

УДК 519.115.1: 519.175.3

Саприкіна Ю.С., Мазур С.Ю., Кадубовський О.А.

¹Студентка 5 курсу 2 групи фізико-математичного факультету СДПУ,

²Студент 5 курсу 2 групи фізико-математичного факультету СДПУ,

³Доцент кафедри геометрії та методики викладання математики СДПУ

Двокольорові O -діаграми з одним чорним циклом

Встановлено формули для підрахунку числа як неізоморфних (під дією циклічної групи), так і нееквівалентних (відносно дії дієдральної групи) двокольорових O -діаграм з n хордами, які мають один цикл певного кольору.

Ключові слова: хордова діаграма, цикл, циклічна група, група дієдра, лема Бернсайда.

1. Основні поняття та визначення.

Означення 1.1. Нехай на площині задане коло і $2n$ точок на ньому, які є вершинами правильного $2n$ -кутника. Розіб'ємо ці точки на n пар і з'єднаємо кожну таку пару хордою. Отриману конструкцію (коло з n хордами на ньому) називають хордовою діаграмою з n хордами або ж n -діаграмою (рис. 1 *a*), *b*)).

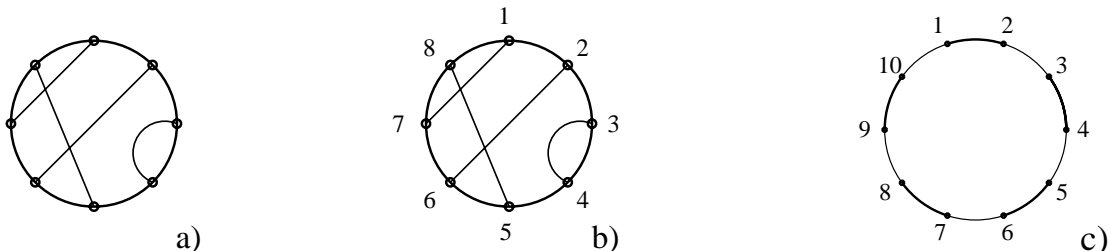


Рис. 1. *a*), *b*) Хордова 4-діаграма; *c*) 2-кольоровий $2n$ -шаблон

Означення 1.2. Циклом n -діаграми будемо називати послідовність хорд і дуг кола, які утворюють гомеоморфний образ орієнтованого кола – рис. 2.

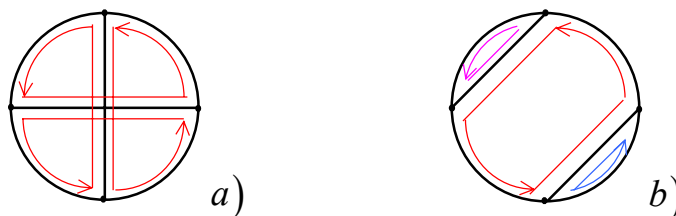


Рис. 2. *a*) 2-діаграма з 1-им циклом; *b*) 2-діаграма з 3-ма циклами

Означення 1.3 2-кольоровою хордовою діаграмою будемо називати n -діаграму, дуги кола якої по черзі розфарбовано у два кольори так, що будь-які сусідні дуги різного кольору. Надалі 2-кольорову n -діаграму будемо позначати D^* , а множину всіх таких діаграм – \mathfrak{S}_n^* .

Означення 1.4 B – циклом (W – циклом) діаграми $D^*(\alpha)$ будемо називати послідовність хорд та чорних (білих) дуг, які утворюють гомеоморфний образ (орієнтовного) кола.

Приклад 1.1 Визначення чорних і білих циклів двокольорової діаграми проілюструємо на прикладі діаграми, зображеної на рис. 3 а).

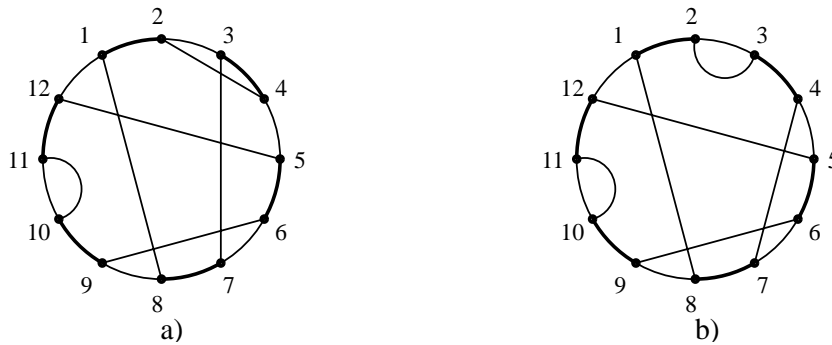


Рис. 3: а) 2 – кольорова N – діаграма; б) 2 – кольорова O – діаграма

Довільним чином задамо орієнтацію на колі діаграми $D^* = D^*(\alpha)$ (наприклад проти руху годинникової стрілки).

