Бондар Є.О.

Магістрантка спеціальності «Математика» Інституту інформаційних технологій Луганського національного університету імені Тараса Шевченка

Ідемпотенти вінцевих голоморфів напівгруп

У роботі описуються ідемпотенти вінцевого голоморфу напівгрупи з нульовим множенням (правих нулів, лівих нулів) та симетричної напівгрупи.

Ключові слова: *напівгрупа, вінцевий голоморф, ідемпотент.*

1. Вступ. На сьогодні існує ряд напівгрупових конструкцій, що плідно працюють у структурній теорії напівгруп. Важливе місце у цьому ряді займає одна з універсальних загальноалгебраїчних конструкцій – конструкція вінцевого добутку, яка почала активно використовуватися у теорії напівгруп після отримання Кроном і Роудзом структурної теореми для скінченних моноїдів.

Зараз з'явилися різні узагальнення конструкції вінцевого добутку. Одним з таких узагальнень стала конструкція вінцевого голоморфу, яку визначив Усенко [1] і використав для описання будови напівгрупи ендоморфізмів цілком 0-простих напівгруп. Іншим узагальненням є конструкція двобічного напівпрямого добутку, в термінах якої Закусило та Усенко [2] описали будову напівгрупи ендоморфізмів та оболонки зсувів квазірегулярної напівгрупи Ріса матричного типу.

Метою даної роботи є описання ідемпотентів вінцевих голоморфів заданих напівгруп.

2. Основні поняття. Нехай $(S,*)$ – довільна напівгрупа, $\Im(X)$ – симетрична напівгрупа на множині X, $Map(X,S)$ – напівгрупа усіх відображень з множини X у напівгрупу S з операцією "•" поточкового підсумовування: $x\left(\mu_1 \bullet \mu_2\right) = x\mu_1 * x\mu_2$ для всіх $x \in X, \mu_1, \mu_2 \in Map(X,S)$.

Якщо $\varphi \in \Im(X)$, то через $Ker\varphi = \left\{(x,y) \in X \times X \mid x\varphi = y\varphi\right\}$ позначатимемо відношення рівнозначності φ, а через $\operatorname{Im}\varphi$ – образ цього перетворення.

Для $f \in Map(X,S)$, $\sigma \in EndS$ покладемо $f\alpha_S^\sigma = f\sigma$, тобто $x(f\alpha_S^\sigma) = \left(xf\right)\sigma$ для всіх $x \in X$. Цією умовою для кожного $\sigma \in EndS$ визначено перетворення α_S^σ напівгрупи $Map(X,S)$, яке є її ендоморфізмом. При цьому виникає гомоморфізм $\alpha_S : End\ S \to End\ Map(X;S) : \sigma \mapsto \alpha_S^\sigma$.

Для $f \in Map(X,S)$, $\tau \in \Im(X)$ покладемо $f\alpha_X^\tau = \tau f$, тобто через $f\alpha_X^\tau$ позначимо елемент із $Map(X,S)$ такий, що $x(f\alpha_X^\tau) = \left(x\tau\right)f$ для всіх $x \in X$. При цьому виникає антигомоморфізм $\alpha_X : \Im(X) \to EndMap(X;S) : \tau \mapsto \alpha_X^\tau$.

Крім того, для довільних $\tau \in \Im(X), \sigma \in EndS$ маємо $\alpha_X^\tau \alpha_S^\sigma = \alpha_S^\sigma \alpha_X^\tau$.

На декартовому добутку $End\ S \times\ Map(X;S) \times \Im(X)$ визначимо операцію:
$(\eta_1;\varphi_1;\tau_1)(\eta_2;\varphi_2;\tau_2) = (\eta_1\eta_2;\varphi_1\alpha_S^{\eta_2} \cdot \varphi_2\alpha_X^{\tau_1};\tau_1\tau_2)$
для всіх $\eta_1,\eta_2 \in End\ S$, $\varphi_1,\varphi_2 \in\ Map(X;S)$, $\tau_1,\tau_2 \in \Im(X)$. Ця множина із заданою вище операцією є напівгрупою, що називається вінцевим голоморфом [2] напівгрупи S та симетричної напівгрупи $\Im(X)$ і позначається $HWr[X,S]$.

