

УДК 519.115.1: 519.175.3

Манойло Т.О., Сіра М.І., Кадубовський О.А.

¹Студентка 5 курсу групи 5М-1 фізико-математичного факультету СДПУ,

²Студентка 5 курсу групи 5М-1 фізико-математичного факультету СДПУ,

³Доцент кафедри геометрії та методики викладання математики СДПУ

Про число неізоморфних та нееквівалентних хордових діаграм

Встановлено формули для підрахунку числа як неізоморфних (з точністю до повороту), так і нееквівалентних (відносно дії дієдральної групи) хордових діаграм з n хордами. Для початкових n наведено неізоморфні n – діаграми.

Ключові слова: хордова діаграма, циклічна група, група дієдра, лема Бернсайда.

Вступ. У 1998 році незалежно один від одного в роботах [2], [3] і [4] авторами було встановлено формули для підрахунку числа неізоморфних (з точністю до повороту) хордових n – діаграм. В роботі [2] для підрахунку вказаної величини було використане поняття лінеаризації, в [4] – вінцевий добуток, в [3] – так, званні, підняття. Зокрема, в роботах [2] і [4] було встановлено формули для підрахунку й числа нееквівалентних (відносно дії дієдральної групи) хордових n – діаграм.

В данній роботі для одержання вказаних формул використано інший підхід, який реалізується комбінаторно-геометричними методами, та базується на ідеї, запропонованої в роботі [5], присвяченій алгоритму побудови неізоморфних n – діаграм в залежності від n .

1. Основні поняття та визначення

Означення 1.1 Нехай на площині задано коло і $2n$ точок на ньому, які є вершинами правильного $2n$ – кутника. Розіб'ємо ці точки на n пар і з'єднаємо кожну таку пару хордою. Отриману конструкцію (коло з n хордами на ньому) називають хордовою діаграмою з n хордами, або ж n – діаграмою (рис. 1 *a, b*)).

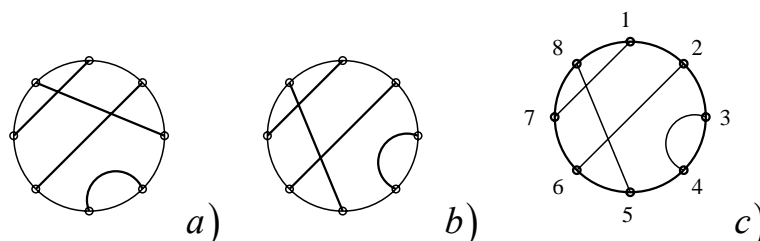


Рис. 1. *a), b)* Неізоморфні але еквівалентні 4 – діаграми; *c)* $2n$ – шаблон

Нехай D – хордова діаграма з $2n$ вершинами. Занумеруємо останні числами від 1 до $2n$ рухаючись за годинниковою стрілкою від деякої фіксованої точки на колі (рис. 1 *c*)).

Побудуємо перестановку α (інволюцію)

$$\alpha = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & a_2 & b_2 & \dots & a_n & b_n \\ b_1 & a_1 & b_2 & a_2 & \dots & b_n & a_n \end{pmatrix} = (a_1, b_1) \circ (a_2, b_2) \circ \dots \circ (a_n, b_n),$$

де a_i і b_i – номери вершин діаграми, які сполучено хордою. Надалі будемо вважати, що всі n –діаграми будуються на основі $2n$ –шаблону – рис. 1 с). Тоді кожна діаграма $D = D(\alpha)$ однозначно визначає перестановку α і навпаки.

Означення 1.2 Перестановку α , що визначає хордову діаграму $D(\alpha)$ на шаблоні, будемо називати склейкою, а множину таких склейок позначати B_{2n} .

Зауваження 1.1 В подальшому діаграму $D(\alpha)$ та її склейку будемо ототожнювати. А множину n –діаграм позначати \mathfrak{S}_n .

Добре відомо [1], що число n –діаграм визначається величиною

$$d_n = (2n-1)!! = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-3) \cdot (2n-1) = \frac{(2n)!}{n! \cdot 2^n} \quad (1)$$

Означення 1.3 Дві діаграми $D_1(\alpha)$ і $D_2(\alpha')$ називають ізоморфними, якщо одну можна одержати з іншої в результаті повороту навколо спільного центру.

Означення 1.4 Діаграми $D_1(\alpha)$ і $D_2(\alpha')$ називають еквівалентними, якщо вони є або ізоморфними, або ж одну можна одержати з іншої в результаті перевертання (дзеркального відбиття) та повороту навколо спільного центру.