Випишемо всі чорні цикли діаграми:

$$B_1 = (2,1)[1,8](8,7)[7,3](3,4)[4,2]; \quad B_2 = (6,5)[5,12](12,11)[11,10](10,9)[9,6].$$

Тут (\cdot, \cdot) – дуги діаграми; $[\cdot, \cdot]$ – її хорди.

Аналогічно визначаються білі цикли діаграми:

$$W_1 = (3,2)[2,4](4,5)[5,12](12,1)[1,8](8,9)[9,6](6,7)[7,3]; \quad W_2 = (11,10)[10,11].$$

Означення 1.5 2 – кольорову n – діаграму, яка не містить (містить) хорд, що сполучають вершини з номерами однакової парності, будемо називати O – діаграмою (N – діаграмою), а множину таких діаграм позначати \mathfrak{S}_n^O (\mathfrak{S}_n^N).

Зауваження 1.1 Якщо проігнорувати кольори, то кожний чорний (білий) цикл 2 – кольорової O – діаграми (див. наприклад рис. 3 б)) співпадає з відповідним циклом звичайної діаграми.

Означення 1.6 Множину 2 – кольорових O – діаграм з одним чорним (або білим) циклом, побудованих на двокольоровому $2n$ – шаблоні (див. рис. 1 с)) будемо позначати $\mathfrak{S}_{1,n}$.

Означення 1.7 Дві діаграми D_1^* і D_2^* називають ізоморфними, якщо одну можна одержати з іншої в результаті повороту навколо спільного центру.

Означення 1.8 Дві діаграми D_1^* і D_2^* називають еквівалентними, якщо вони є або ізоморфними, або ж одну можна одержати з іншої в результаті перевероту (дзеркального відбиття) та подальшого повороту навколо спільного центру.

Більш повну інформацію можна знайти, наприклад в [3], [4], або ж попередній статті.

2. Число O -діаграми з одним чорним циклом.

Орієнтуємо коло 2-кольорової діаграми, наприклад, проти руху годинникової стрілки (рис. 4). Тоді кожену O -діаграму з одним чорним циклом можна подати у вигляді циклу довжини n . Пояснимо останнє

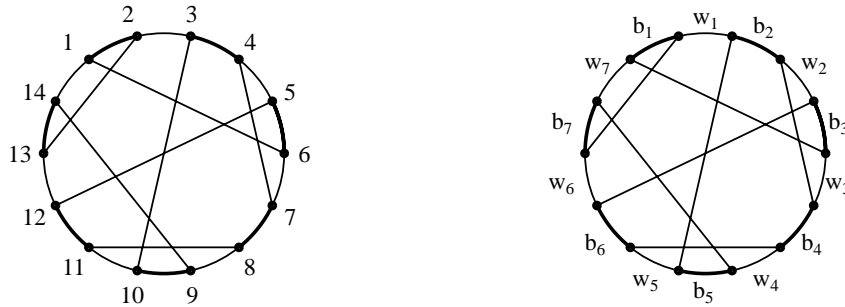


Рис. 4 Діаграма $D(b) \in \mathfrak{S}_{1,n}$, $b = (b_1, b_3, b_6, b_4, b_2, b_5, b_7)$

Під *обходом* b чорних (білих) дуг b_j (w_j) O -діаграми з одним чорним циклом (починаючи з вершини номера $2m_1$ деякої чорної дуги b_{m_1} будемо розуміти послідовність номерів чорних дуг $b = (b_{m_1}, b_{j_2}, \dots, b_{j_n})$, які зустрічаються при слідуванні за єдиним чорним її циклом (рис. 4).

Очевидно, що два обходи дуг одного кольору задають одну й ту ж діаграму, якщо послідовність дуг одного одержується з послідовності дуг іншого в результаті циклічної їх перестановки. Геометрично це означає, що обхід дуг діаграми був розпочатий з іншої дуги, але в тому ж напрямку.

Щоб уникнути такої неоднозначності, достатньо обхід єдиного чорного циклу починати з дуги b_1 . Оскільки всі діаграми будуються на основі шаблону, то (при фіксованій орієнтації) кожен такий цикл (обхід) однозначно визначає хорди діаграми, а отже й саму діаграму. І навпаки.