Будемо користуватися матричною реалізацією цієї конструкції. Скориставшись позначеннями $f\alpha_S^\sigma = f\sigma, f\alpha_X^\tau = \tau f$, запишемо операцію множення так:

$$\begin{pmatrix} \eta_1 & o \\ \varphi_1 & \tau_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \eta_2 & o \\ \varphi_2 & \tau_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \eta_1\eta_2 & o \\ \varphi_1\eta_2 \bullet \tau_1\varphi_2 & \tau_1\tau_2 \end{pmatrix},$$

де $o-$ зовнішній анулятор.

3. Ідемпотенти вінцевого голоморфу напівгрупи лівих нулів та симетричної напівгрупи. Елемент e напівгрупи S називається ідемпотентом, якщо $e*e=e$. Напівгрупа S називається напівгрупою лівих нулів, якщо $a*b=a$ для всіх $a,b \in S$.

Нехай $L-$напівгрупа лівих нулів. Зауважимо, що будь-яке перетворення напівгрупи L є її ендоморфізмом, отже, $EndL = \Im\left(L\right)$.

Лема 1. Елемент $a = \begin{pmatrix} \eta & o \\ \varphi & \kappa \end{pmatrix} \in HWr[X,L]$ є ідемпотентом тоді й лише тоді, коли $\eta^2 = \eta,\ \kappa^2 = \kappa$ і $X\varphi \subseteq L\eta$.

Доведення. Нехай $a \in HWr[X,L]$ – ідемпотент.

Тоді $a^2 = \begin{pmatrix} \eta & o \\ \varphi & \kappa \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \eta & o \\ \varphi & \kappa \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \eta^2 & o \\ \varphi\eta \bullet \kappa\varphi & \kappa^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \eta & o \\ \varphi & \kappa \end{pmatrix} = a$. За означенням рівності двох елементів вінцевого голоморфу отримуємо $\eta = \eta^2,\ \varphi = \varphi\eta \bullet \kappa\varphi,\ \kappa = \kappa^2$.

Рівність $\varphi = \varphi\eta \bullet \kappa\varphi$ еквівалентна умові $x\varphi = (x\varphi)\eta$ для будь-якого $x \in X$. А це означає, що $X\varphi \subseteq L\eta$.

Нехай $a = \begin{pmatrix} \eta & o \\ \varphi & \kappa \end{pmatrix} \in HWr[X,L]$ такий, що η,κ – ідемпотенти і $x\varphi \in \operatorname{Im}\eta$ для довільного $x \in X$. Користуючись тим, що η ідемпотент, маємо $(x\varphi)\eta = x\varphi$, тобто $\varphi\eta = \varphi$. Тоді

$$a^2 = \begin{pmatrix} \eta & o \\ \varphi & \kappa \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \eta & o \\ \varphi & \kappa \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \eta^2 & o \\ \varphi\eta \bullet \kappa\varphi & \kappa^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \eta & o \\ \varphi\eta & \kappa \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \eta & o \\ \varphi & \kappa \end{pmatrix} = a. \qquad \square$$

Якщо $S-$ довільна напівгрупа , то через $I(S)$ будемо позначати множину всіх ідемпотентів напівгрупи S. Нагадаємо, що перетворення $\alpha \in \Im(X)$ є ідемпотентом тоді й лише тоді, коли його обмеження на своєму образі є тотожнім перетворенням (див., напр., [3]). Через C_n^m позначається кількість всіх $m-$елементних підмножин даної $n-$елементної множини.

Лема 2. Нехай X – довільна множина потужності n. Тоді

$$|I(\Im(X))| = \sum_{k=1}^{n} C_n^k k^{n-k}.$$

Доведення. Нехай перетворення $\varphi \in I(\Im(X))$ таке, що $|\operatorname{Im}\varphi| = k$. Зрозуміло, що $1 \le k \le n$. Якщо $k = n$, то існує єдиний ідемпотент – тотожнє перетворення множини X.

Нехай $1 \le k < n$. Оскільки для будь-якого $x \in \operatorname{Im}\varphi$ $x\varphi = x$, то будь-який елемент з $X \setminus \operatorname{Im}\varphi$ може відображатися у довільний елемент з $\operatorname{Im}\varphi$. Тоді всього ідемпотентів з фіксованим образом $\operatorname{Im}\varphi$ буде k^{n-k}. Враховуючи, що підмножину із X потужності k можна обрати C_n^k способами, отримуємо, що ідемпотентів у $\Im(X)$ в яких потужність образу дорівнює k буде $C_n^k k^{n-k}$. Отже, за правилом суми $|I(\Im(X))| = \sum_{k=1}^{n-1} C_n^k k^{n-k} + 1 = \sum_{k=1}^{n} C_n^k k^{n-k}$. □

Лема 3. Нехай X, L такі множини, що $|X| = n$, $|L| = m$. Тоді кількість впорядкованих пар (η, φ), де $\eta \in I(\Im(L))$, $\varphi \in Map(X, L)$, таких що $X\varphi \subseteq L\eta$, дорівнює $\sum_{k=1}^{m} C_m^k k^{m+n-k}$.

