n - 6).$$

Не важко помітити, що в підсклейках індекси $i, j, r = 1, \dots, m$. Тому число всіх таких склейок становить $3m \cdot (n - m)((n - m) - m) = 3m \cdot 2m \cdot m$.

$k = i$: Оскільки $2n$ повинно ділитися на $2i$, то, очевидно, що $n = i \cdot m$. Оскільки $\alpha + 2i = \alpha$, то всі склейки розпадаються на i підсклейок, в кожній з яких по m пар. Таким чином, повторюючи міркування, аналогічні тим, які були використанні в перших трьох випадках, отримуємо, що число всіх таких склейок становить

$$im \cdot (im - m) \cdot ((im - m) - m) \cdot \dots \cdot m = \prod_{l=1}^i l \cdot m = i! \cdot m^i = (i)! \cdot \left(\frac{n}{i}\right)^i,$$

що й доводить справедливість співвідношення (8). □

Наслідок 4.1 Число неізоморфних діаграм з класу \mathfrak{S}_n^O може бути обчислене за формулою

$$d_n^{*(O)} = \frac{1}{n} \left(n! + \sum_{i|n, i \neq n} \phi\left(\frac{n}{i}\right) \cdot i! \cdot \left(\frac{n}{i}\right)^i \right). \quad (9)$$

Наслідок 4.2 $d_n^{*(N)} = d_n^* - d_n^{*(O)}$. (10)

5. Число нееквівалентних O – діаграм

За лемою Бернсайда число орбіт групи перестановок D_{2n}^* , що діє на множині \mathfrak{S}_n^O , можна обчислити за допомогою співвідношення

$$\delta_n^{*(O)} = \frac{1}{|D_{2n}^*|} \sum_{\eta \in D_{2n}^*} \text{Fix}_{\mathfrak{S}_n^O}(\eta) = \frac{1}{2n} \left(\sum_{i=1}^n \text{Fix}_{\mathfrak{S}_n^O}(\xi^i) + \sum_{i=1}^n \text{Fix}_{\mathfrak{S}_n^O}(\tau_i) \right), \text{ де } \quad (11)$$

$\tau_i = b \circ \xi^i$, $\text{Fix}_{\mathfrak{S}_n^O}(\eta) = \left| \left\{ D(\alpha) \in \mathfrak{S}_n^O \mid \alpha = \eta^{-1} \circ \alpha \circ \eta, \eta \in D_{2n}^* \right\} \right|$ – число діаграм, для яких η є автоморфізмом. Зі співвідношень (9), (11) маємо

$$\delta_n^{*(O)} = \frac{1}{2} \left(d_n^{*(O)} + \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n \text{Fix}_{\mathfrak{S}_n^O}(\tau_i) \right). \quad (12)$$

Оскільки число O – діаграм симетричних відносно кожної осі двокольорового $2n$ – шаблону є однаковим, то

$$\delta_n^{*(O)} = \frac{1}{2} \left(d_n^{*(O)} + \text{Fix}_{\mathfrak{S}_n^O}(\tau_n) \right) = \frac{1}{2} \left(d_n^{*(O)} + \text{Fix}_{\mathfrak{S}_n^O}(b) \right) \quad (13)$$

Лема 5.1 Число O – діаграм, симетричних відносно довільної осі симетрії двокольорового $2n$ – шаблону можна обчислити за допомогою співвідношень

$$Z^O(n) = \begin{cases} \sum_{i=0}^m C_n^{2i} \cdot (2(m-i)-1)!!, & n = 2m \\ \sum_{i=0}^m C_n^{2i+1} \cdot (2(m-i)-1)!!, & n = 2m+1 \end{cases} \quad (14)$$

Доведення. Нехай $D^*(\alpha)$ – діаграма, симетрична відносно осі l_0 . Тоді з кожною хордою $H_i(2i-1, b_i) \in \alpha$ склейці α належить й симетрична їй хорда $H_i'(2n-2i+2, 2n-b_i+1)$. Очевидно, що можливими є ситуації, коли хорда співпадає з хордою їй симетричною. Такі хорди для зручності будемо називати *нерухомими* або ж *самосиметричними*.

Не важко помітити, що при парних $n = 2m$ число нерухомих хорд може бути лише парним, а при непарних $n = 2m+1$ – лише непарним.

