

<sup>1</sup> студентка 5 курсу фізико-математичного факультету, СДПУ

<sup>2</sup> доцент кафедри геометрії та МВМ, СДПУ

e-mail: juli4ka\_glad@mail.ru, kadubovs@ukr.net

## ДВОКОЛОРОВІ ХОРДОВІ $O$ -ДІАГРАМИ МІНІМАЛЬНОГО РОДУ

В роботі розглядається клас планарних двокольорових хордових діаграм з  $n$  хордами, що мають точно  $k \leq n$  циклів певного кольору. Для значень  $k = 7$  і  $k = 8$  встановлено формули підрахунку числа нееквівалентних таких діаграм відносно дії циклічної групи.

**Ключові слова:** хордова діаграма, цикл, циклічна група, дієдральна група.

### Вступ

Конструкції, схожі до кола з відміченими точками, зокрема хордові діаграми, ефективно використовують в багатьох галузях науки, зокрема математиці, фізиці, біології.

Нагадаємо, що хордовою діаграмою порядку  $n$  або, коротко,  $n$ -діаграмою називають конфігурацію на площині, що складається з кола,  $2n$  точок на ньому (які є вершинами правильного  $2n$ -кутника) та  $n$  хорд, що сполучають вказані точки. Хордові діаграми називають ізоморфними, якщо одну можна одержати з іншої в результаті деякого повороту. Діаграми називають еквівалентними, якщо їх можна сумістити за допомогою повороту або дзеркального відбиття, або ж їх композиції.

Питаннями переліку певних класів хордових діаграм займалась ціла низка відомих математиків, зокрема автори робіт [1-4]. Задача про підрахунок числа неізоморфних та нееквівалентних  $n$ -діаграм була повністю розв'язана в роботах [3], [4]. Підрахунок числа неізоморфних, зокрема двокольорових діаграм *фіксованого роду* є досить складною і в загальному випадку до сьогодні не розв'язаною задачею.

Відомими є результати лише для планарних (роду 0), тороїдальних (роду 1)  $n$ -діаграм та  $2m$ -діаграм максимального роду  $m$  [4].

Відомо, що двокольорові хордові  $O$ - і  $N$ -діаграми знаходять своє застосування в топології, зокрема при топологічній класифікації функцій певного класу на замкнених орієнтовних та відповідно не орієнтовних поверхнях фіксованого роду (напр. [8]).

В роботі [9] встановлено формули для підрахунку числа неізоморфних та нееквівалентних двокольорових  $O$ - і  $N$ -діаграм.

З урахуванням результатів роботи [5], в [10] встановлено формули для підрахунку числа неізоморфних та нееквівалентних  $O$ -діаграм, які мають один чорний (або ж білий) цикл. В роботі [8] підраховано число неізоморфних  $O$ -діаграм максимального роду (з одним чорним та одним білим циклом).

Задача про підрахунок числа неізоморфних та нееквівалентних планарних  $O$ -діаграм (роду 0) з  $n$  хордами повністю розв'язана в роботі [6]. Проте, до сьогодні залишається нерозв'язаною задача про підрахунок числа неізоморфних двокольорових  $O$ -діаграм роду 0 з фіксованим числом  $k \in [1, n]$  циклів певного кольору. Для довільного  $n$  і початкових  $1 \leq k \leq 6$  результати одержано в роботах [11, 12].

В даній роботі для довільного натурального  $n$ ,  $k = 7$  і  $k = 8$  встановлено формули для підрахунку числа неізоморфних таких діаграм. Крім того, для початкових  $n = 1, \dots, 18$  і  $1 \leq k \leq n$  наведено значення числа неізоморфних та нееквівалентних діаграм із вказаного класу.

## 1. Основні поняття та зауваження

**Означення 1.** Коло з  $2n$  точками на ньому, що є вершинами правильного  $2n$  кутника, дуги якого по чергово розфарбовані у два кольори (чорний і білий) та фіксованою нумерацією вершин за годинниковою стрілкою, будемо називати двокольоровим  $2n$ -шаблоном – рис. 1 а).

2-кольоровою хордовою  $n$ -діаграмою будемо називати  $n$ -діаграму, побудовану на основі двокольорового  $2n$ -шаблону.