Доведення. Нехай $\eta \in I(\Im(L))$ такий, що $|\operatorname{Im}\eta| = k$ $(1 \le k \le m)$. При побудові відображення $\varphi \in Map(X, L)$, що задовольняє умову $X\varphi \subseteq L\eta$, будь-який елемент з X може відображатися у довільний елемент з $\operatorname{Im}\eta$. Отже, таких відображень буде k^n. За лемою 2 ідемпотент η, $|\operatorname{Im}\eta| = k$, можна обрати $C_m^k k^{m-k}$ способами. Тоді кількість пар (η, φ) таких, що $\varphi \in Map(X, L)$, $\eta \in I(\Im(L))$, $|\operatorname{Im}\eta| = k$ і $X\varphi \subseteq L\eta$, буде $C_m^k k^{m-k} k^n = C_m^k k^{m+n-k}$. За правилом суми шукана кількість дорівнює $\sum_{k=1}^{m} C_m^k k^{m+n-k}$. □

З лем 1–3 випливає

Теорема 1. Нехай X, L такі множини, що $|L| = m$, $|X| = n$. Тоді

$$\left|I(HWr[X, L])\right| = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} C_n^i C_m^j i^{n-i} j^{m+n-j}.$$

4. Ідемпотенти вінцевого голоморфу напівгрупи правих нулів та симетричної напівгрупи. Напівгрупа S називається напівгрупою правих нулів, якщо $a * b = b$ для всіх $a, b \in S$. Нехай R – напівгрупа правих нулів. Будь-яке перетворення напівгрупи R є її ендоморфізмом, отже, $EndR = \Im(R)$.

Лема 4. Елемент $a=\begin{pmatrix}\eta & o\\ \varphi & \kappa\end{pmatrix}\in HWr[X,R]$ є ідемпотентом тоді й лише тоді, коли $\eta^2=\eta,\ \kappa^2=\kappa$ і $Ker\kappa\subseteq Ker\varphi$.

Доведення. Нехай $a\in HWr[X,R]$ – ідемпотент. Тоді $a^2=\begin{pmatrix}\eta & o\\ \varphi & \kappa\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\eta & o\\ \varphi & \kappa\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\eta^2 & o\\ \varphi\eta\bullet\kappa\varphi & \kappa^2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\eta^2 & o\\ \kappa\varphi & \kappa^2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\eta & o\\ \varphi & \kappa\end{pmatrix}$. За означенням рівності двох елементів вінцевого голоморфу отримуємо такі умови:

$$\eta=\eta^2,\varphi=\kappa\varphi,\kappa=\kappa^2.$$

Нехай $(x,y)\in Ker\kappa$ – довільна пара. Тоді для будь-якого $x\in X$ маємо $x\varphi=x\kappa\varphi=y\kappa\varphi=y\varphi$, тобто $(x,y)\in Ker\varphi$. Таким чином, $Ker\kappa\subseteq Ker\varphi$.

Нехай для $a=\begin{pmatrix}\eta & o\\ \varphi & \kappa\end{pmatrix}\in HWr[X,R]$ виконуються умови леми. Оскільки κ ідемпотент, то $\left(x,x\kappa\right)\in Ker\kappa$ для всіх $x\in X$. Беручи до уваги, що $Ker\kappa\subseteq Ker\varphi$, отримуємо $\left(x,x\kappa\right)\in Ker\varphi$, звідки $x\varphi=x\kappa\varphi$. Тоді

$$a^2=\begin{pmatrix}\eta & o\\ \varphi & \kappa\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\eta & o\\ \varphi & \kappa\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\eta^2 & o\\ \varphi\eta\bullet\kappa\varphi & \kappa^2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\eta & o\\ \kappa\varphi & \kappa\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\eta & o\\ \varphi & \kappa\end{pmatrix}=a.$$ □

Лема 5. Нехай X,R такі множини, що $|X|=n,|R|=m$. Тоді кількість впорядкованих пар (κ,φ), де $\kappa\in I\left(\Im(X)\right)$, $\varphi\in Map(X,R)$, таких що $Ker\kappa\subseteq Ker\varphi$, дорівнює $\sum_{k=1}^{n}C_n^k k^{n-k}m^k$.

