## Математика

**Чайченко С.О., Лисинська Н.І.**

[1] *Проректор із науково-педагогічної роботи, канд. ф.-мат. н., доцент;*
[2] *Студенка 5 курсу фізико-математичного факультету СДПУ*

# Наближення операторами спеціального вигляду на класах неперервних функцій, визначених на дійсній осі

Знайдено асимптотичні рівності для точних верхніх меж відхилень операторів спеціального вигляду на класах неперервних функцій, визначених на дійсній осі (і не обов'язково періодичних).

Нехай $\hat{C}$ – простір неперервних обмежених на дійсній осі $\mathbb{R}$ функцій $f(x)$, норма в якому задається рівністю

$$\|f\|_{\hat{C}} = \max_{x\in\mathbb{R}} |f(x)|,$$

$\hat{H}_\omega$ – клас функцій, який означається співвідношенням

$$\hat{H}_\omega = \left\{ \varphi \in \hat{C} : |\varphi(t') - \varphi(t'')| \le \omega(|t' - t''|),\ \forall t', t'' \in \mathbb{R} \right\},$$

де $\omega(t)$ – довільний фіксований модуль неперервності.

Нехай, далі, $\psi(\upsilon)$ – неперервна при всіх $\upsilon \ge 0$ функція, для якої майже при всіх $t \in \mathbb{R}$ існує перетворення

$$\hat{\psi}_\beta(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \psi(\upsilon) \cos\left( \upsilon t + \frac{\beta\pi}{2} \right) d\upsilon, \tag{1}$$

в якому $\beta$ – фіксоване дійсне число.

Тоді через $\hat{C}^\psi_\beta \hat{H}_\omega$, наслідуючи О.І. Степанця [1, с. 168], позначають множину функцій $f \in \hat{C}$, які в кожній точці $x \in \mathbb{R}$ можуть бути поданими у вигляді згортки

$$f(x) = A_0 + \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x - t) \widehat{\psi}_\beta(t)\, dt, \tag{2}$$

де $A_0$ – деяка стала, $\varphi \in \hat{H}_\omega$, а інтеграл розуміється як границя інтегралів по симетричним проміжкам, що розширюються. Функцію $\varphi(\cdot)$ у зображенні (2) називають $(\psi;\beta)$-похідною функції $f(\cdot)$ і для неї використовують позначення $\varphi = f^\psi_\beta$.

У книзі [1, с. 169] встановлено зв'язок між множинами $\hat{C}^{\psi}_{\beta}\hat{H}_{\omega}$ і відповідними множинами $2\pi$-періодичних неперервних функцій $C^{\psi}_{\beta}H_{\omega}$, раніше введеними О.І. Степанцем (дивись, наприклад, монографію [2, с. 131]). Зокрема показано, що якщо функція $\psi(\upsilon)$ неперервна при всіх $\upsilon \geq 0$, $\beta \in \mathbb{R}$ і перетворення $\hat{\psi}_{\beta}(t)$ вигляду (1) є сумовним на дійсній осі, то

$$\hat{C}^{\psi}_{\beta}H_{\omega} = C^{\psi}_{\beta}H_{\omega},$$

де $H_{\omega}$ –підмножина $2\pi$-періодичних функцій з множини $\hat{H}_{\omega}$.

За наближуючі агрегати для функцій $f \in \hat{C}^{\psi}_{\beta}\hat{H}_{\omega}$ в цій роботі використовуються оператори вигляду

$$U_{\sigma}(f;x) = A_0 + \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f^{\psi}_{\beta}(x-t)\int_{0}^{\infty} u_{\sigma}(t;\upsilon)\,d\upsilon\,dt, \tag{3}$$

де функція $u_{\sigma}(t;\upsilon) = u_{\sigma}(t;\upsilon;\psi;\beta)$ визначається рівністю

$$u_{\sigma}(t;\upsilon) = \begin{cases} u^{*}_{\sigma}(t;\upsilon), & 0 \leq \upsilon \leq \sigma - 1, \\ u^{*}_{\sigma}(t;\upsilon) + \psi(3\sigma)(\upsilon - \sigma + 1)\cos(\upsilon t + \frac{\beta\pi}{2}), & \sigma - 1 < \upsilon < \sigma, \\ 0, & \sigma \leq \upsilon, \end{cases}$$