Зрозуміло, що для O -діаграм з одним чорним циклом перестановка $b \in$ циклом довжини n . Надалі множину циклів довжини

Не важко встановити, що число всіх O -діаграм з одним чорним (білим) циклом становить $(n-1)!$. Дійсно, кожену таку діаграму однозначно можна подати у вигляді циклу $(1, j_2, j_3, \dots, j_n)$, $j_k \neq j_{k'}$ при $k \neq k'$, де $j_k \in \{2, 3, \dots, n\}$ – номери дуг відповідного кольору. Таким чином

$$|\mathfrak{S}_{1,n}| = (n-1)! \tag{1}$$

3. Число неізоморфних O -діаграм з одним чорним (білим) циклом

З'ясуємо питання про те, коли дві O -діаграм з одним чорним (або білим) циклом є ізоморфними. Без втрати загальності міркування проведемо для O -діаграм з одним, саме чорним циклом.

Нехай $D(b)$, $b = (1, j_2, j_3, \dots, j_n)$ – O -діаграма з одним чорним циклом.

Розглянемо цикл $b' = (1 + k \bmod n, j_2 + k \bmod n, j_3 + k \bmod n, \dots, j_n + k \bmod n)$.

Очевидно, що діаграма $D(b')$ ізоморфна діаграмі $D(b)$. Більше того, не важко встановити справедливості наступного твердження

Твердження 3.1 Дві O -діаграми $D(b)$ і $D(b')$ з одним чорним циклом ізоморфні тоді і лише тоді, коли існує таке натуральне k , що справджується рівність $b' = b + k \bmod n = (1 + k \bmod n, j_2 + k \bmod n, \dots, j_n + k \bmod n)$

Нагадаємо, що два цикли $c_1, c_2 \in CS_n$ (довжини n), один з яких одержується в результаті циклічної перестановки елементів іншого не різняться.

Таким чином, задача про підрахунок числа d_n^* неізоморфних O -діаграм з одним чорним циклом звелась до задачі про підрахунок числа всіх нееквівалентних циклів з CS_n відносно дії групи Z_n .

В роботі [2] (див. також [1]) було встановлено, що число d_n^* орбіт дії групи Z_n на множині циклів з CS_n може бути обчислене за формулою:

$$d_n^* = |CS_n/nZ_n| = \frac{1}{n^2} \cdot \left(\sum_{i|n} \phi^2 \left(\frac{n}{i} \right) \cdot i! \cdot \left(\frac{n}{i} \right)^i \right). \quad (2)$$

Перепишемо праву частину (2) у вигляді, який найбільше відповідає введеним позначенням і потребам:

$$\begin{aligned} \frac{1}{n^2} \cdot \left(\sum_{i|n} \phi^2 \left(\frac{n}{i} \right) \cdot i! \cdot \left(\frac{n}{i} \right)^i \right) &= \frac{1}{n^2} \cdot \left(n! + \sum_{i|n, i \neq n} \phi^2 \left(\frac{n}{i} \right) \cdot i! \cdot \left(\frac{n}{i} \right)^i \right) = \\ &= \frac{1}{n^2} \cdot \left(n! + n \cdot \sum_{i|n, i \neq n} \phi \left(\frac{n}{i} \right) \cdot (i-1)! \cdot \left(\frac{n}{i} \right)^{i-1} \cdot \phi \left(\frac{n}{i} \right) \right) = \frac{1}{n} \cdot \left(|\mathfrak{S}_{1,n}| + \sum_{i|n, i \neq n} \phi \left(\frac{n}{i} \right) \cdot \text{Fix}_{\mathfrak{S}_{1,n}}(\xi^i) \right). \end{aligned} \quad (3)$$

Таким чином, справедливим є наступне твердження

Теорема 3.1 Число $d_{\mathfrak{S}_{1,n}}^*(C_{2n}^*)$ неізоморфних O -діаграм з одним чорним циклом може бути обчислене за допомогою співвідношень

$$d_n^* = d_{\mathfrak{S}_{1,n}}^*(C_{2n}^*) = \frac{1}{n} \cdot \left(|\mathfrak{S}_{1,n}| + \sum_{i|n, i \neq n} \phi \left(\frac{n}{i} \right) \cdot \text{Fix}_{\mathfrak{S}_{1,n}}(\xi^i) \right), \quad (4)$$

$$\text{Fix}_{\mathfrak{S}_{1,n}}(\xi^i) = \phi \left(\frac{n}{i} \right) \cdot (i-1)! \cdot \left(\frac{n}{i} \right)^{i-1}, \text{ де} \quad (5)$$

$\text{Fix}_{\mathfrak{S}_{1,n}}(\xi^i)$ – число діаграм з класу $\mathfrak{S}_{1,n}$, для яких перестановка ξ^i є автоморфізмом, тобто число діаграм з $\mathfrak{S}_{1,n}$, які самосуміщаються при повороті на кут $\omega_i = \frac{\pi}{n} \cdot 2i$ (за годинниковою стрілкою).