Доведення. Нехай $\kappa\in\Im(X)$ – ідемпотент такий, що $|\operatorname{Im}\kappa|=k$, $1\le k\le n$. Як відомо з леми 2 кількість таких ідемпотентів $C_n^k k^{n-k}$. Для кожного ідемпотента можна побудувати m^k відображень $\varphi\in Map(X,R)$ з урахуванням умови $Ker\kappa\subseteq Ker\varphi$. Таким чином, за правилом добутку кількість всіх впорядкованих пар ідемпотентів $\Im(X)$ рангу k та елементів $\varphi\in Map(X,R)$, що задовольняють умові леми буде $C_n^k k^{n-k}m^k$. Тоді шукана кількість дорівнює $\sum_{k=1}^{n}C_n^k k^{n-k}m^k$. □

Безпосереднім наслідком лем 2,4,5 є

Теорема 2. Нехай X,R такі множини, що $|R|=m,\ |X|=n.$ Тоді

$$\left|I\left(HWr[X,R]\right)\right|=\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{n}C_n^k C_m^j k^{n-k}j^{m-j}m^k.$$

5. Ідемпотенти вінцевого голоморфу напівгрупи з нульовим множенням та симетричної напівгрупи. Напівгрупа S з нулем 0 називається напівгрупою з нульовим множенням, якщо $a*b=0$ для всіх $a,b\in S$.

Нехай M – напівгрупа з нульовим множенням, а ν_o – константне нульове відображення з множини X у напівгрупу M [3]. Очевидною є така лема.

Лема 6. Елемент $a = \begin{pmatrix} \eta & o \\ \varphi & \kappa \end{pmatrix} \in HWr[X, M]$ є ідемпотентом тоді й лише тоді, коли $\eta^2 = \eta,\ \kappa^2 = \kappa$ і $\varphi = \nu_o$.

З'ясуємо далі з яких елементів складається напівгрупа $EndM$.

Лема 7. Перетворення $\varphi \in \Im(M)$ є ендоморфізмом напівгрупи M тоді й лише тоді, коли $\varphi(0) = 0$.

Доведення. Припустимо, що $\varphi \in EndM$ і $\varphi(0) \neq 0$. Тоді для будь-яких $a, b \in M$ маємо $\varphi(0) = \varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b) = 0$, що суперечить припущенню. Таким чином, $\varphi(0) = 0.$

Навпаки, якщо $\varphi \in \Im(M)$ таке, що $\varphi(0) = 0,$ то для будь-яких $a, b \in M$ $\varphi(ab) = \varphi(0) = 0 = \varphi(a)\varphi(b).$ Отже, $\varphi \in EndM$. □

Лема 8. Нехай $s \in N,\ M$ така множина, що $|M| = s + 1$. Тоді

$$|I(EndM)| = \sum_{i=1}^{s+1} C_s^{i-1} i^{s-i+1} .$$

Доведення. Нехай φ – ідемпотент напівгрупи $EndM$ такий, що $|\operatorname{Im}\varphi| = i$, $1 \le i \le s + 1$. Враховуючи, що $\varphi(0) = 0$, таких φ можна вибрати C_s^{i-1} способами. Оскільки на своєму образі φ діє тотожно, то будь-який елемент з множини $M \setminus \operatorname{Im}\varphi$ може відображатися у довільний елемент з $\operatorname{Im}\varphi$. Отже, можна побудувати $C_s^{i-1} i^{s-i+1}$ ідемпотентів рангу i . Таким чином, $|I(EndM)| = \sum_{i=1}^{s+1} C_s^{i-1} i^{s-i+1}$. □

З лем 2,6 –8 випливає

Теорема 3. Нехай $s \in N,\ X, M$ такі множини, що $|X| = n, |M| = s + 1.$ Тоді

$$\left| I\left(HWr[X, M] \right) \right| = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{s+1} C_s^{i-1} C_n^j i^{s-i+1} j^{n-j}.$$

Література

1. *Усенко В.М.* Эндоморфизмы вполне 0-простых полугрупп // Вопросы алгебры. – 1998. – №.13. – С. 92–119.

2. *Закусило А.И., Усенко В.М.* Голоморфные сплетения и сдвиговые оболочки полугрупп // Труды ИПММ НАН Украины. – 2005. – Т.11. – С. 49 – 60.

3. *Клиффорд А., Престон Г.* Алгебраическая теория полугрупп. – М. : Мир, 1972. – Т.1. – 285 с.