Розглянемо випадок, коли $n = 2m$. Існує лише $m+1$ суттєво різних випадків, коли діаграма містить точно $2i$ ($i = 0, \dots, m$) нерухомих хорд. Ті, що залишилися $2(m-i)$ хорд, не можуть бути нерухомими і утворюють $(m-i)$ пар взаємно симетричних хорд. Число способів утворення $(m-i)$ таких пар становить

$$\frac{C_{2(m-i)}^2 \cdot C_{2(m-i-1)}^2 \cdot \dots \cdot C_4^2 \cdot C_2^2}{(m-i)!} = \frac{(2(m-i))!}{(m-i)! \cdot 2^{(m-i)}}.$$

Оскільки ми розглядаємо лише O – діаграми, то не може бути хорд, що сполучають вершини з номерами однакової парності. Очевидно, що кожна нерухома хорда сполучає вершини різної парності. Утворення пар взаємно симетричних хорд слід розуміти керуючись правилом:

кожному вибору 2 точок з непарними номерами a_1, a_2 однозначно ставиться у відповідність пара точок з парними номерами $a'_1 = a'_1(a_1), a'_2 = a'_2(a_2)$ (див. Твердження 1.1). В результаті одержимо пару взаємно симетричних хорд $(a_1, a'_2); (a_2, a'_1)$. Таким чином, при $n = 2m$

$$Z^O(n) = \sum_{i=0}^m C_n^{2i} \cdot \frac{(2(m-i))!}{2^{(m-i)} \cdot (m-i)!} = \sum_{i=0}^m C_n^{2i} \cdot (2(m-i)-1)!!$$

У випадку $n = 2m + 1$ можливі лише $m + 1$ суттєво різних випадків. А саме, коли діаграма містить точно $2i + 1$ ($i = 0, \dots, m$) нерухомих хорд. Ті що залишилися $2(m-i)$ хорди не можуть бути нерухомими й утворюють $(m-i)$ пар взаємно симетричних хорд.

Провівши аналогічні міркування у випадку $n = 2m$, маємо наступний результат

$$Z^O(n) = \sum_{i=0}^m C_n^{2i+1} \cdot \frac{(2(m-i))!}{2^{(m-i)} \cdot (m-i)!} = \sum_{i=0}^m C_n^{2i+1} \cdot (2(m-i)-1)!! \quad \square$$

Теорема 5.1 Число орбіт групи перестановок D_{2n}^* , що діє на множині \mathfrak{S}_n^O , визначається співвідношенням:

$$\delta_n^{*(O)} = \frac{1}{2} \left(d_n^{*(O)} + \sum_{i=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} C_n^{2 \cdot \lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 2i} \cdot \left(2 \left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor - i \right) - 1 \right)!! \right), \quad (15)$$

де $\lfloor q \rfloor$ – ціла частина числа q .

Доведення є наслідком леми 5.1 і співвідношення (13).

Нижче наведено всі неізоморфні (під дією групи C_{2n}^*) 2-кольорові O -діаграми для випадків $n = 3; 4; 5$.

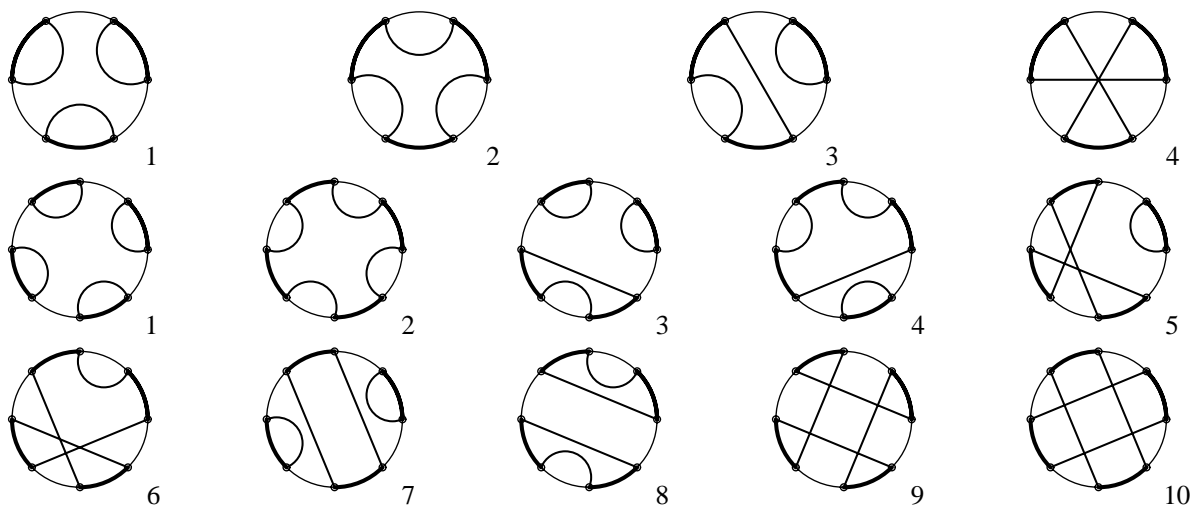


Рис. 2 Всі неізоморфні діаграми з класів \mathfrak{S}_3^O та \mathfrak{S}_4^O відповідно

Очевидно, що для $n = 3; 4$ неізоморфні 2-кольорові O -діаграми є нееквівалентними й під дією групи дієдра D_{2n}^* . Тому $\delta_3^{*(O)} = 4, \delta_4^{*(O)} = 10$.