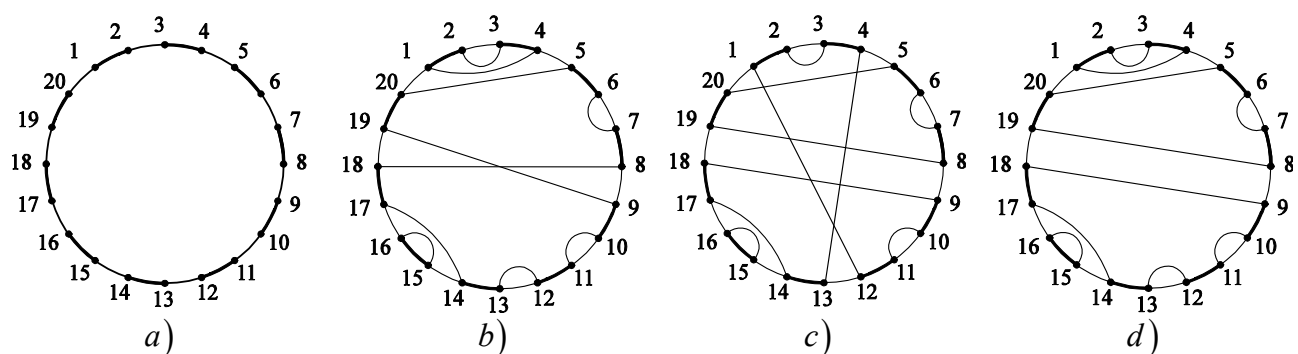


Рис. 1:

- a) двокольоровий 20-шаблон;
- b)  $N$ -діаграма (з 10 хордами), яка має 7 білих та 3 чорних циклів;
- c)  $O$ -діаграма (з 10 хордами), яка має 6 білих та 3 чорних циклів;
- d) планарна  $O$ -діаграма (з 10 хордами), яка має 7 білих та 4 чорних циклів

**Означення 2.** 2-кольорову  $n$ -діаграму, яка не містить (містить) хорди, що сполучають вершини з номерами однакової парності, називають  $O$ -діаграмою ( $N$ -діаграмою) – рис. 1 b), c).

**Означення 3.**  $O$ -діаграму з  $n$  хордами, яка не має хорд, що перетинаються, будемо називати діаграмою мінімального роду (роду 0) або ж планарною  $O$ -діаграмою – рис. 1 d).

**Означення 4.**  $b$ -циклом ( $w$ -циклом) 2-кольорової діаграми називають послідовність хорд та чорних (білих) дуг, які утворюють гомеоморфний образ (орієнтованого) кола – рис. 1 b) – d).

**Означення 5.** Множину планарних  $O$ -діаграм з  $n$  хордами, які мають точно  $k$  ( $1 \leq k \leq n$ ) білих ( $n - k + 1$  чорних) циклів позначатимемо  $\mathfrak{S}_{k,n}$ .

З робіт [11, 12] випливає, що число  $P_{k,n}^*$  неізоморфних діаграм з класу  $\mathfrak{S}_{k,n}$  можна обчислити за допомогою співвідношення

$$P_{k,n}^* = \frac{1}{n} (P_{k,n} + p(k, n)) = \frac{1}{n} \left( \frac{1}{n} C_n^k \cdot C_n^{k-1} + \sum_{i \neq n, i|n} \phi \left( \frac{n}{i} \right) p(k, n, i) \right), \quad (1)$$

де  $\frac{1}{n} C_n^k \cdot C_n^{k-1} = |\mathfrak{S}_{k,n}| = P_{k,n}$  – число діаграм з класу  $\mathfrak{S}_{k,n}$ ;  $\phi(q)$  – функція Ейлера (число натуральних менших за  $q$  чисел взаємно простих із ним);  $p(k, n, i)$  – число діаграм з класу  $\mathfrak{S}_{k,n}$  (побудованих на двокольоровому  $2n$ -шаблоні), які самосуміщаються при повороті на кут  $\omega_i = \frac{2\pi}{n}i$  (навколо центра шаблону), а підсумовування ведеться за всіма дільниками числа  $n$  за винятком  $n$ .