Означення 1.5 Циклічну групу порядку $2n$, породжену перестановкою $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & 2n-1 & 2n \\ 2 & 3 & \dots & 2n & 1 \end{pmatrix}$, будемо позначати $C_{2n} = \{\sigma^k \mid k = 1, 2, \dots, 2n\}$.

Не важко бачити, що всі симетрії $2n$ –шаблону (рис. 1 с)) породжуються поворотом σ (на кут $\varphi = \frac{2\pi}{n}$) і осьовою симетрією (дзеркальним відбиттям) b

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & 2n-1 & 2n \\ 2 & 3 & \dots & 2n & 1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n+1 & \dots & 2n-1 & 2n \\ 1 & 2n & \dots & n+1 & \dots & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Таким чином, всі симетрії $2n$ –шаблону складаються з $4n$ елементів $D_{4n} = \{\sigma^i, \tau_i = b \circ \sigma^i \mid i = 1, \dots, 2n\}$ і утворюють групу діедра порядку $4n$.

Більш повну інформацію можна знайти, наприклад в [2–4], [7].

2. Число неізоморфних n –діаграм

Як впливає з [3], число d_n^* неізоморфних n –діаграм дорівнює числу $d_{\mathfrak{S}_n}(C_{2n})$ орбіт дії групи C_{2n} на множині хордових n –діаграм, а якщо точніше – на множені B_{2n} відповідних склейок. Тоді, за лемою Бернсайда має місце рівність

$$d_n^* = d_{\mathfrak{S}_n}(C_{2n}) = \frac{1}{2n} \cdot \left((2n-1)!! + \sum_{q \mid 2n, q \neq 2n} \phi\left(\frac{2n}{q}\right) \cdot \text{Fix}_{\mathfrak{S}_n}(\sigma^q) \right), \quad \text{де} \quad (2)$$

$\text{Fix}_{\mathfrak{S}_n}(\sigma^q)$ – число n –діаграм, нерухомих відносно дії групового елемента σ^q , тобто число n –діаграм, які само суміщаються при повороті на кут $\omega_q = \frac{2\pi}{2n} \cdot q$ за годинниковою стрілкою; $\phi(z)$ – функція Ейлера.

Теорема 2.1 Величина $\text{Fix}_{\mathfrak{S}_n}(\sigma^q)$ може бути обчислена за допомогою співвідношення

$$\text{Fix}_{\mathfrak{S}_n}(\sigma^q) = \begin{cases} (q-1)!! \cdot \left(\frac{2n}{q}\right)^{q/2}, & \frac{2n}{q} = 2l+1 \\ \sum_{r=0}^{\lfloor q/2 \rfloor} C_q^{2r} \cdot (2r-1)!! \cdot \left(\frac{2n}{q}\right)^r, & \frac{2n}{q} = 2l \end{cases} \quad (3)$$

Доведення. Позначимо через $T(2n, p) = \text{Fix}_{\mathfrak{S}_n}(\sigma^q)$, де $pq = 2n$ та встановимо рекурентне співвідношення для величини $T(2n, p)$ у кожному з двох випадків, коли p є непарним або ж парним відповідно.

Занумеруємо вершини n -діаграми числами від 1 до $2n$ за годинниковою стрілкою. Тобто, розглянемо $2n$ -шаблон. З урахуванням нумерації вершин діаграми, визначимо довжини хорд з початком і кінцем у вершинах i, j відповідно, як $(j-i) \bmod 2n$ ($i < j$). Зафіксуємо далі множину вершин з номерами $q, 2q, \dots, pq$ (де $pq = 2n$), виділивши їх на шаблоні серед інших точок.

Отже, розглянемо хорди діаграми з початком у відмічених вершинах $q, 2q, \dots, pq$. Якщо хордова діаграма є нерухомою відносно дії групового елемента σ^q (повороту на кут $\omega_q = \frac{2\pi}{2n} \cdot q$), то довжини хорд з початком у відмічених точках повинні бути рівними.

Пояснимо: якщо діаграма, нерухома відносно дії групового елемента σ^q , містить хорду $[q, l]$ (довжини $l-q$), то обов'язково повинна бути і хорда $[2q, l+q]$ в яку вона переходить при повороті на кут $\omega_q = \frac{2\pi}{2n} \cdot q$. Остання повинна переходити в хорду $[3q, l+2q]$ і так далі.