Зауваження 3.1 Міркування, за допомогою яких встановлена істинність останнього твердження, носять суто алгебраїчний характер та залишають за лаштунками всю геометричну картину. У зв'язку з цим наведемо комбінаторно-геометричне доведення цього твердження.

Очевидно, що для доведення теореми 3.1 достатньо показати справедливість співвідношення (5).

Лема 3.1 Нехай $n = i \cdot k, i \neq n$. Тоді число $\text{Fix}_{\mathfrak{S}_{1,n}}(\xi^i)$ O -діаграм з одним чорним циклом, які самосуміщаються при повороті на кут $\omega_i = \frac{\pi}{n} \cdot 2i$ становить

$$\text{Fix}_{\mathfrak{S}_{1,n}}(\xi^i) = \phi\left(\frac{n}{i}\right) \cdot (i-1)! \cdot \left(\frac{n}{i}\right)^{i-1}.$$

Доведення. 1) З'ясуємо спочатку питання про те, який вид мають O -діаграми, що задовольняють умові леми. Як було встановлено раніше, кожна таку діаграму можна ототожнити з циклом $b = (1, l_2, l_3, \dots, l_n)$, елементи якого – номери чорних дуг діаграми, що зустрічаються при обході єдиного чорного циклу (див. рис. 4). Отже, нехай $D = D(b)$ – O -діаграма з одним чорним циклом, яка самосуміщається при повороті на кут $\omega_i = \frac{\pi}{n} \cdot 2i$.

Як і раніше, арифметичні операції слід розуміти як такі, що виконуються за модулем n або ж $2n$. Основна **ідея** полягає у наступному:

якщо O -діаграма, яка само суміщається при повороті на кут $\frac{\pi}{n} \cdot 2i$, містить хорду $[1, 2l_2]$, то вона повинна містити й хорду $[1 + 2i, 2l_2 + 2i]$, в яку переходить перша. За тих самих причин діаграма містить й хорду $[1 + 4i, 2l_2 + 4i]$, в яку переходить друга і т.д. Таким чином:

якщо впорядкована пара $\{1, l_2\} \in b$, то циклу b повинна належати й впорядкована пара $\{1 + i, l_2 + i\}$, аналогічно $\{1 + 2i, l_2 + 2i\} \in b$...
 $\{1 + i(k-1), l_2 + i(k-1)\} \in b$;

якщо впорядкована пара $\{l_2, l_3\} \in b$, то циклу b повинна належати й впорядкована пара $\{l_2 + i, l_3 + i\}$, аналогічно $\{l_2 + 2i, l_3 + 2i\} \in b$...
 $\{l_2 + i(k-1), l_3 + i(k-1)\} \in b$.

Таким чином, множина чорних дуг діаграми з $\mathfrak{S}_{1,n}$, яка самосуміщається при повороті на кут $\frac{\pi}{n} \cdot 2i$, розбивається на k підмножин – "чорних" блоків $[b_j]$, в кожному з яких по i чорних дуг:

$$\begin{aligned} [b_1] &= \{1, l_2, l_3, \dots, l_i\}, \\ [b_2] &= \{1 + i, l_2 + i, l_3 + i, \dots, l_i + i\}, \\ [b_3] &= \{1 + 2i, l_2 + 2i, l_3 + 2i, \dots, l_i + 2i\}, \dots, \\ [b_k] &= \{1 + (k-1)i, l_2 + (k-1)i, l_3 + (k-1)i, \dots, l_i + (k-1)i\} \end{aligned}$$

Однак, поки незрозумілим є порядок входження блоків $[b_2], [b_3], \dots, [b_k]$ до циклу $b = ([b_1] \dots)$ такої діаграми.

2) Взаємне розташування цих блоків однозначно визначається вибором блоку, який слідує за $[b_1]$. Більше того, в деякому розумінні, обхід цих блоків здійснюється з деяким кроком h . Пояснимо останнє:

Припустимо, що $b = ([b_1][b_2]...) = (1, l_2, l_3, \dots, l_i; 1+i, l_2+i, l_3+i, \dots, l_i+i; \dots)$.

Оскільки циклу b належить впорядкована пара $\{l_i, 1+i\}$, то $\{l_i+i, 1+2i\} \in b$. Це означає, що після блоку $[b_2]$ слідує блок $[b_3]$ і т.д.. Тобто $b = ([b_1][b_2][b_3]...[b_k])$. Отже, обхід блоків здійснюється з кроком $h = 1$;

Припустимо, що

$$b = ([b_1][b_3]...) = (1, l_2, l_3, \dots, l_i; 1+2i, l_2+2i, l_3+2i, \dots, l_i+2i; \dots)$$

Оскільки циклу b належить впорядкована пара $\{l_i, 1+2i\}$, то $\{l_i+i, 1+3i\} \in b$, а отже і пара $\{l_i+2i, 1+4i\} \in b$. Це означає, що після блоку $[b_3]$ слідує блок $[b_5]$ і т.д.. Тобто, $b = ([b_1][b_3][b_5]...)$. Отже, обхід блоків здійснюється з кроком $h = 2$.