у якій при $\upsilon \in [0;\sigma]$

$$u^{*}_{\sigma}(t;\upsilon) = \big(\psi(\upsilon) - \psi(2\sigma - \upsilon)\big)\cos\left(\upsilon t - \frac{\beta\pi}{2}\right) - \psi(2\sigma + \upsilon)\cos\left(\upsilon t - \frac{\beta\pi}{2}\right).$$

Оператори (3) у якості наближуючих агрегатів на класах функцій, заданих на дійсній осі, були вперше застосовані у роботі [3]. Там же було показано, що за певних природних умов функції $U_{\sigma}(f;x)$ належать до множини цілих функцій експоненціального типу не вищого $\sigma$. Якщо ж $f(x)$ є неперервною $2\pi$-періодичною функцією з множини $C^{\psi}_{\beta}H_{\omega}$, а $\sigma = n \in \mathbb{N}$, то функції $U_{\sigma}(f;x)$ є тригонометричними поліномами порядку не вищого $n-1$. Метод побудови цих поліномів і дослідження їх апроксимаційних властивостей на класах $2\pi$-періодичних функцій було здійснено А.С. Сердюком у роботах [4, 5].

Дослідженню апроксимаційних властивостей операторів $U_{\sigma}(f;x)$ на класах неперервних функцій, заданих на дійсній осі, присвячено роботи [3, 6]. Зокрема, у роботі [6] знайдено асимптотичні при $\sigma \to \infty$ рівності для величин

$$E(\hat{C}^{\psi}_{\beta}\hat{H}_{\omega};U_{\sigma}) = \sup_{f \in \hat{C}^{\psi}_{\beta}\hat{H}_{\omega}} \left\| f(\cdot) - U_{\sigma}(f;\cdot) \right\|_{\hat{C}},$$

у випадку, коли

$$\psi(\upsilon)=\begin{cases}\psi_1(\upsilon), & 0\le\upsilon<1,\\ e^{-\alpha\upsilon}, & 1\le\upsilon,\end{cases} \tag{4}$$

де $\alpha>0$ – довільне дійсне число, $\psi_1(\upsilon)$ –деяка абсолютно неперервна функція, яка має похідну $\psi_1'(\upsilon)$ обмеженої варіації на відрізку [0;1], і така, що $\psi_1(0)\sin\frac{\beta\pi}{2}=0$ і $\psi_1(1)=e^{-\alpha}$. А саме, у роботі [6] було доведене таке твердження.

**Теорема** $A$**.** *Нехай функція $\psi(\upsilon)$ визначається співвідношенням (4) і $\beta\in\mathbb{R}$. Тоді при $\sigma\to\infty$ має місце рівність*

$$E\left(\hat{C}_\beta^\psi \hat{H}_\omega;U_\sigma\right)=\frac{2\theta_\omega e^{-\alpha\sigma}}{\pi}\int_0^{\pi/2}\omega\left(\frac{2t}{\sigma}\right)\sin t\,dt+O(1)\frac{e^{-\alpha\sigma}}{\alpha^2\sigma}\omega\left(\frac{1}{\sigma}\right),$$

*де $\theta_\omega\in\left[\frac{2}{3};1\right]$, причому $\theta_\omega=1$, якщо $\omega(t)$ – опуклий модуль неперервності, $O(1)$ – величини рівномірно обмежені щодо параметрів $\alpha,\beta$ і $\sigma$.*

Метою цього повідомлення є розповсюдження результатів роботи [6] на випадок, коли класи $\hat{C}_\beta^\psi \hat{H}_\omega$ означаються функціями $\psi(t)$ з множини $D_\alpha$, яка визначається у такий спосіб [7].

Наслідуючи О.І. Степанця (дивись, наприклад, монографію [1, с. 193]) позначимо через $\mathfrak{M}$ множину опуклих донизу при всіх $\upsilon\ge1$ функцій $\psi(\upsilon)$, для яких $\lim\limits_{\upsilon\to\infty}\psi(\upsilon)=0$. Кожну функцію $\psi\in\mathfrak{M}$ продовжимо на проміжок [0;1) так, щоб отримана функція (яку як і раніше будемо позначати через $\psi(\cdot)$) була неперервною при всіх $\upsilon\ge0$, $\psi(0)=0$ і її похідна $\psi'(\upsilon)=\psi'(\upsilon+0)$ мала обмежену варіацію на проміжку $[0;\infty)$. Множину таких функцій $\psi$ позначимо через $\mathfrak{R}$. Нехай, далі, $\mathfrak{R}^*$ –підмножина функцій $\psi\in\mathfrak{R}$ у яких починаючи з деякого $\upsilon_0$, існує скінчена похідна другого порядку $\psi''(\upsilon)$. Тоді покладемо

$$D_\alpha=\left\{\psi\in\mathfrak{R}^*:\lim_{\upsilon\to\infty}\frac{\psi''(\upsilon)}{\psi'(\upsilon)}=-\alpha,\ \alpha>0\right\}.$$

Для отримання асимптотичних рівностей будемо використовувати теорему $A$ і наступну лему, доведену в роботі [7].