1) Якщо p непарне, то з рівності $2n = pq$ випливає, що q є парним. Очевидно, що в цьому випадку не може виникнути ситуації, коли хорди, з початком у відмічених точках $q, 2q, 3q, \dots, pq$ мають кінцями точки з цієї множини. Бо p є непарним і тому для однієї з вказаних точок не буде пари. Таким чином, для довжин хорд з початком у відмічених точках, існують лише $2n - p$ можливостей. Причому, від вибору першої з відмічених точок це число не залежить, оскільки задання першої хорди однозначно визначає решту $(p-1)$ хорд. Якщо проігнорувати одну з $2n - p$ можливих сукупностей хорд, то задача зведеться до знаходження величини $T(2n - 2p, p)$ (після "видалення" p хорд видалиться $2p$ точок) – рис. 2 а).

Таким чином, маємо рекурентне співвідношення

$$T(2n, p) = (2n - p) \cdot T(2n - 2p, p). \quad (4)$$

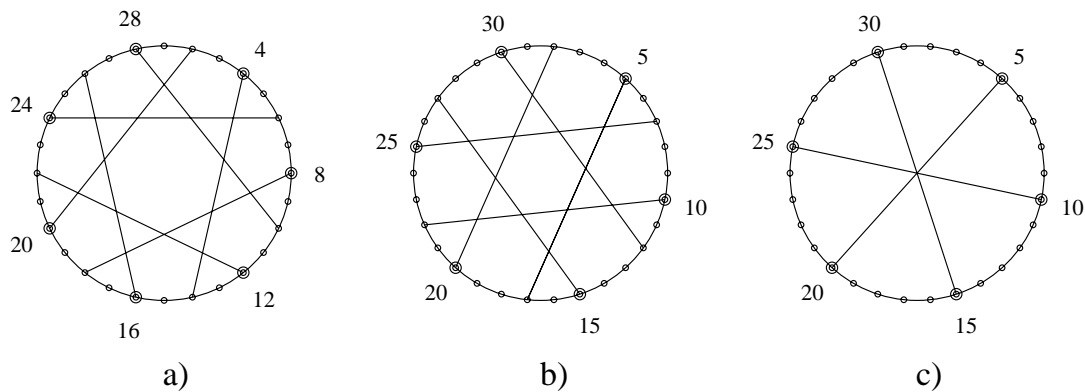


Рис. 2. Підмножини хорд діаграми, що є нерухомою відносно повороту на кут $\frac{2\pi}{2n} \cdot q$ за годинниковою стрілкою

Встановимо граничні умови для рекурентного співвідношення (4). А саме, покажемо, що $T(0, p) = 1$. Для цього достатньо подати величину $T(2p, p)$ у наступному вигляді

$$T(2p, p) = (2p - p) \cdot T(0, p) = p \cdot T(0, p). \quad (4.1)$$

Очевидно, що з умови $2n = qp = 2p$ слідує, що $q = 2$. І задача зводиться до підрахунку числа всіх p -діаграм, нерухомих відносно дії елементу σ^2 (повороту на кут $\omega_2 = \frac{2\pi}{2p} \cdot 2$). Але ж всі такі діаграми вичерпуються склейками виду

$$\alpha = (1, m)(3, m + 2)(5, m + 4)(7, m + 6) \dots (2n - 1, m + 2(p - 1)).$$

Оскільки $m \in \{2, 4, \dots, 2p\}$, то існує лише p таких p -діаграм. Звідки й випливає, що $T(2p, p) = p$. Як наслідок з (4.1), маємо справедливості граничної умови

$$T(0, p) = 1. \quad (4.2)$$

2) Нехай тепер p є парним. Тоді q може бути як парним так і непарним числом. В цьому випадку можливі дві ситуації:

2.1) коли хорди, з початком у відмічених точках $q, 2q, 3q, \dots, pq$ не мають кінцями точки з цієї множини. Аналогічно попередньому випадку маємо рівно $(2n - p) \cdot T(2n - 2p, p)$ таких можливостей – рис. 2 b);

2.2) коли хорди, з початком у відмічених точках $q, 2q, 3q, \dots, pq$ мають кінцями точки з цієї множини. Існує єдине можливе таке розбиття на пари, а саме – рис. 2 c):

$$(q; (p/2 + 1)q)(2q; (p/2 + 1)q + q)(3q; (p/2 + 1)q + 2q) \dots ((p/2)q; pq).$$

Якщо проігнорувати (видалити) ці хорди, то задача зведеться до знаходження величини $T(2n - p, p)$, бо після «видалення» $p/2$ хорд видалиться рівно p вершин. Таким чином, у випадку парного p маємо рівність

$$T(2n, p) = (2n - p) \cdot T(2n - 2p, p) + 1 \cdot T(2n - p, p). \quad (5)$$

Встановимо граничні умови для рекурентного співвідношення (5). А саме, покажемо справедливості рівностей $T(0, p) = T(p, p) = 1$.