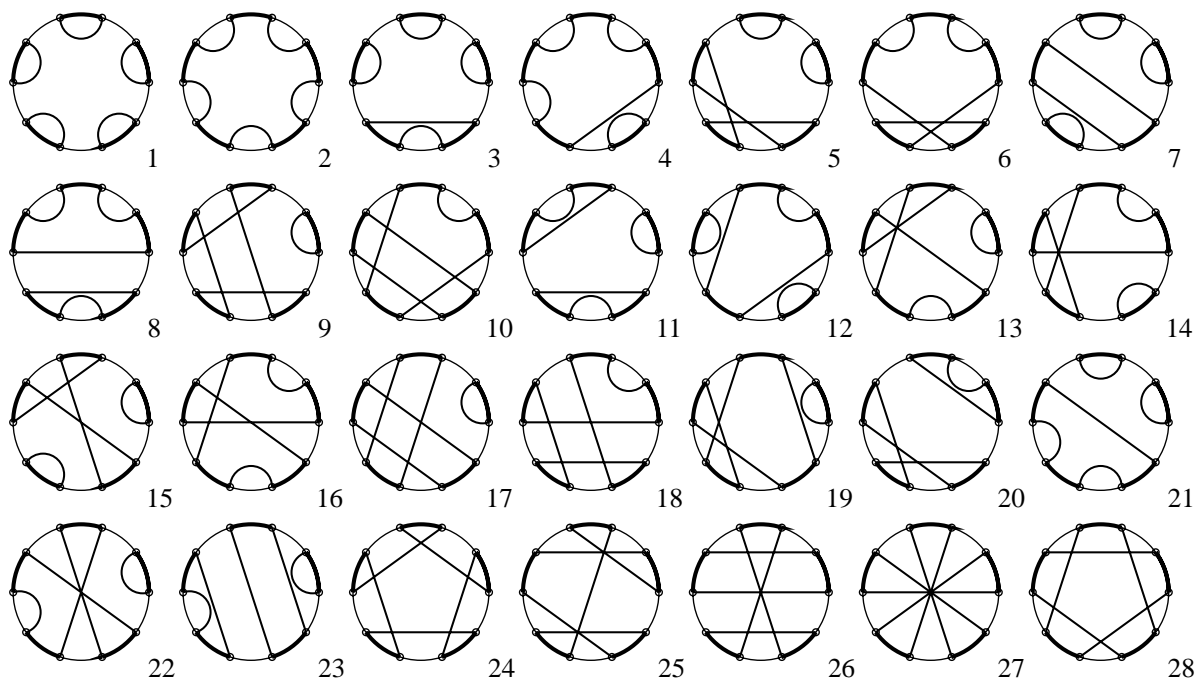


Рис. 3 **Всі неізоморфні діаграми з класу \mathfrak{S}_5^O**

Не важко бачити, що за винятком діаграм 13 і 14 наведені неізоморфні 5 – діаграми є нееквівалентними під дією групи діедра. Тому $\delta_5^{*(O)} = 27$.

6. Число нееквівалентних N – діаграм

За лемою Бернсайда число орбіт групи діедра D_{2n}^* , що діє на множині \mathfrak{S}_n^N , можна обчислити за формулою

$$\delta_n^{*(N)} = \frac{1}{2} \left(d_n^{*(N)} + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \text{Fix}_{\mathfrak{S}_n^N}(\tau_i) \right). \tag{16}$$

Оскільки число N – діаграм, симетричних відносно кожної осі симетрії шаблону є однаковим, то використовуючи Наслідок 4.2, маємо наступне співвідношення

$$\delta_n^{*(N)} = \frac{1}{2} \left(d_n^{**} - d_n^{*(O)} + \text{Fix}_{\mathfrak{S}_n^N}(b) \right), \quad \text{де} \tag{17}$$

$\text{Fix}_{\mathfrak{S}_n^N}(b)$ – число N – діаграм, для яких $b \in$ автоморфізмом, тобто число N – діаграм симетричних відносно осі симетрії $l_{(2n,1)}$.