З урахуванням результатів робіт [7, 11], число нееквівалентних діаграм з класу можна обчислити за допомогою співвідношення

$$P_{k,n}^{**} = \frac{1}{2} \left( P_{k,n}^* + C_{\lfloor \frac{k-1}{2} \rfloor} \cdot C_{\lfloor \frac{k-1}{2} \rfloor} \right), \quad (2)$$

де  $\lfloor \cdot \rfloor$  – ціла частина числа;  $\lceil \cdot \rceil$  – функція «потолок» – округлення до найближчого більшого цілого числа, а величина  $T(n, k) = C_{\lfloor \frac{k-1}{2} \rfloor} \cdot C_{\lfloor \frac{k-1}{2} \rfloor}$  співпадає з числом об'єктів, відомих як «symmetric Dyck paths of semi-length  $n$  with  $k$  peaks».

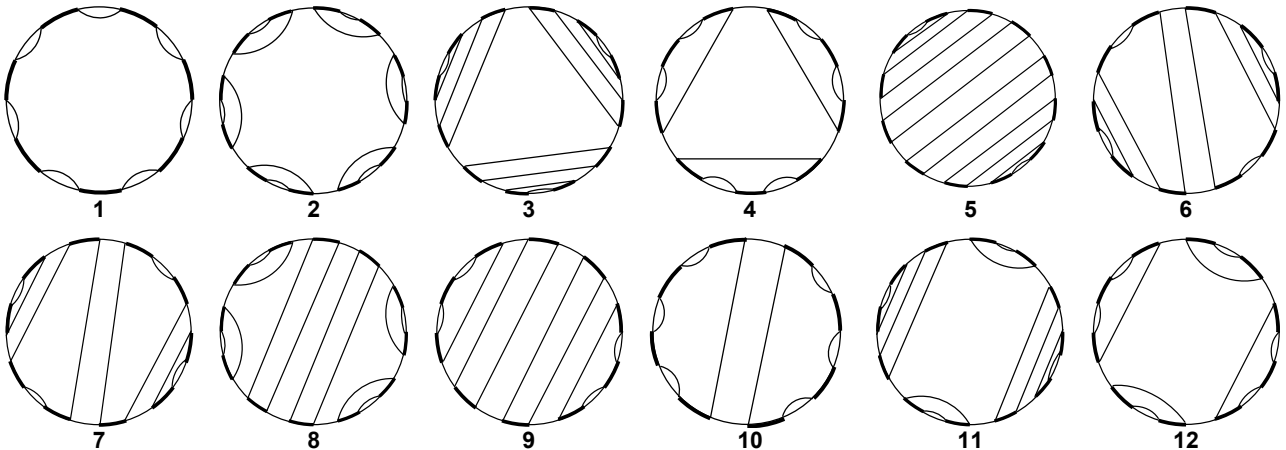
Більш повну інформацію можна знайти, наприклад в роботах [7]–[12].

## 2. Число неізоморфних діаграм з класу $\mathfrak{S}_{7,n}$

**Лема 1.** Число неізоморфних діаграм з класу  $\mathfrak{S}_{7,n}$  можна обчислити за допомогою співвідношень:

$$P_{7,n}^* = \frac{1}{n} \left( \frac{1}{n} \cdot C_n^7 \cdot C_n^6 + p(7, n) \right), \quad p(7, n) =$$

$$= \begin{cases} 0, & n \neq 2k \neq 3m \neq 7l \\ \phi(7)C_{\frac{n}{7}}^1, & n = 7l \neq 2k \neq 3m \\ 20C_{\frac{n}{2}}^6 + 20C_{\frac{n}{2}}^5 + 4C_{\frac{n}{2}}^4, & n = 2k \neq 3m \neq 7l \\ \phi(3) \cdot (6C_{\frac{n}{3}}^4 + 3C_{\frac{n}{3}}^3), & n = 3m \neq 2k \neq 7l \\ \phi(6) \cdot 2C_{\frac{n}{6}}^2 + \phi(3) \cdot (6C_{\frac{n}{3}}^4 + 3C_{\frac{n}{3}}^3) + 20C_{\frac{n}{2}}^6 + 20C_{\frac{n}{2}}^5 + 4C_{\frac{n}{2}}^4, & n = 6k \neq 7l \\ \phi(7)C_{\frac{n}{7}}^1 + 20C_{\frac{n}{2}}^6 + 20C_{\frac{n}{2}}^5 + 4C_{\frac{n}{2}}^4, & n = 14k \neq 3m \\ \phi(7)C_{\frac{n}{7}}^1 + \phi(3) \cdot (6C_{\frac{n}{3}}^4 + 3C_{\frac{n}{3}}^3), & n = 21k \neq 2m \\ \phi(6) \cdot 2C_{\frac{n}{6}}^2 + \phi(3) \cdot (6C_{\frac{n}{3}}^4 + 3C_{\frac{n}{3}}^3) + 20C_{\frac{n}{2}}^6 + 20C_{\frac{n}{2}}^5 + 4C_{\frac{n}{2}}^4 + \phi(7)C_{\frac{n}{7}}^1, & n = 42k \end{cases} \quad (3)$$