**Лема 1.** *Нехай $\psi\in D_\alpha$. Тоді для довільного числа $\sigma>0$ виконується рівність*

$$\int_\sigma^\infty\psi(\upsilon)\cos\left(\upsilon t+\frac{\beta\pi}{2}\right)d\upsilon=\psi(\upsilon)\left[e^{\alpha\sigma}\int_\sigma^\infty e^{-\alpha\upsilon}\cos\left(\upsilon t+\frac{\beta\pi}{2}\right)d\upsilon+r_\sigma(t)\right], \tag{5}$$

причому з деякого $\sigma_0$, справедливі оцінки

$$|r_\sigma(t)| \le \frac{\varepsilon_\sigma}{\alpha(\alpha-\varepsilon_\sigma)}, \quad t\in\mathbb{R}, \tag{6}$$

$$|r_\sigma(t)| \le \frac{1}{t^2}\frac{(2\alpha+1)}{\alpha-\varepsilon_\sigma}\varepsilon_\sigma, \quad |t|>0, \tag{7}$$

де

$$\varepsilon_\sigma = \max\left\{\varepsilon_\sigma^{(1)};\varepsilon_\sigma^{(2)}\right\}, \quad \varepsilon_\sigma^{(1)} = \sup_{t\ge\sigma}\left|\frac{\psi'(t)}{\psi(t)}+\alpha\right|, \quad \varepsilon_\sigma^{(2)} = \sup_{t\ge\sigma}\left|\frac{\psi''(t)}{\psi'(t)}-\alpha^2\right|. \tag{8}$$

Основний результат роботи міститься в такому твердженні.

**Теорема 1.** *Нехай* $\psi\in D_\alpha$ *і* $\beta\in\mathbb{R}$. *Тоді при* $\sigma\to\infty$ *має місце рівність*

$$E\left(\hat{C}_\beta^\psi \hat{H}_\omega;U_\sigma\right) = \frac{2\theta_\omega\psi(\sigma)}{\pi}\int\limits_0^{\pi/2}\omega\left(\frac{2t}{\sigma}\right)\sin t\, dt +$$

$$+O(1)\left((\alpha^2+1)\varepsilon_\sigma + \frac{\omega(1/\sigma)}{\sigma}\right)\frac{\psi(\sigma)}{\alpha^2}, \tag{9}$$

*де величина* $\varepsilon_\sigma$ *визначена у співвідношеннях (8)* $\theta_\omega\in\left[\frac{2}{3};1\right]$, *причому* $\theta_\omega=1$, *якщо* $\omega(t)$ *– опуклий модуль неперервності,* $O(1)$ *– величини рівномірно обмежені щодо параметрів* $\alpha,\beta$ *і* $\sigma$.

**Доведення.** Враховуючі факт сумовності на $\mathbb{R}$ перетворення $\hat{\psi}_\beta(t)$ вигляду (1) довільної функції $\psi\in D_\alpha$ і повторюючи міркування, які використовувались під час доведення теореми 1 роботи [6], отримуємо

$$f(x)-U_\sigma(f;x) = \frac{2}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f_\beta^\psi(x-t)\cos\left(\sigma t-\frac{\beta\pi}{2}\right)\int\limits_0^\infty \psi(\upsilon+\sigma)\cos\sigma t\, d\upsilon\, dt -$$

$$-\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f_\beta^\psi(x-t)\left(\int\limits_{\sigma-1}^{\sigma}\psi(3\sigma)(\upsilon-\sigma+1)\cos\left(\upsilon t+\frac{\beta\pi}{2}\right)d\upsilon +\right.$$

$$\left.+\int\limits_\sigma^\infty \psi(\upsilon+2\sigma)\cos\left(\upsilon t+\frac{\beta\pi}{2}\right)d\upsilon\right)dt. \tag{10}$$

