Близнець Т.Ф., Пащенко З.Д.

[1]Студенка 5 курсу фізико-математичного факультету СДПУ,
[2]Доцент кафедри алгебри СДПУ

Про підстановки Гаспара Монжа

В нашому житті ми іноді зустрічаємося з цікавими задачами-іграми, розв'язок яких можна знайти за допомогою теорії підстановок. [1].

Задача Колода з 36 карт тасується наступним чином. Колода береться лицевим боком вниз в ліву руку і карти зверху по одній перекладаються в праву руку, причому в правій руці вони почергово кладуться то зверху, то знизу тих карт, які до цього часу вже зібрались в правій руці. Скільки разів необхідно повторити таку перестановку, щоб в колоді був відновлений початковий порядок? [1]

Викликає інтерес відповідь на питання цієї задачі у випадку $2n$ карт. Підстановки, які характеризують перетворення цієї задачі у випадку $2n$ карт, мають назву підстановок Гаспара Монжа. А відповідь даної задачі співпадає зі значеннями порядку відповідних підстановок.

Наприклад, при $n=5$ після першої перетасовки занумеровані по-порядку карти розташуються наступним чином:

$$\begin{matrix} \langle 10\rangle & \langle 8\rangle & \langle 6\rangle & \langle 4\rangle & \langle 2\rangle & \langle 1\rangle & \langle 3\rangle & \langle 5\rangle & \langle 7\rangle & \langle 9\rangle \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \end{matrix},$$

а відповідна підстановка Гаспара Монжа, яка вказує номер місця, на яке переходить кожна карта, має вигляд:

$$\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 6 & 5 & 7 & 4 & 8 & 3 & 9 & 2 & 10 & 1 \end{pmatrix}$$

Виникає необхідність дослідити підстановки Гаспара Монжа степеня $2n$, знайти їх аналітичну формулу, дослідити залежність порядку цих підстановок від n.

Помічаємо, що в досліджуваній підстановці парні елементи від $2n$ до 2 відображаються в елементи від 1 до n, а непарні від 1 до $2n-1$ – в елементи від $n+1$ до $2n$. Тоді можемо одержати аналітичну формулу підстановки φ Гаспара Монжа степеня $2n$:

$$\varphi(x) = \begin{cases} n+1-t & \text{при } x = 2t \\ n+t & \text{при } x = 2t-1, t = 1,2,...,n \end{cases} \qquad (1).$$

Відомо, що довільну підстановку можна розкласти у добуток незалежних циклів, порядок такої підстановки дорівнює найменшому спільному кратному довжин цих циклів, а набір довжин усіх цих циклів називається типом підстановки. [1].

Твердження 1. Підстановка Гаспара Монжа степеня $2n$ буде мати нерухому точку тільки у випадку, коли $2n+2$ ділиться на 3, причому вона єдина і дорівнює $\frac{2}{3}(n+1)$.

Доведення. Нехай x – нерухома точка підстановки φ Гаспара Монжа степеня $2n$ $(\varphi(x)=x)$. Тоді $1<x<2n$.

1. Нехай $x=2t \Rightarrow \varphi(x)=n+1-t=2t \Rightarrow 3t=n+1 \Rightarrow$ ціле число t існує, коли $n+1$ ділиться на 3 (а значить $2n+2$ ділиться на 3), причому воно єдине, тоді $x=\frac{2}{3}(n+1)=\frac{2n+2}{3}, 1<x<2n$.

2. Нехай $x=2t-1 \Rightarrow \varphi(x)=n+t=2t-1 \Rightarrow t=n=1 \Rightarrow x=2n+1>2n$, що неможливо. Твердження доведено.

Провівши аналіз типів і значень порядків підстановок Гаспара Монжа в залежності від конкретних значень $n = 1, 2, \ldots, 18$ (табл.1), виникає гіпотеза.

Гіпотеза. Якщо степінь підстановки Гаспара Монжа дорівнює 2^k, то її порядок $k+1$.

В даній таблиці 1 занесені також результати дослідження типів підстановок Гаспара Монжа степеня 2^k та значень їх порядків при $k=6,7,8$.