**Рис. 2:** Всі типи діаграм з класу  $\mathfrak{S}_{7,n}$ , які самосуміщаються при повороті на певний кут

**Доведення.** Всі типи діаграм класу  $\mathfrak{S}_{7,n}$ , які самосуміщаються при повороті на певний кут  $\omega = \frac{2\pi}{2n} \cdot 2i, i = 1, \dots, n - 1$  наведено на рис.2.

Позначимо через  $A_n, B_n, C_n, D_n, E_n, F_n, G_n, H_n, K_n, M_n, R_n, S_n$  число діаграм 1-го, 2-го, ... та 12-го типу відповідно.

Нехай далі  $A_n^*, B_n^*, C_n^*, D_n^*, E_n^*, F_n^*, G_n^*, H_n^*, K_n^*, M_n^*, R_n^*, S_n^*$  – число неізоморфних діаграм 1-го, 2-го, ... та 12-го типу відповідно. Тоді  $P_{7,n}^* =$

$$= \frac{1}{n} \left( \frac{1}{n} C_n^7 \cdot C_n^6 - (A_n + B_n + C_n + D_n + E_n + F_n + G_n + H_n + K_n + M_n + R_n + S_n) \right) +$$

$$+ A_n^* + B_n^* + C_n^* + D_n^* + E_n^* + F_n^* + G_n^* + H_n^* + K_n^* + M_n^* + R_n^* + S_n^* \quad (4)$$

Обчислимо окремо число неізоморфних діаграм кожного з дванадцяти вказаних типів.

1) Діаграми першого типу самосуміщаються при повороті на певний кут  $\omega = \frac{2\pi}{2n} \cdot 2i$ ,  $i = 1, \dots, n-1$  (за годинниковою стрілкою) лише за умов коли  $n$  ділиться на 7, а поворот здійснюється на кут кратний куту  $\omega = \frac{2\pi}{7}$  (при  $i = \frac{n}{7}$ ). Загальне число діаграм першого типу, які самосуміщаються при повороті на кут  $\frac{2\pi}{7}$  становить  $a_{n,7} = \begin{cases} 0, & n \neq 7k \\ C_{\frac{n}{7}}^1, & n = 7k. \end{cases}$  Тому число неізоморфних діаграм першого типу можна обчислити за допомогою співвідношень

$$A_n^* = \frac{1}{n} \left( A_n + \phi(7)a_{n,7} \right) = \begin{cases} \frac{1}{n}A_n, & n \neq 7k \\ \frac{1}{n} \left( A_n + \phi(7)C_{\frac{n}{7}}^1 \right), & n = 7k. \end{cases} \quad (5)$$

2) Діаграми другого типу самосуміщаються при повороті на певний кут  $\omega = \frac{2\pi}{2n} \cdot 2i$  ( $i = 1, \dots, n-1$ ) лише за умов коли  $n$  ділиться на 2, на 3 або на 6, а поворот здійснюється на кут кратний куту  $\omega = \pi$  (при  $i = \frac{n}{2}$ ), куту  $\omega = \frac{2\pi}{3}$  (при  $i = \frac{n}{3}$ ), куту  $\omega = \frac{\pi}{3}$  (при  $i = \frac{n}{6}$ ).

Загальне число діаграм другого типу, які самосуміщаються при повороті на кут  $\pi$  становить  $b_{n,2} = \begin{cases} 0, & n \neq 2k \\ 2C_{\frac{n}{2}}^6, & n = 2k. \end{cases}$

Загальне число діаграм другого типу, які самосуміщаються при повороті на кут  $\frac{2\pi}{3}$  становить  $b_{n,3} = \begin{cases} 0, & n \neq 3k \\ 2C_{\frac{n}{3}}^4, & n = 3k. \end{cases}$

Загальне число діаграм другого типу, які самосуміщаються при повороті на кут  $\frac{\pi}{3}$  становить  $b_{n,6} = \begin{cases} 0, & n \neq 6k \\ 2C_{\frac{n}{6}}^2, & n = 6k. \end{cases}$