Розглядаючи в рівності (10) точну верхню межу по класах $\hat{C}_\beta^\psi\hat{H}_\omega$, одержуємо

$$E(\hat{C}_\beta^\psi\hat{H}_\omega;U_\sigma) =$$

$$= \frac{2}{\pi}\sup_{f\in\hat{C}_\beta^\psi\hat{H}_\omega}\left\|\int\limits_{-\infty}^{\infty} f_\beta^\psi(x-t)\cos\left(\sigma t-\frac{\beta\pi}{2}\right)\int\limits_0^\infty\psi(\upsilon+\sigma)\cos\upsilon t\, d\upsilon\, dt\right\|_{\hat{C}} +$$

$$+O(1)\sup_{f\in\hat{C}^{\psi}_{\beta}\hat{H}_{\omega}}\left\|\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f^{\psi}_{\beta}(x-t)\left(\int_{\sigma-1}^{\sigma}\psi(3\sigma)(\upsilon-\sigma+1)\cos\left(\upsilon t+\frac{\beta\pi}{2}\right)d\upsilon+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\int_{\sigma}^{\infty}\psi(\upsilon+2\sigma)\cos\left(\upsilon t+\frac{\beta\pi}{2}\right)d\upsilon\right)dt\right\|_{\hat{C}}. \tag{11}$$

Позначимо перший доданок з правої частини рівності (11) через $D_{\sigma}(\hat{C}^{\psi}_{\beta}\hat{H}_{\omega})$. Продовжуючи міркувати як і в роботі [6], отримуємо

$$E(\hat{C}^{\psi}_{\beta}\hat{H}_{\omega};U_{\sigma})=D_{\sigma}(\hat{C}^{\psi}_{\beta}\hat{H}_{\omega})+O(1)E(\hat{C}^{\psi_{\sigma}}_{-\beta}\hat{H}_{\omega};F_{\sigma}), \tag{12}$$

де

$$\psi_{\sigma}(t)=\begin{cases}\psi\big((2\sigma+1)t\big), & 0\le t\le 1,\\ \psi(t+2\sigma), & 1\le t,\end{cases}$$

а

$$E(\hat{C}^{\psi_{\sigma}}_{-\beta}\hat{H}_{\omega};F_{\sigma})=\sup_{f\in\hat{C}^{\psi_{\sigma}}_{-\beta}\hat{H}_{\omega}}\|f(x)-F_{\sigma}(f;x)\|_{\hat{C}}$$

– точні верхні межі відхилень на класах $\hat{C}^{\psi_{\sigma}}_{-\beta}\hat{H}_{\omega}$ операторів Фур'є $F_{\sigma}(f;x)$, які були введені у роботі [8] таким чином

$$F_{\sigma}(f;x)=A_0+\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f^{\psi}_{\beta}(x-t)\int_{0}^{\infty}\psi(\upsilon)\lambda_{\sigma}(\upsilon)\cos\left(\upsilon t+\frac{\beta\pi}{2}\right)d\upsilon\,dt,$$

$$\lambda_{\sigma}(\upsilon)=\begin{cases}1, & 0\le\upsilon\le\sigma-1,\\ 1-\big(\upsilon-\sigma+1\big)\dfrac{\psi(\sigma)}{\psi(\upsilon)}, & \sigma-1<\upsilon<\sigma,\\ 0, & \sigma\le\upsilon.\end{cases}$$

Враховуючи тепер оцінку

$$E(\hat{C}^{\psi_{\sigma}}_{-\beta}\hat{H}_{\omega};F_{\sigma})=O(1)\psi(3\sigma)\omega\left(\frac{1}{\sigma}\right),\qquad \sigma\to\infty,$$

яка випливає з теореми IX.12.2 монографії [1, с. 226], співвідношення (12) можна записати у вигляді

$$E\left(\hat{C}^{\psi}_{\beta}\hat{H}_{\omega};U_{\sigma}\right)=D_{\sigma}\left(\hat{C}^{\psi}_{\beta}\hat{H}_{\omega}\right)+O(1)\psi(3\sigma)\omega\left(\frac{1}{\sigma}\right). \tag{13}$$