Таким чином, маємо рівно $(k-1)$ можливостей перегрупувати чорні блоки. Але не в кожному з цих випадків ми одержимо діаграму з одним чорним циклом. Так, наприклад, для парних k обхід з кроком $h = 2$ не є припустимим, оскільки відповідна діаграма має два чорні цикли $([b_1], [b_3], \dots, [b_{k-1}], [b_1])$ і $([b_2], [b_4], \dots, [b_k], [b_2])$.

Очевидно, що діаграма буде мати один чорний цикл лише у випадку коли обхід відповідних чорних блоків здійснюється з кроком h , взаємно простим з $k = \frac{n}{i}$. Тобто існує точно $\phi(k)$ суттєво різних видів таких діаграм.

3) Зафіксуємо припустимий крок h (взаємно простий з k), з яким здійснюється обхід k чорних блоків $[b_1], [b_2], \dots, [b_k]$.

Очевидно, що дугу b_{l_2} блоку $[b_1]$ можна вибрати $n-k$ способами, оскільки k чорних дуг з номерами $1, 1+i, \dots, 1+i(k-1)$ зайняли перші позиції в блоках $[b_1], [b_2], \dots, [b_k]$;

дугу b_{l_3} можна вибрати $n-2k$ способами, бо після вибору чорної дуги з номером l_2 дуги з номерами $l_2, l_2+i, \dots, l_2+i(k-2)$ зайняли другі позиції у відповідних блоках, і т.д.

Отже, при кожному припустимому кроці h можна утворити точно

$$(n-k) \cdot (n-2k) \cdot \dots \cdot (n-(i-1)k) = (ik-k) \cdot (ik-2k) \cdot \dots \cdot (ik-(i-1)k) =$$

$$= k(i-1) \cdot k(i-2) \cdot k(i-3) \cdot \dots \cdot k = k^{i-1} \cdot (i-1)! = \left(\frac{n}{i}\right)^{i-1} \cdot (i-1)!$$

різних O -діаграм з одним чорним циклом, які само суміщаються при повороті на кут $\omega = \frac{\pi}{n} \cdot 2i$.

З урахуванням пунктів 2) і 3) існує точно $\phi\left(\frac{n}{i}\right) \cdot \left(\frac{n}{i}\right)^{i-1} \cdot (i-1)!$ різних діаграм, що задовольняють умові леми. □

Зауваження 3.2. Є більш глибокі причини, що характеризують геометричний зміст і природу величин, що входять у формулу (5). Так, наприклад, величина $(i-1)!$ – це число O -діаграм (з i хордами) з одним чорним циклом.

Основна ідея полягає в справедливості наступних тверджень, які наведемо без доведення

1) Нехай $b^i = (1, q_2, q_3, \dots, q_i)$ – одна з $(i-1)!$ O -діаграм (з i хордами) з одним чорним циклом. Тоді, поклавши $[b_1] = \{1, q_2, q_3, \dots, q_i\}$, однозначно визначаються чорні блоки $[b_2], [b_3], \dots, [b_k]$. При цьому:

1.1) при довільному припустимому кроці h , з яким здійснюється обхід цих блоків, відповідна діаграма $b = ([b_1] \dots)$ задовольняє умові леми;

1.2) при довільній циклічній перестановці елементів однієї позиції, діаграма знову задовольняє умові леми;

Звідки випливає, що здійснивши всі можливі циклічні перестановки в кожній з $i-1$ позицій (перша позиція в кожному з блоків фіксована), ми одержимо точно $\left(\frac{n}{i}\right)^{i-1} = k^{i-1}$ різних діаграм з $\mathfrak{S}_{1,n}$, які задовольняють умовам леми.

2) Якщо ж $b^i = (1, q_2, q_3, \dots, q_i)$ не є i -діаграмою з одним чорним циклом, то при жодному h та ні при яких циклічних перестановках елементів однієї позиції, ми не одержимо діаграму, що задовольняє умовам леми.