Тому число неізоморфних діаграм другого типу можна обчислити за допомогою співвідношень

$$B_n^* = \frac{1}{n} \left( B_n + \phi(2)b_{n,2} + \phi(3)b_{n,3} + \phi(6)b_{n,6} \right) =$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{n}B_n, & n = 6k \pm 1 \\ \frac{1}{n} \left( B_n + 2C_{\frac{n}{2}}^6 \right), & n = 6k \pm 2 \\ \frac{1}{n} \left( B_n + \phi(3)2C_{\frac{n}{3}}^4 \right), & n = 6k \pm 3 \\ \frac{1}{n} \left( B_n + 2C_{\frac{n}{2}}^6 + \phi(3)2C_{\frac{n}{3}}^4 + \phi(6)2C_{\frac{n}{6}}^2 \right), & n = 6k. \end{cases} \quad (6)$$

3) Діаграми третього типу самосуміщаються при повороті на певний кут  $\omega = \frac{2\pi}{2n} \cdot 2i$  ( $i = 1, \dots, n-1$ ) лише за умов коли  $n$  ділиться на 3, а поворот

здійснюється на кут кратний куту  $\omega = \frac{2\pi}{3}$  (при  $i = \frac{n}{3}$ ). Загальне число діаграм третього типу, які самосуміщаються при повороті на кут  $\frac{2\pi}{3}$  становить

$c_{n,3} = \begin{cases} 0, & n \neq 3k \\ 4C_{\frac{n}{3}}^4, & n = 3k. \end{cases}$  Тому число неізоморфних діаграм третього типу можна обчислити за допомогою співвідношень

$$C_n^* = \frac{1}{n} \left( C_n + \phi(3)c_{n,3} \right) = \begin{cases} \frac{1}{n} C_n, & n \neq 3k \\ \frac{1}{n} \left( C_n + \phi(3)4C_{\frac{n}{3}}^4 \right), & n = 3k. \end{cases} \quad (7)$$

4) Діаграми четвертого типу самосуміщаються при повороті на певний кут  $\omega = \frac{2\pi}{2n} \cdot 2i$  ( $i = 1, \dots, n-1$ ) лише за умов коли  $n$  ділиться на 3, а поворот здійснюється на кут кратний куту  $\omega = \frac{2\pi}{3}$  (при  $i = \frac{n}{3}$ ). Загальне число діаграм четвертого типу, які самосуміщаються при повороті на кут  $\frac{2\pi}{3}$  становить

$d_{n,3} = \begin{cases} 0, & n \neq 3k \\ 3C_{\frac{n}{3}}^3, & n = 3k. \end{cases}$  Тому число неізоморфних діаграм четвертого типу можна обчислити за допомогою співвідношень

$$D_n^* = \frac{1}{n} \left( D_n + \phi(3)d_{n,3} \right) = \begin{cases} \frac{1}{n} D_n, & n \neq 3k \\ \frac{1}{n} \left( D_n + \phi(3)3C_{\frac{n}{3}}^3 \right), & n = 3k. \end{cases} \quad (8)$$

5) Діаграми п'ятого типу самосуміщаються при повороті на певний кут  $\omega = \frac{2\pi}{2n} \cdot 2i$ ,  $i = 1, \dots, n-1$  (за годинниковою стрілкою) лише за умов коли  $n$  ділиться на 2, а поворот здійснюється на кут кратний куту  $\omega = \pi$  (при  $i = \frac{n}{2}$ ). Загальне число діаграм п'ятого типу, які самосуміщаються при повороті на кут  $\pi$  становить

$e_{n,2} = \begin{cases} 0, & n \neq 2k \\ 6C_{\frac{n}{2}}^6, & n = 2k. \end{cases}$  Тому число неізоморфних діаграм п'ятого типу можна обчислити за допомогою співвідношень

$$E_n^* = \frac{1}{n} \left( E_n + \phi(2)e_{n,2} \right) = \begin{cases} \frac{1}{n} E_n, & n \neq 2k \\ \frac{1}{n} \left( E_n + 6C_{\frac{n}{2}}^6 \right), & n = 2k. \end{cases} \quad (9)$$