Знайдемо тепер величину $D_{\sigma}(\hat{C}^{\psi}_{\beta}\hat{H}_{\omega})$. Для цього будемо використовувати лему 1. Застосовуючи формулу (5) з цієї леми, одержуємо

$$\int_{0}^{\infty}\psi(\upsilon+\sigma)\cos\upsilon t\,d\upsilon=\int_{\sigma}^{\infty}\psi(\upsilon)\cos(\upsilon-\sigma)t\,d\upsilon=$$

$$=\int_{\sigma}^{\infty}\psi(\upsilon)\left(\cos\upsilon t\cos\sigma t+\sin\upsilon t\sin\sigma t\ \right)d\upsilon=$$

$$=\cos\sigma t\int_{\sigma}^{\infty}\psi(\upsilon)\cos\upsilon t\,d\upsilon+\sin\sigma t\int_{\sigma}^{\infty}\psi(\upsilon)\sin\upsilon t\,d\upsilon=$$

$$=\psi(\sigma)\left[e^{\alpha\sigma}\int_{\sigma}^{\infty}e^{-\alpha\sigma}\cos(\upsilon-\sigma)t\,d\upsilon+O(1)r_{\sigma}(t)\right]=$$

$$=\psi(\sigma)\left[e^{\alpha\sigma}\int_{0}^{\infty}e^{-\alpha(\upsilon+\sigma)}\cos\upsilon t\,d\upsilon+O(1)r_{\sigma}(t)\right]=\psi(\sigma)\left[\frac{\alpha}{t^2+\alpha^2}+O(1)r_{\sigma}(t)\right],\tag{14}$$

де для величини $r_{\sigma}(t)$ справджуються оцінки (6) і (7).

На підставі співвідношення (14), враховуючи означення величини $D(\hat{C}_{\beta}^{\psi}\hat{H}_{\omega})$ і оцінки (6) – (7), отримуємо

$$D\left(\hat{C}_{\beta}^{\psi}\hat{H}_{\omega}\right)=\frac{2\alpha\psi(\sigma)}{\pi}\sup_{\varphi\in\hat{H}_{\omega}}\left|\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(t)\frac{\cos\left(\sigma t-\frac{\beta\pi}{2}\right)}{t^2+\alpha^2}dt\right|+$$

$$+O(1)\frac{(\alpha^2+1)\varepsilon_{\sigma}}{\alpha^2}\psi(\sigma).\tag{15}$$

Для знаходження верхньої грані у співвідношенні (15) скористаємося твердженням, яке одержується шляхом поєднання лем 1 і 2 роботи [6].

**Лема 2.** *Нехай $\alpha>0$ і $\beta\in\mathbb{R}$. Тоді при $\sigma\to\infty$*

$$I_{\sigma}(\alpha;\omega)\overset{\text{df}}{=}\sup_{\varphi\in\hat{H}_{\omega}}\left|\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(t)\frac{\cos\left(\sigma t-\frac{\beta\pi}{2}\right)}{t^2+\alpha^2}dt\right|=$$

$$=\frac{\theta_{\omega}}{\alpha}\int_{0}^{\pi/2}\omega\left(\frac{2t}{\sigma}\right)\sin t\,dt+O(1)\omega\left(\frac{1}{\sigma}\right),\tag{16}$$

*де $\theta_{\omega}\in\left[\frac{2}{3};1\right]$, причому $\theta_{\omega}=1$, якщо $\omega(t)$ – опуклий модуль неперервності, $O(1)$ – величини рівномірно обмежені щодо параметрів $\alpha,\beta$ і $\sigma$.*

Об'єднуючи тепер співвідношення (13), (15) і (16), переконуємося у справедливості формули (9). Теорему доведено.

Зробимо декілька зауважень до теореми 1. Якщо $\psi(t) = e^{-\alpha t}$, $t \geq 1$, то

$$\frac{\psi'(t)}{\psi(t)} = -\alpha,\ \frac{\psi''(t)}{\psi(t)} = \alpha^2,\ t \geq 1.$$

Звідси, з урахуванням співвідношень (8), випливає, що $\varepsilon_\sigma = 0,\ \sigma \geq 1,$ і твердження теореми 1 співпадає з твердженням теореми $A$.

Далі, оскільки справедлива порядкова оцінка

$$\int_0^{\pi/2} \omega\left(\frac{2t}{\sigma}\right) \sin t\, dt = O(1)\omega\left(\frac{1}{\sigma}\right),\ \sigma \to \infty,$$

то за умови виконання співвідношення

$$\lim_{\sigma \to \infty} \frac{\varepsilon_\sigma}{\omega(1/\sigma)} = 0 \tag{17}$$

залишковий член формули (9) буде при $\sigma \to \infty$ нескінченно малою більш високого порядку малості у порівнянні з головним членом цієї рівності (в цьому випадку також кажуть, що рівність (9) дає розв'язок задачі Колмогорова-Нікольського для операторів $U_\sigma(f;x)$ на класах $\hat{C}_\beta^\psi \hat{H}_\omega$).