4. Число нееквівалентних O -діаграм з одним чорним циклом

Застосовуючи лему Бернсайда (див. напр. [3]), не важко встановити, що число $d_n^{**} = d_{\mathfrak{S}_{1,n}}(D_{2n}^*)$ орбіт групи діедра D_{2n}^* , що діє на множині $\mathfrak{S}_{1,n}$ (число нееквівалентних O -діаграм з одним чорним циклом) визначається за допомогою співвідношень

$$d_n^{**} = \begin{cases} \frac{1}{2}(d_n^* + Z_1(n)), & n = 2m + 1 \\ \frac{1}{2}\left(d_n^* + \frac{1}{2} \cdot (Z_{2,1}(n) + Z_{2,2}(n))\right), & n = 2m, \end{cases} \quad \text{де} \quad (6)$$

$Z_1(n)$ – число діаграм з $\mathfrak{S}_{1,n}$, що є симетричними відносно фіксованої осі симетрії, яка проходить через середини протилежних чорної та білої дуг шаблону;

$Z_{2,1}(n)$ ($Z_{2,2}(n)$) – число діаграм з $\mathfrak{S}_{1,n}$, що є симетричними відносно фіксованої осі симетрії, що проходить через середини протилежних чорних (білих) дуг шаблону.

Лема 4.1. Справедливими є наступні рівності

$$\begin{aligned} Z_1(n) &= 2^m \cdot m!, & n &= 2m + 1 \\ Z_{2,1}(n) &= 2^{m-1} \cdot (m-1)!, & n &= 2m \\ Z_{2,2}(n) &= 2^{m-1} \cdot m!, & n &= 2m \end{aligned} \quad (7)$$

Доведення.

1) Розглянемо спочатку випадок, коли $n = 2m + 1$ – рис. 2 с). Кожну діаграму симетричну відносно певної осі симетрії, що проходить через середини протилежних білої і чорної дуг (наприклад відносно осі l_1) можна подати у вигляді циклу

$$(b'_{i_m}, b'_{i_{m-1}}, \dots, b'_{i_3}, b'_{i_2}, \boxed{b_1}, b_{i_2}, b_{i_3}, \dots, b_{i_{m-1}}, b_{i_m}),$$

де b'_{i_k} – дуга симетрична дузі b_{i_k} відносно осі l_1 , $i_k \neq 1$.

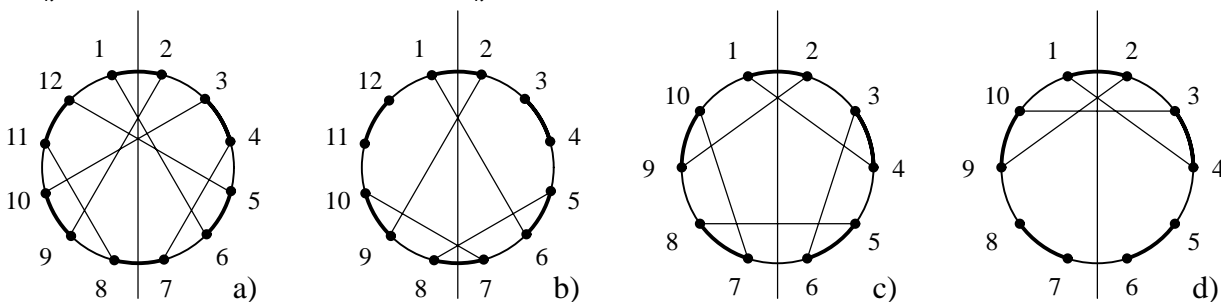


Рис. 5 O – діаграми симетричні відносно фіксованої осі симетрії

Дугу b_{i_2} можна обрати $(n - 1)$ способом, при цьому з подальшого розгляду виключається й дуга симетрична обраній; дугу b_{i_3} – $(n - 3)$ способами; ... ; дугу $b_{i_{m-2}}$ – 4 а дугу $b_{i_{m-1}}$ – 2 способами. Тому при $n = 2m + 1$ маємо

$$Z_1(n) = (n - 1)(n - 3) \dots 1 = 2(m)2(m - 1) \dots 2 \cdot 1 = 2^m \cdot m! \quad (8)$$

2) Розглянемо тепер випадок коли $n = 2m$ – рис. 5 a).

2.1) Кожну діаграму симетричну відносно певної осі симетрії, що проходить через середини протилежних чорних дуг (наприклад, відносно осі l_{b_1}) можна подати у вигляді циклу

$$(b'_{i_{m-1}}, \dots, b'_{i_3}, b'_{i_2}, \boxed{b_1}, b_{i_2}, b_{i_3}, \dots, b_{i_{m-1}}, \boxed{b_{m+1}}), \quad b'_{m+1} = b_{m+1},$$

де b'_{i_k} – дуга симетрична дузі b_{i_k} відносно осі l_{b_1} , $i_k \neq 1, i_k \neq m + 1$.