Для цього достатньо подати величину $T(2p, p)$ у вигляді

$$T(2p, p) = (2p - p) \cdot T(0, p) + T(p, p) = p \cdot T(0, p) + T(p, p). \quad (5.2)$$

Очевидно, що з умови $2n = qp = 2p$ слідує, що $q = 2$. І задача зводиться до підрахунку числа всіх p -діаграм, нерухомих відносно дії елементу σ^2 (повороту на кут $\omega_2 = \frac{2\pi}{2p} \cdot 2$). Але ж склейки всіх таких діаграм мають вид

$$\alpha = (1, m)(3, m+2)(5, m+4)(7, m+6)\dots(2n-1, m+2(p-1)), \quad \text{або ж}$$

$$\alpha = (1, p+1)(2, p+2)(3, p+3)(4, p+4)(5, p+5)\dots(p-1, 2p-1)(p, 2p).$$

Звідки й маємо, що $T(2p, p) = p + 1$. Тому з (5.2) маємо

$$T(0, p) = 1 = T(p, p). \quad (5.3)$$

На рис. 2 а) зображено всі фіксовані вершини з номерами $q, 2q, 3q, \dots, pq$ та обов'язкову підмножину хорд діаграми, що є нерухомою під дією елементу σ^q (відносно повороту на кут $\omega_q = \frac{2\pi}{2n} \cdot q$) для випадку $2n = 28$, $q = 4$, $p = 7$;

на рис. 2 б) зображено обов'язкову підмножину хорд діаграми, нерухомої під дією елементу σ^q для випадку $2n = 30$, $q = 5$, $p = 6$ та немає хорд, що сполучають вершини з номерами $q, 2q, 3q, \dots, pq$;

на рис. 2 с) зображено єдиний можливий випадок для хорд, що сполучають пари точок з номерами $q, 2q, 3q, \dots, pq$ ($2n = 30$, $q = 5$, $p = 6$).

Таким чином, для величини $T(2n, p)$, $pq = 2n$ мають місце рівності

$$T(2n, p) = \begin{cases} (2n - p) \cdot T(2n - 2p, p), & T(0, p) = 1, & p = 2m - 1 \\ (2n - p) \cdot T(2n - 2p, p) + T(2n - p, p), & T(p, p) = T(0, p) = 1, & p = 2m \end{cases} \quad (6)$$

По суті, нам залишилось знайти вираз для $T(2n, p)$ в явному виді для обох випадків (непарного і парного p).

2.1) Встановимо формулу для рекурентного співвідношення (6) для випадку непарного p з граничною умовою $T(0, p) = 1$. Для цього достатньо кількість разів застосувати це співвідношення для знов отриманих величин

$$\begin{aligned} T(2n, p) &= (2n - p) \cdot T(2n - 2p, p) = (2n - p) \cdot ((2n - 3p) \cdot T(2n - 4p, p)) = \\ &= (2n - p) \cdot (2n - 3p) \cdot ((2n - 5p) \cdot T(2n - 6p, p)) = \\ &= (2n - p) \cdot (2n - 3p) \cdot (2n - 5p) \cdot \dots \cdot (3p \cdot T(2p, p)) = \\ &= (2n - p) \cdot (2n - 3p) \cdot \dots \cdot 3p \cdot p \cdot T(0, p) = (2n - p) \cdot (2n - 3p) \cdot (2n - 5p) \cdot \dots \cdot 3p \cdot p = \\ &= (pq - p) \cdot (pq - 3p) \cdot (pq - 5p) \cdot \dots \cdot 3p \cdot p = p(q-1) \cdot p(q-3) \cdot p(q-5) \cdot \dots \cdot 3p \cdot 1p = \\ &= p^{q/2} \cdot (q-1)!! \end{aligned}$$