Приймаючи до уваги цей факт, зазначимо зокрема, що функції $\psi^*(t) = e^{-\alpha t} \ln^\mu (t+\gamma),\ \alpha > 0,\ \mu \in \mathbb{R}, \gamma > 0$ і $\omega(t) = t^\delta,\ 0 < \delta \leq 1,$ а також функції $\psi_*(t) = t^\mu e^{-\alpha t},\ \alpha > 0,\ \mu \in \mathbb{R}$ і $\omega(t) = t^\delta, 0 < \delta < 1,$ задовольняють умову (17).

Перевіримо, наприклад, умову (17) у випадку, коли клас $\hat{C}_\beta^\psi \hat{H}_\omega$ визначається функцією $\psi_*(t)$ і модулем неперервності $\omega(t) = t^\delta,\ 0 < \delta < 1.$ Виконуючи перетворення, одержуємо

$$\frac{\psi_*'(t)}{\psi_*(t)} = \frac{\mu}{t} - \alpha, \qquad \frac{\psi_*''(t)}{\psi_*(t)} = \frac{2\alpha\mu}{t} - \frac{\mu(\mu-1)}{t^2} + \alpha^2.$$

Звідси знаходимо

$$\varepsilon_\sigma^{(1)} = \sup_{t \geq \sigma} \left| \frac{\psi_*'(t)}{\psi_*(t)} + \alpha \right| = \frac{\mu}{\sigma}, \quad \sigma \geq 1, \tag{18}$$

$$\varepsilon_\sigma^{(2)} = \sup_{t \geq \sigma} \left| \frac{\psi_*''(t)}{\psi_*(t)} - \alpha^2 \right| = \frac{2\alpha\mu}{\sigma} - \frac{\mu(\mu-1)}{\sigma^2}, \quad \sigma \geq \frac{\mu-1}{\alpha}. \tag{19}$$

З рівностей (18) і (19) випливає оцінка

$$\varepsilon_\sigma = \max\left\{\varepsilon_\sigma^{(1)}; \varepsilon_\sigma^{(2)}\right\} = O(1)\frac{1}{\sigma}, \quad \sigma \to \infty,$$

на підставі якої переконуємося у справедливості співвідношення (17).

## Література

1. *Степанец А.И.* Методы теории приближений: В 2 т. –К.: Ин-т математики НАН Украины, 2002. – Ч. 2. – 468 с.
2. *Степанец А.И.* Методы теории приближений. –Киев: Ин-т математики НАН Украины, 2002. - Ч. I. – 427 с.
3. *Соколенко І.В.* Наближення операторами Сердюка неперервних $(\psi;\beta)$-диференційовних функцій, заданих на дійсній осі // Проблеми теорії наближеня функцій та суміжні питанння: Зб. праць Ін-ту математики НАН України. – Т.4, № 1. – Київ: Ін-т математики НАН України, 2007. – С. 318 - 334.
4. *Сердюк А.С.* Про один лінійний метод наближення періодичних функцій // Проблеми теорії наближеня функцій та суміжні питанння: Зб. праць Ін-ту математики НАН України. – Т.1, № 1. – Київ: Ін-т математики НАН України, 2004. – С. 361 - 375.
5. *Сердюк А.С.* Наближення інтегралів Пуассона одним лінійним методом наближення в рівномірній та інтегральній метриках // Укр. мат. журн. – 2008. – 60, № 7. – С. 976 - 982.
6. *Соколенко І.В.* Наближення деякими лінійними операторами класів заданих на дійсній осі неперервних $(\psi;\beta)$-диференційовних функцій // Теорія наближеня функцій та суміжні питанння: Зб. праць Ін-ту математики НАН України. – Т.5, № 1. – Київ: Ін-т математики НАН України, 2008. – С. 352 - 366.
7. *Рукасов В.І., Чайченко С.О.* Наближення операторами Фур'є на классах функцій, локально інтегровних на дійсній осі // Теорія наближення функцій та суміжні питання: Зб. праць Ін-ту математики НАН України. – Т. 5, № 1. – Київ: Ін-т математики НАН України, 2008. – С. 297 - 308.
8. *Степанец А.И.* Приближение операторами Фурье функций, заданных на действительной оси // Докл. АН СССР. – 1988. – Т. 303, № 1. – С. 50 - 53.