При $k=6$ число $2^6=64=7\cdot 9+1$. Розкладемо підстановку Гаспара Монжа степеня 2^6 в добуток незалежних циклів. Так як число $2^6+2=66 ⋮ 3$, то підстановка буде мати нерухому точку $\frac{66}{3}=22$, а значить і цикл $\varphi_0=(22)$ довжини 1. Інші цикли будемо будувати як орбіти всіх елементів, користуючись аналітичною формулою (1) підстановки Гаспара Монжа степеня 2^6. Побудуємо спочатку цикл $\mathrm{O}(1,\varphi)$:

$$1=2\cdot 1-1 \quad \varphi(1)=2^5+1=33,$$
$$33=2\cdot 17-1 \quad \varphi(33)=2^5+17=49,$$
$$49=2\cdot 25-1 \quad \varphi(49)=2^5+25=57,$$
$$57=2\cdot 29-1 \quad \varphi(57)=2^5+29=61,$$
$$61=2\cdot 31-1 \quad \varphi(61)=2^5+31=63,$$
$$63=2\cdot 32-1 \quad \varphi(63)=2^5+32=64,$$
$$64=2\cdot 32 \quad \varphi(64)=2^5+1-32=1.$$

$\varphi_1=\mathrm{O}(1,\varphi)=(1,33,49,57,61,63,64)$, його довжина дорівнює 7.

Так як $2\notin \mathrm{O}(1,\varphi)$, то $\mathrm{O}(2,\varphi)\neq \mathrm{O}(1,\varphi)$ і побудуємо цикл $\varphi_2=\mathrm{O}(2,\varphi)=(2,32,17,41,53,59,62)$.

Аналогічно, $3\notin \mathrm{O}(1,\varphi),\mathrm{O}(2,\varphi)$, тому $\varphi_3=\mathrm{O}(3,\varphi)=(3,34,16,25,45,55,60)$,

$\varphi_4 = \mathrm{O}(4,\varphi) = (4,31,48,9,37,51,58)$, $\varphi_5 = \mathrm{O}(5,\varphi) = (5,35,50,8,29,47,56)$,
$\varphi_6 = \mathrm{O}(6,\varphi) = (6,30,18,24,21,43,54)$, $\varphi_7 = \mathrm{O}(7,\varphi) = (7,36,15,40,13,39,52)$,
$8 \in \varphi_5$, $9 \in \varphi_4$
$\varphi_8 = \mathrm{O}(10,\varphi) = (10,28,19,42,12,27,46)$, $\varphi_9 = \mathrm{O}(11,\varphi) = (11,38,14,26,20,23,44)$.
Довжини всіх цих циклів дорівнюють 7.

Інших циклів не існує, оскільки всі $2^6 = 64 = 7 \cdot 9 + 1$ чисел входять в знайдені цикли $\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_9$, а підстановка Гаспара Монжа степеня 2^6 розкладається в добуток дев'яти циклів довжини 7 і одного циклу довжини 1, має тип $\langle 7,7,7,7,7,7,7,7,7,1 \rangle = \langle 7 \times 9, 1 \rangle$ і порядок НСД(7,1)=7=6+1.

Аналогічними підрахунками одержано, що при $k = 7$ число $2^7 \vdots (7+1)$ $(2^7 = 128 = 8 \cdot 16)$, а підстановка Гаспара Монжа степеня 2^7 розкладається в добуток шістнадцяти циклів довжини 8, має тип $\langle 8,8,...,8 \rangle = \langle 8 \times 16 \rangle$ і порядок 8=7+1; при $k = 8$ число $2^8 = 256 = 9 \cdot 28 + 4$. Тип підстановки Гаспара Монжа степеня 2^8 має вигляд $\langle 9,9,...,9,3,1 \rangle = \langle 9 \times 28, 3, 1 \rangle$, а порядок дорівнює $\text{НСД}(9,3,1) = 9 = 8 + 1$.

Таблиця 1

Значення порядків підстановок Гаспара Монжа.

2n	тип	порядок
2=2^1	<2>	2
4=2^2	<3,1>	3
6	<6>	6
8=2^3	<4,4>	4
10	<6,3,1>	6
12	<10,2>	10
14	<14>	14
16=2^4	<5,5,5,1>	5
18	<18>	18
20	<10,10>	10
22	<12,4,3,2,1>	12
24	<21,3>	21
26	<26>	26
28	<9,9,9,1>	9
30	<30>	30
32=2^5	<6,6,6,6,6,2> $= <6 \times 4, 2>$	6
34	<22,11,1>	22
36	<9,9,9,9>	9
2^6	<7,7,7,7,7,7,7,7,7,1> $= <7 \times 9, 1>$	7
2^7	$<8 \times 16>$	8
2^8	$<9 \times 28, 3, 1>$	9

Дані обчислення підтверджують висунуту гіпотезу, але не доводять її. Зробимо деякі спроби довести дану гіпотезу. По-перше, розглянемо можливі цикли, на які може бути розкладена підстановка Гаспара Монжа степеня 2^k $\left(n = 2^{k-1}\right)$. Для того, щоб гіпотеза могла справдитись, довжини всіх цих циклів повинні бути дільниками $k+1$. Користуючись формулою (1), знайдемо орбіту $O(1,\varphi)$:

1. $x_1 = 1$ – непарне , $(x = 2t-1, \varphi(x) = n + t)$ $\quad t_1 = 1$;