Таким чином, для непарних p маємо формулу

$$T(2n, p) = p^{q/2} \cdot (q-1)!!, \quad 2n = pq. \quad (7)$$

Встановимо тепер формулу в явному вигляді для рекурентного співвідношення (6) у випадку парного p з граничними умовами

$$T(p, p) = T(0, p) = 1.$$

Випишемо декілька членів, заданих цим рекурентним співвідношенням, здійснюючи викладки індукцією за q :

$$2n = qp = 1p = 2p = 3p = 4p = 5p = \dots$$

$$0) \quad q = 0: \quad T(2n, p) = T(0, p) = 1 = 1 + 0 \cdot p.$$

$$1) \quad q = 1: \quad T(2n, p) = T(p, p) = 1 = 1 + 0 \cdot p.$$

$$2) \quad q = 2: \quad T(2n, p) = T(2p, p) = (2p - p)T(0, p) + T(p, p) = 1p + 1 = \\ = 1 + 1p^1.$$

$$3) \quad q = 3: \quad T(2n, p) = T(3p, p) = (3p - p)T(p, p) + T(2p, p) = 2p \cdot 1 + p + 1 = \\ = 1 + 3p^1.$$

$$4) \quad q = 4: \quad T(2n, p) = T(4p, p) = (4p - p)T(2p, p) + T(3p, p) = \\ = 3p \cdot (1 + p) + (1 + 3p) = 1 + 6p^1 + 3p^2 = \\ = 1 + (1 + 2 + 3)p^1 + 3p^2.$$

$$5) \quad q = 5: \quad T(2n, p) = T(5p, p) = (5p - p)T(3p, p) + T(4p, p) = \\ = 4p \cdot (1 + 3p) + (1 + 6p^1 + 3p^2) = 1 + 10p^1 + 15p^2 = \\ = 1 + (1 + 2 + 3 + 4)p^1 + 15p^2$$

$$6) \quad q = 6: \quad T(2n, p) = T(6p, p) = (6p - p)T(4p, p) + T(5p, p) = \\ = 5p \cdot (1 + 6p^1 + 3p^2) + (1 + 10p^1 + 15p^2) = 1 + 15p^1 + 45p^2 + 15p^3 = \\ = 1 + (1 + 2 + 3 + 4 + 5)p^1 + 45p^2 + 15p^3.$$

$$7) \quad q = 7: \quad T(2n, p) = T(7p, p) = (7p - p)T(5p, p) + T(6p, p) = \\ = 6p \cdot (1 + 10p^1 + 15p^2) + (1 + 15p^1 + 45p^2 + 15p^3) = 1 + 21p^1 + 105p^2 + 105p^3 = \\ = 1 + (1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6)p^1 + 105p^2 + 105p^3.$$

Не важко бачити, що в кожному з розглянутих випадків результатом є многочлен

$$M_q(p) = \sum_{j=0}^{[q/2]} a(q, j) \cdot p^j \text{ степеня } [q/2], \text{ де } 2n = pq, \quad q = 1, 2, \dots$$

Причому

$$M_q(p) = (2n - p)M_{q-2}(p) + M_{q-1}(p) = p(q - 1)M_{q-2}(p) + M_{q-1}(p).$$

Очевидно, що останнє рекурентне співвідношення задає таке саме рекурентне співвідношення для коефіцієнтів $a(q, j) = a_j(q)$ многочленів

$$M_{q+2}(p), M_{q+1}(p), M_q(p).$$

А саме, коефіцієнти цих многочленів пов'язані співвідношенням

$$a(q + 2, j) = (q + 1) \cdot a(q, j - 1) + a(q + 1, j). \quad (8)$$

$2n = q \cdot p$	$a_0(q)$	$a_1(q)$	$a_2(q)$	$a_3(q)$	$a_4(q)$...	$a_{[q/2]-1}(q)$	$a_{[q/2]}(q)$
$q = 0$	1	0	0	0	0	0	0	0
$q = 1$	1	0	0	0	0	0	0	0
$q = 2$	1	1	0	0	0	0	0	0
$q = 3$	1	3	0	0	0	0	0	0
$q = 4$	1	6	3	0	0	0	0	0
$q = 5$	1	10	15	0	0	0	0	0
$q = 6$	1	15	45	15	0	0	0	0
$q = 7$	1	21	105	105	0	0	0	0
$q = 8$	1	28	210	420	105	0	0	0

Таким чином, поставлену задачу можна звести до задачі про знаходження формули для обчислення коефіцієнтів $a(q, j) = a_j(q)$ многочлена $M_q(p)$ при фіксованому q .