Лема 6.1 Число $Z^N(n)$ N – діаграм, симетричних відносно довільної осі симетрії шаблону, можна обчислити за допомогою співвідношень

$$Z^N(n) = \begin{cases} \sum_{i=0}^{m-1} C_n^{2i} \cdot (2(m-i)-1)!! \cdot (2^{m-i} - 1), & n = 2m \\ \sum_{i=0}^{m-1} C_n^{2i+1} \cdot (2(m-i)-1)!! \cdot (2^{m-i} - 1), & n = 2m + 1 \end{cases} \tag{18}$$

Доведення. Нехай $D^*(\alpha)$ – N – діаграма, симетрична відносно осі $l_{(2n,1)}$.

Тоді з кожною хордою $H_i(a_i, b_i) \in \alpha$ склейці α належить й симетрична їй хорда $H_i(2n - a_i + 1, 2n - b_i + 1)$.

Розглянемо випадок $n = 2m$. Існує тільки m суттєво різних випадків. А саме, коли діаграма містить в точності $2i$ ($i = 0, \dots, m-1$) нерухомих хорд. У випадку $i = m$ діаграма виявилась би O -діаграмою. Ті що залишилися $2(m-i)$ хорд не можуть бути нерухомими й утворюють $(m-i)$ пар взаємно симетричних хорд. Оскільки ми розглядаємо лише N -діаграми, то повинна бути, щонайменше, одна пара взаємно симетричних хорд, кожна з яких сполучає точки з номерами однакової парності. Отже існує $m-i$ підвипадків, коли діаграма містить точно $1 \leq k \leq (m-i)$ пар взаємно симетричних хорд, кожна з яких сполучає точки з номерами однакової парності. Утворення таких пар слід розуміти керуючись правилом:

кожному вибору 2 точок з непарними номерами a_1, a_2 однозначно ставиться у відповідність пара точок з парними номерами $a'_1 = a'_1(a_1)$, $a'_2 = a'_2(a_2)$ (див. Твердження 1.1). В результаті одержимо пару взаємно симетричних хорд (a_1, a_2) та (a'_1, a'_2) , що мають вказані властивості.

Ті $2(m-i-k)$ хорд що залишилися, повинні утворювати $(m-i-k)$ пар взаємно симетричних хорд, кожна з яких сполучає точки з номерами різної парності (див. доведення леми 5.1). Тому, при $n = 2m$ маємо

$$\begin{aligned} Z^N(n) &= \sum_{i=0}^{m-1} C_n^{2i} \cdot \left(\sum_{k=1}^{m-i} \left(\frac{1}{k!} \prod_{l=1}^k C_{2(m-i-l+1)}^2 \cdot (2(m-i-k)-1)!! \right) \right) = \\ &= \sum_{i=0}^{m-1} C_n^{2i} \cdot \left(\sum_{k=1}^{m-i} \left(\frac{(2(m-i))!}{k! \cdot 2^k \cdot (2(m-i-k))!} \cdot \frac{(2(m-i-k))!}{2^{(m-i-k)} \cdot (m-i-k)!} \right) \right) = \\ &= \sum_{i=0}^{m-1} C_n^{2i} \cdot \left(\sum_{k=1}^{m-i} \left(\frac{(2(m-i))!}{k! \cdot 2^{(m-i)} \cdot (m-i-k)!} \right) \right) = \sum_{i=0}^{m-1} \frac{C_n^{2i} \cdot (2(m-i))!}{2^{m-i}} \cdot \left(\sum_{k=1}^{m-i} \frac{1}{k! \cdot (m-i-k)!} \right) = \\ &= \sum_{i=0}^{m-1} \frac{C_n^{2i} \cdot (2(m-i))!}{2^{m-i} \cdot (m-i)!} \sum_{k=1}^{m-i} C_{m-i}^k = \sum_{i=0}^{m-1} C_n^{2i} \cdot (2(m-i)-1)!! \cdot (2^{m-i} - 1). \end{aligned}$$

Повторюючи міркування для випадку $n = 2m + 1$, одержимо очікуваний результат. □

Теорема 6.1 Число нееквівалентних діаграм з класу \mathfrak{S}_n^N можна обчислити за допомогою співвідношення

$$\delta_n^{*(N)} = \frac{1}{2} \left(d_n^{**} - d_n^{*(O)} + \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} C_n^{2\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 2i} \cdot \left(2(\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - i) - 1 \right)!! \cdot \left(2^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - i} - 1 \right) \right). \quad (19)$$

Доведення є наслідком леми 6.1 і співвідношень (17).