2. $x_2 = \varphi(x_1) = \varphi(1) = 2^{k-1}+1$ – непарне, $t_2 = 2^{k-2}+1$;

3. $x_3 = \varphi(x_2) = \varphi\left(2^{k-1}+1\right) = 2^{k-1}+2^{k-2}+1$ – непарне, $t_3 = 2^{k-2}+2^{k-3}+1$;

4. $x_4 = \varphi(x_3) = \varphi\left(2^{k-1}+2^{k-2}+1\right) = 2^{k-1}+2^{k-2}+2^{k-3}+1$ – непарне,

$t_4 = 2^{k-2}+2^{k-3}+2^{k-4}+1$;

…

k. $x_k = 2^{k-1}+2^{k-2}+\ldots+2^{k-(k-1)}+1$ – непарне, $t_k = 2^{k-2}+2^{k-3}+\ldots+2^{k-k}+1$;

k+1. $x_{k+1} = \varphi(x_k) = \varphi\left(2^{k-1}+2^{k-2}+\ldots+2^1+1\right) = 2^{k-1}+2^{k-2}+2^{k-3}+\ldots+2^0+1$.

Звернемо увагу що, $2^0+2^1+\ldots+2^{k-1}$ – сума k членів геометричної прогресії, яка дорівнює 2^k-1, тоді $x_{k+1} = \varphi\left(2^{k-1}+2^{k-2}+\ldots+2^1+1\right) = 2^k$ – **парне,** $(x = 2t, \varphi(x) = n+1-t)$ $\quad t_1 = 1$ $t_{k+1} = 2^{k-1}$;

k+2. $\varphi\left(2^k\right) = 2^{k-1}+1-2^{k-1} = 1$.

Тоді маємо, що цикл $\varphi_1 = \left(1, 2^{k-1}+1, 2^{k-1}+2^{k-2}+1, \ldots, 2^{k-1}+2^{k-2}+\ldots+2+1, 2^k\right)$ – це орбіта $O(1,\varphi)$, його довжина $k+1$. Тобто, одержуємо

Твердження 2. Порядок підстановки Гаспара Монжа степеня 2^k ділиться на $k+1$.

Гіпотеза була б доведена, якщо довести, що останні елементи утворюють орбіти з довжиною, яка є дільником $(k+1)$.

Нами розглянуто можливі типи підстановок Гаспара Монжа степеня 2^k при $9 \le k \le 18$ (табл.2), які задовольняли б висунутій гіпотезі. Всі ці типи повинні задовольняти твердженню 1 і довжини всіх взаємно простих циклів, на добуток яких розкладається підстановка, повинні бути дільниками $k+1$, тоді найменше спільне кратне цих довжин, що співпадає зі значенням порядку цієї підстановки, дорівнює $k+1$. Даний аналіз може допомогти у подальшому доведенні гіпотези.

Таблиця 2

Передбачувані значення порядків підстановок Гаспара Монжа степеня 2^k

степінь	тип	порядок
2^9	$<10\times 51,2>$ або $<10\times x, 5\times 2y, 2\times(5t+1)>$	НСК(10,2) = = НСК(10,5,2) = 10
2^{10}	$<11\times 93,1>$	НСК(11,1) = 11
2^{11}	$<12\times 170,4,4>$, або $<12\times 170,6,2>$, або $<12\times x, 6\times y, 4\times s, 2\times t>$	НСК(12,4) =НСК(12,6,2)= = НСК(12,6,4,2) = 12
2^{12}	$<13\times 315,1>$	НСК(13,1) = 13
2^{13}	$<14\times 585,2>$або $<14\times x, 7\times 2y, 2\times 7t+1>$	НСК(14,2) = = НСК(14,7,2) = 14
2^{14}	$<15\times 1092,3,1>$ або $<15\times x, 5\times y, 3\times s, 1>$	НСК(15,3,1) = = НСК(15,5,3,1) = 15
2^{15}	$<16\times 2048>$ або $<16\times x, 8\times y, 4\times s, 2\times t>$	16 = = НСК(16,8,4,2,)
2^{16}	$<17\times 3855,1>$	НСК(17,1) = 17
2^{17}	$<18\times 7281, 9, 3, 2>$, або $<18\times 7281, 6, 6, 2>$, або $<18\times x, 9\times y, 6\times s, 3\times p, 2\times t>$	НСК(18,9,3,2) = = НСК(8,6,2) = = НСК(18,9,6,3,2) = 18
2^{18}	$<19\times 262143, 1>$	НСК(19,1)=19

Література

1. *Калужнин Л.А., Сущанский В.И.* Преобразования и перестановки. – М.: Наука. 1979.
2. *Кострикин А.И.* Введение в алгебру. – М. : Наука. 1977.