Індукцією по q доведемо справедливість формули

$$a(q, j) = C_q^{2j} \cdot (2j - 1)!! \quad \forall q, \quad \forall j = 0, \dots, [q/2]. \quad (9)$$

База індукції:

$$a(1, 0) = 1, \quad a(q, 0) = 1 = C_q^0 \cdot (2 \cdot 0 - 1)!! \quad \forall q.$$

$$a(q, 1) = (1 + 2 + \dots + (q - 1)) = \frac{q(q - 1)}{2} = C_q^{2 \cdot 1} \cdot (2 \cdot 1 - 1)!! \quad \forall q.$$

Припустимо що формула є вірною для коефіцієнтів $a(q, j - 1)$, $a(q + 1, j)$ і доведемо, що

$$a(q + 2, j) = C_{q+2}^{2j} \cdot (2j - 1)!! \quad (9.1)$$

Для цього, в силу справедливості рекурентного співвідношення (6) для коефіцієнтів, достатньо перевірити справедливість рівності

$$C_{q+2}^{2j} \cdot (2j - 1)!! = (q + 1) \cdot C_q^{2(j-1)} \cdot (2(j-1) - 1)!! + C_{q+1}^{2j} \cdot (2j - 1)!! \quad (9.2)$$

Розділивши на $(2j - 3)!!$, маємо

$$\begin{aligned} \frac{(q + 2)! \cdot (2j - 1)}{(2j)!(q - 2j + 2)!} &= \frac{(q + 1) \cdot q!}{(2j - 2)!(q - 2j + 2)!} + \frac{(q + 1)! \cdot (2j - 1)}{(2j)!(q - 2j + 1)!} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \frac{(q + 2)}{(2j)!} \cdot (2j - 1) &= \frac{1}{(2j - 2)!} + \frac{(q - 2j + 2)}{(2j)!} \cdot (2j - 1) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (q + 2) \cdot (2j - 1) &= 2j \cdot (2j - 1) + (2j - 1) \cdot (q - 2j + 2) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (q + 2) &= 2j + (q - 2j + 2) \Leftrightarrow \quad q = q. \end{aligned}$$

Отже, для парних p справджується рівність

$$a(q, j) = C_q^{2j} \cdot (2j - 1)!! \quad \forall j = 0, \dots, [q/2].$$

Тому для парних p маємо остаточну формулу

$$T(2n, p) = \sum_{j=0}^{[q/2]} C_q^{2j} \cdot (2i - 1)!! \cdot p^j, \quad 2n = pq. \quad (10)$$

□

3. Число нееквівалентних хордових n – діаграм

За лемою Бернсайда (див. напр. [7]), не важко встановити, що число $d_n^{**} = d_{\mathfrak{S}_n}(D_{4n})$ орбіт групи дієдра D_{4n} , що діє на множині \mathfrak{S}_n (число нееквівалентних n – діаграм) визначається за допомогою співвідношення

$$d_n^{**} = \frac{1}{2} \left(d_n^* + \frac{1}{2} \cdot (Z_1(n) + Z_2(n)) \right), \text{ де} \quad (11)$$

$Z_1(n)$ – число діаграм з \mathfrak{S}_n , що є симетричними відносно фіксованої осі симетрії, яка проходить через (діаметрально) протилежні вершини шаблону; $Z_2(n)$ – число діаграм з \mathfrak{S}_n , що є симетричними відносно фіксованої осі симетрії, що проходить через середини протилежних дуг шаблону – рис. 3.

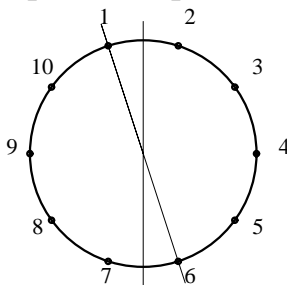


Рис. 3 Вісі симетрії $2n$ – шаблону ($n = 5$)

Твердження 3.1 Для довільного натурального $n \geq 2$ справджується рівність

$$Z_1(n) = Z_2(n-1). \quad (12)$$

Лема 3.1 Число хордових n – діаграм, симетричних відносно довільної осі симетрії, що проходить через середини протилежних дуг шаблону можна обчислити за допомогою співвідношень

$$Z_2(n) = \begin{cases} n! \cdot \sum_{i=0}^m \frac{1}{(2i)! \cdot (m-i)!}, & n = 2m \\ n! \cdot \sum_{i=0}^m \frac{1}{(2i+1)! \cdot (m-i)!}, & n = 2m+1 \end{cases} \quad (13)$$

Доведення. Нехай $D(\alpha)$ – діаграма, що є симетричною відносно зазначеної осі симетрії шаблону. Нехай далі a_i ($i=1, \dots, n$) – номери вершин шаблону, що лежать по один бік від осі симетрії, а b_i – номери симетричних до них вершин. Очевидно, що можливими є ситуації, коли хорда є симетричною відносно осі. Згідно введених позначень, всі такі хорди мають вид $[a_i, b_i]$. Для зручності будемо називати їх *нерухомими* або ж *самосиметричними*.