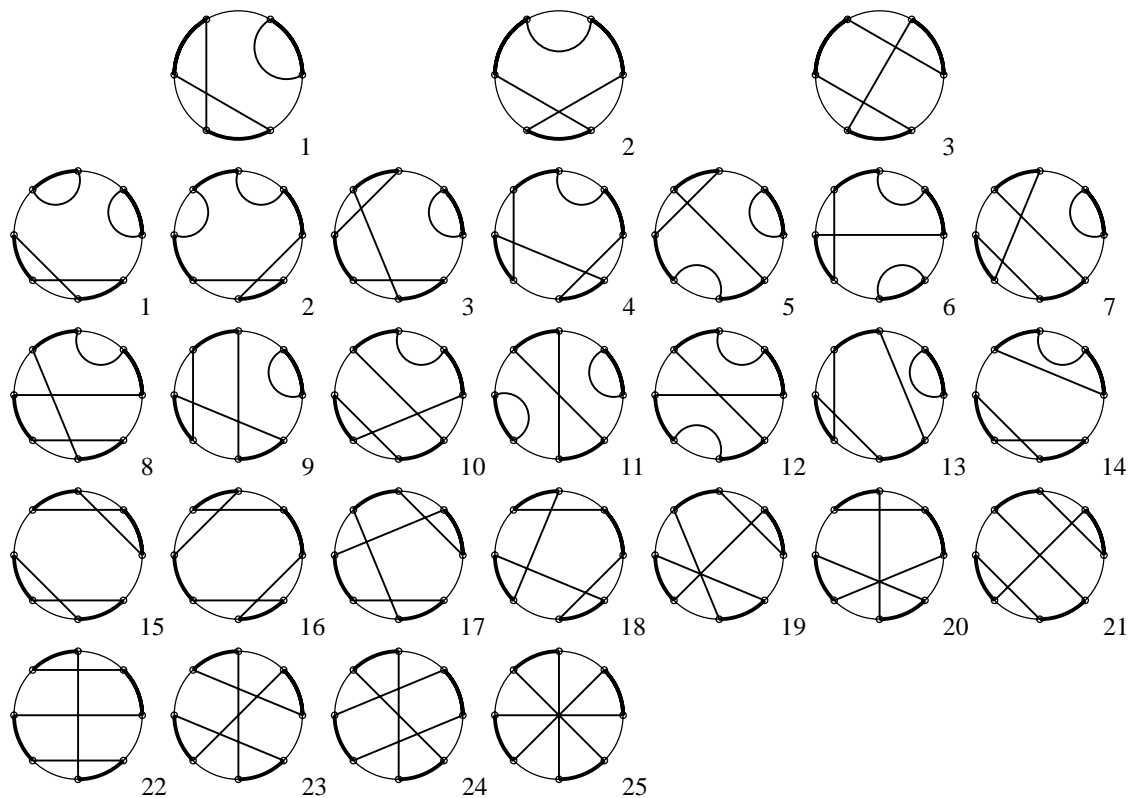


Рис. 4 Всі неізоморфні діаграми з класів \mathfrak{S}_3^N та \mathfrak{S}_4^N відповідно

Очевидно, що при $n = 3$ всі діаграми є нееквівалентними й під дією групи діедра D_{2n}^* . У випадку $n = 4$ діаграми 5 і 6; 7 і 9; 8 і 10; 19 і 20; 21 і 22 є еквівалентними (під дією групи діедра). І тому існує точно $25 - 10 + 5 = 20$ нееквівалентних N – діаграм з 4 хордами.

На думку авторів дослідження в цьому напрямку можуть бути успішно продовжені за рахунок розв'язування задач на підрахунок числа нееквівалентних m – кольорових n – діаграм. Одержані в роботі результати можуть бути ефективно використані в тих галузях науки, де виникають інваріанти, схожі до кола з відміченими точками. З деякими застосуваннями двокольорових діаграм в топології можна ознайомитись в роботі [4].

Література

1. *Riordan J.* The distribution of crossings of chords joining pairs of $2n$ points on a circle // *Math. Comp.* 29 no. 129, 1975, pp 215–222.
2. *Stoimenov A.* Enumeration of chord diagrams and an upper bound for Vassiliev invariants // *Journal of Knot and its Ramifications*, vol. 7, no. 1, 1998, pp. 93–114.
3. *Gori R., Marcus M.* Counting non-isomorphic chord diagrams // *Theoretical Computer Science* – 1998–204. – p. 55–73.
4. *Кадубовський О.* Класифікація векторних полів Морса-Смейла на двовимірних многовидах // *Вісник Київського національного університету ім. Тараса Шевченка. Математика, механіка.* – 2005, Вид. 14., С. 85-88.