Тоді дугу b_{i_2} можна обрати $(n - 2)$ способами, при цьому з подальшого розгляду виключається й дуга симетрична обраній (щоб запобігти ситуації, зображеної на рис. 5 c)); дугу b_{i_3} – $(n - 4)$ способами; ...; дугу $b_{i_{m-2}}$ – 4 способами; дугу $b_{i_{m-1}}$ – 2 способами. Таким чином, при $n = 2m$ маємо

$$\begin{aligned} Z_{2,1}(n) &= (n - 2)(n - 4) \dots 2 = \\ &= (2m - 2)(2m - 4) \dots 2 = 2(m - 1)2(m - 2) \dots 2 \cdot 1 = 2^{m-1} \cdot (m - 1)! \end{aligned} \quad (9)$$

Та обставина, що чорна дуга b_{m+1} ніби "замикає" послідовність чорних дуг діаграми є суттєвою, бо при іншому її розташуванні відносно дуги b_1 виникає ситуація подібна до тієї, яка зображена на рис. 5 b), коли симетрична діаграма має більше одного чорного циклу.

2.2) Всі діаграми симетричні відносно осі, що проходить через середини протилежних білих дуг (наприклад, відносно l_{w1}) можна подати у вигляді одного з m можливих (для нашої ситуації) циклів виду

$$\begin{aligned} & (b'_{i_m}, \dots, b'_{i_4}, b'_{i_3}, \boxed{b_2}, \boxed{b_1}, b_{i_3}, b_{i_4}, \dots, b_{i_m}), \\ & (b'_{i_{m-1}}, \dots, b'_{i_4}, b'_{i_3}, \boxed{b_2}, b_{i_m}, b'_{i_m} \boxed{b_1}, b_{i_3}, b_{i_4}, \dots, b_{i_{m-1}}), \\ & \dots \\ & (\boxed{b_2}, b_{i_3}, b_{i_4}, \dots, b_{i_m}, b'_{i_m}, \dots, b'_{i_4}, b'_{i_3}, \boxed{b_1}), \end{aligned}$$

де b'_{i_k} – дуга симетрична дузі b_{i_k} відносно осі l_{w1} , $i_k \neq 1, i_k \neq m+1$.

Тоді, з урахуванням пункту 2.1, не важко зробити висновок, що при $n = 2m$

$$Z_{2,2}(n) = m \cdot 2^{m-1} \cdot (m-1)! \tag{10}$$

□

Теорема 4.1 Число нееквівалентних діаграм з класу $\mathfrak{S}_{1,n}$ можна обчислити за допомогою співвідношень

$$d_n^{**} = \begin{cases} \frac{1}{2}(d_n^* + 2^m \cdot m!), & n = 2m + 1 \\ \frac{1}{2}(d_n^* + 2^{m-2} \cdot (m+1) \cdot (m-1)!), & n = 2m. \end{cases} \tag{11}$$

Доведення є наслідком Лемми 4.1 та співвідношень (6).

Нижче наведено неізоморфні діаграми з класу $\mathfrak{S}_{1,n}$ для початкових $n = 4; 5; 6$.

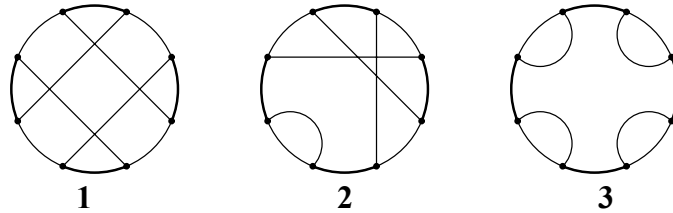


Рис. 6 Всі неізоморфні діаграми з класу $\mathfrak{S}_{1,4}$

Наведені діаграми є нееквівалентними. Тому $d_4^{**} = 3$.

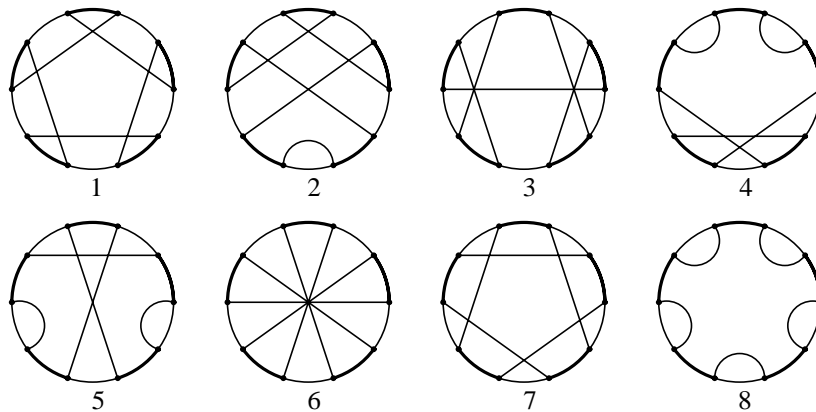


Рис. 7 Всі неізоморфні діаграми з класу $\mathfrak{S}_{1,5}$

Наведені діаграми є також і нееквівалентними. Тому $d_5^{**} = 8$.