Зауважимо, що при парних $n = 2m$ число нерухомих хорд може бути лише парним, а при непарних $n = 2m+1$ – лише непарним.

Розглянемо випадок, коли $n = 2m$. Існує лише $m+1$ суттєво різних випадків, коли діаграма містить точно $2i$ ($i=0, \dots, m$) нерухомих хорд. Ті, що залишилися $2(m-i)$ хорд, не можуть бути нерухомими і утворюють $(m-i)$ пар взаємно симетричних хорд.

Утворення пар взаємно симетричних хорд слід розуміти керуючись правилом: кожному вибору 2 точок з номерами a_i, a_j однозначно ставиться у відповідність пара симетричних точок з номерами b_i, b_j . Тоді можна одержати дві пари взаємно симетричних хорд $(a_i, a_j), (b_i, b_j)$ та $(a_i, b_j), (a_j, b_i)$.

Число способів утворення $(m - i)$ таких пар становить

$$\frac{C_{2(m-i)}^2 \cdot 2 \cdot C_{2(m-i-1)}^2 \cdot 2 \cdot \dots \cdot C_4^2 \cdot 2 \cdot C_2^2 \cdot 2}{(m-i)!} = \frac{(2(m-i))!}{(m-i)!}.$$

Тому при $n = 2m$ маємо

$$Z_2(n) = \sum_{i=0}^m C_n^{2i} \cdot \frac{(2(m-i))!}{(m-i)!} = \sum_{i=0}^m \frac{n!}{(2i)! \cdot (n-2i)!} \cdot \frac{(2(m-i))!}{(m-i)!} = \sum_{i=0}^m \frac{n!}{(2i)! \cdot (m-i)!}.$$

У випадку $n = 2m + 1$ можливі лише $m + 1$ суттєво різних випадків. А саме, коли діаграма містить точно $2i + 1$ ($i = 0, \dots, m$) нерухомих хорд. Ті, що залишилися $2(m - i)$ хорди не можуть бути нерухомими й утворюють $(m - i)$ пар взаємно симетричних хорд. Провівши міркування, аналогічні випадку $n = 2m$, маємо наступний результат

$$Z_2(n) = \sum_{i=0}^m C_n^{2i+1} \cdot \frac{(2(m-i))!}{(m-i)!} = \sum_{i=0}^m \frac{n!}{(2i+1)! \cdot (m-i)!}. \quad \square$$

Твердження 3.2 Для довільного натурального $n \geq 2$ має місце рівність

$$Z_2(n) = \sum_{j=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \frac{n!}{j! \cdot (n-2j)!}. \quad (14)$$

Доведення зводиться до звичайної перевірки тотожностей

$$\sum_{i=0}^m \frac{1}{(2i)! \cdot (m-i)!} \equiv \sum_{j=0}^m \frac{1}{j! \cdot (2m-2j)!} \quad \text{та} \quad \sum_{i=0}^m \frac{1}{(2i+1)! \cdot (m-i)!} \equiv \sum_{j=0}^m \frac{1}{j! \cdot (2m-(2j-1))!}.$$

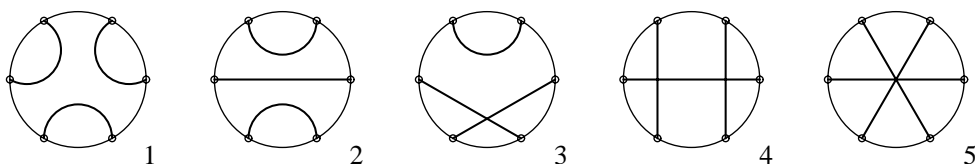
Теорема 3.2 Число нееквівалентних (відносно дії дієдральної групи) хордових n -діаграм може бути обчислене за допомогою наступних співвідношень

$$d_n^{**} = \frac{1}{2} \left(d_n^* + \frac{1}{2} \cdot (Z_2(n-1) + Z_2(n)) \right), \quad Z_2(n) = \sum_{j=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \frac{n!}{j! \cdot (n-2j)!}, \quad \text{де} \quad (15)$$

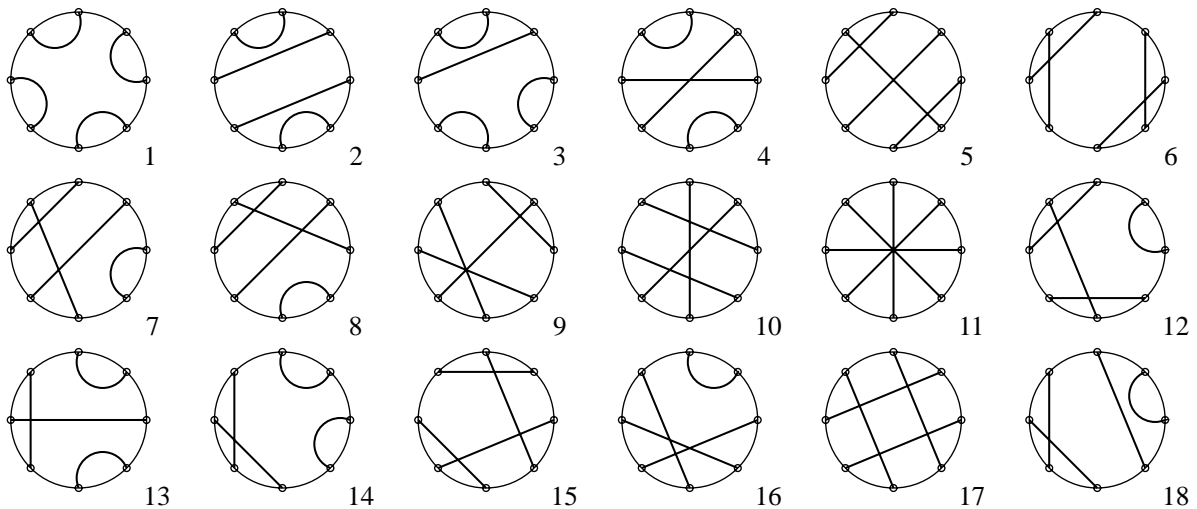
величина d_n^* визначається за співвідношенням (2).

Справедливість теореми є наслідком Тверджень 3.1 і 3.2 та співвідношень (2), (3).

Нижче наведені всі неізоморфні 3- і 4-діаграми відповідно.



Очевидно, що всі неізоморфні 3–діаграми нееквівалентні і під дією групи діедра. Тому $d_3^{**} = 5$.



За виключенням діаграм 7 та 8 неізоморфні 4–діаграми є нееквівалентними й під дією групи діедра. Тому $d_4^{**} = 17$.

Значення величини d_n^{**} при $n = 5$ вперше було встановлено у роботі [6], в якій наведено всі 79 нееквівалентних 5–діаграм.

Таким чином, запропонований в роботі підхід дозволив встановити формули для підрахунку числа як неізоморфних, так і нееквівалентних хордових n –діаграм.

З деякими застосуваннями хордових діаграм можна ознайомитись в [2], [6].

Література

1. *Riordan J.* The distribution of crossings of chords joining pairs of $2n$ points on a circle // *Math. Comp.* 29 no. 129, 1975, pp 215–222.
2. *Stoimenov A.* Enumeration of chord diagrams and an upper bound for Vassiliev invariants // *Journal of Knot and its Ramifications*, vol. 7, no. 1, 1998, pp. 93-114.
3. *Gori R., Marcus M.* Counting non-isomorphic chord diagrams // *Theoretical Computer Science – 1998–204.* – p. 55–73.
4. *Khruzin A.* Enumeration of chord diagrams // *Arxiv: math., Preprint*, 10p. 1998, <http://arxiv.org/abs/math.CO/0008209>
5. *Sawada J.* A Fast Algorithm for Generating Non-isomorphic Chord Diagrams // *SIAM Journal on Discrete Mathematics*, Vol. 15 No. 4 (2002) 546-561.
6. *Мантуров В.О.* Атомы, высотные атомы, хордовые диаграммы и узлы. Перечисление атомов малой сложности с использованием языка Mathematica 3.0 // *Топологические методы в теории гамильтоновых систем – сб. статей под ред. А.В.Болсинова, А.Т.Фоменка, А.И.Шафаревича.* М. Изд-во Факториал – 1998, с.203-212.
7. *Калужнин Л.А., Суцанский В.И.* Преобразования и перестановки // М.: Наука. 1979.