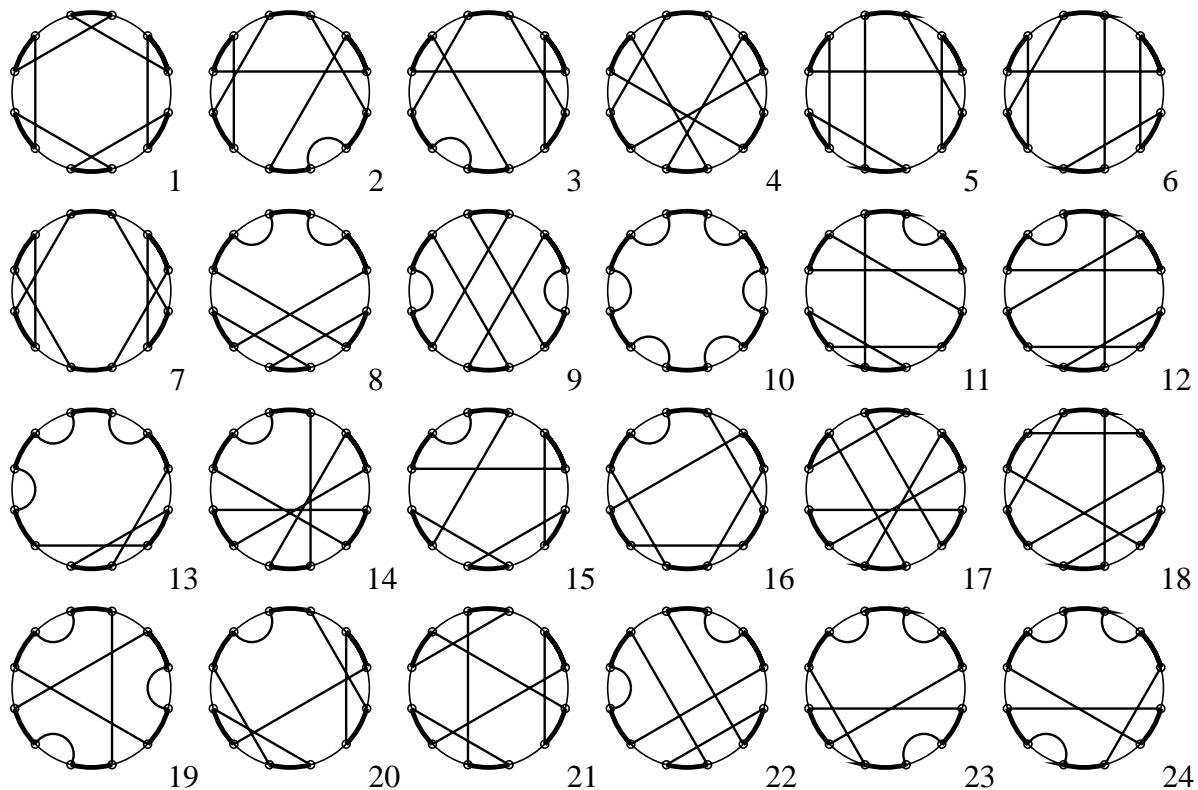


Рис. 8 Всі неізоморфні діаграми з класу $\mathfrak{S}_{1,6}$.

Оскільки еквівалентними є наступні пари діаграм: 2 і 3; 5 і 6; 11 і 12; 23 і 24, то $d_6^{**} = 20$.

На думку авторів дослідження в цьому напрямку можуть бути успішно продовжені за рахунок розв'язування задач на підрахунок числа нееквівалентних O -діаграм з фіксованими числами циклів кожного кольору.

Одержані в роботі результати можуть бути ефективно використані в тих галузях науки, де виникають інваріанти, схожі до кола з відміченими точками. Відомо, що вказані об'єкти виникають в біології. З деякими застосуваннями двокольорових діаграм в топології можна ознайомитись в роботі [4].

Література

1. *J.E.A. Steggall* On the numbers of patterns which can be derived from certain elements // *Messenger Math.*, 37:56–61, 1907.
2. *Vella A.* Pattern avoidance in permutations: linear and cyclic orders // *The electronic journal of combinatorics* №10, 2003.
3. *Калужнин Л.А., Суцанский В.И.* Преобразования и перестановки // М.: Наука. 1979.
4. *Кадубовський О.* Про один клас хордових діаграм максимального роду // *Вісник Київського університету Серія: фізико-математичні науки*, Вип. 1, 2006, с. 17–27.