6) Діаграми шостого типу самосуміщаються при повороті на певний кут  $\omega = \frac{2\pi}{2n} \cdot 2i$  ( $i = 1, \dots, n-1$ ) лише за умов коли  $n$  ділиться на 2, а поворот здійснюється на кут кратний куту  $\omega = \pi$  (при  $i = \frac{n}{2}$ ). Загальне число діаграм шостого типу, які самосуміщаються при повороті на кут  $\pi$  становить

$f_{n,2} = \begin{cases} 0, & n \neq 2k \\ 5C_{\frac{n}{2}}^5, & n = 2k. \end{cases}$  Тому число неізоморфних діаграм шостого типу можна обчислити за допомогою співвідношень

$$F_n^* = \frac{1}{n} \left( F_n + \phi(2)f_{n,2} \right) = \begin{cases} \frac{1}{n} F_n, & n \neq 2k \\ \frac{1}{n} \left( F_n + 5C_{\frac{n}{2}}^5 \right), & n = 2k. \end{cases} \quad (10)$$

7) Діаграми сьомого типу самосуміщаються при повороті на певний кут  $\omega = \frac{2\pi}{2n} \cdot 2i$  ( $i = 1, \dots, n-1$ ) лише за умов коли  $n$  ділиться на 2, а поворот здійснюється на кут кратний куту  $\omega = \pi$  (при  $i = \frac{n}{2}$ ). Загальне число діаграм сьомого типу, які самосуміщаються при повороті на кут  $\pi$  становить

$g_{n,2} = \begin{cases} 0, & n \neq 2k \\ 5C_{\frac{n}{2}}^5, & n = 2k. \end{cases}$  Тому число неізоморфних діаграм сьомого типу можна обчислити за допомогою співвідношень

$$G_n^* = \frac{1}{n} \left( G_n + \phi(2)g_{n,2} \right) = \begin{cases} \frac{1}{n}G_n, & n \neq 2k \\ \frac{1}{n} \left( G_n + 5C_{\frac{n}{2}}^5 \right), & n = 2k. \end{cases} \quad (11)$$

8) Діаграми восьмого типу самосуміщаються при повороті на певний кут  $\omega = \frac{2\pi}{2n} \cdot 2i$  ( $i = 1, \dots, n-1$ ) лише за умов коли  $n$  ділиться на 2, а поворот здійснюється на кут кратний куту  $\omega = \pi$  (при  $i = \frac{n}{2}$ ). Загальне число діаграм восьмого типу, які самосуміщаються при повороті на кут  $\pi$  становить

$h_{n,2} = \begin{cases} 0, & n \neq 2k \\ 6C_{\frac{n}{2}}^6, & n = 2k. \end{cases}$  Тому число неізоморфних діаграм восьмого типу можна обчислити за допомогою співвідношень

$$H_n^* = \frac{1}{n} \left( H_n + \phi(2)h_{n,2} \right) = \begin{cases} \frac{1}{n}H_n, & n \neq 2k \\ \frac{1}{n} \left( H_n + 6C_{\frac{n}{2}}^6 \right), & n = 2k. \end{cases} \quad (12)$$

9) Діаграми дев'ятого типу самосуміщаються при повороті на певний кут  $\omega = \frac{2\pi}{2n} \cdot 2i$ ,  $i = 1, \dots, n-1$  (за годинниковою стрілкою) лише за умов коли  $n$  ділиться на 2, а поворот здійснюється на кут кратний куту  $\omega = \pi$  (при  $i = \frac{n}{2}$ ). Загальне число діаграм дев'ятого типу, які самосуміщаються при по-

вороті на кут  $\pi$  становить  $k_{n,2} = \begin{cases} 0, & n \neq 2l \\ 5C_{\frac{n}{2}}^5, & n = 2l. \end{cases}$  Тому число неізоморфних діаграм дев'ятого типу можна обчислити за допомогою співвідношень

$$K_n^* = \frac{1}{n} \left( K_n + \phi(2)k_{n,2} \right) = \begin{cases} \frac{1}{n}K_n, & n \neq 2l \\ \frac{1}{n} \left( K_n + 5C_{\frac{n}{2}}^5 \right), & n = 2l. \end{cases} \quad (13)$$

10) Діаграми десятого типу самосуміщаються при повороті на певний кут  $\omega = \frac{2\pi}{2n} \cdot 2i$  ( $i = 1, \dots, n-1$ ) лише за умов коли  $n$  ділиться на 2, а поворот здійснюється на кут кратний куту  $\omega = \pi$  (при  $i = \frac{n}{2}$ ). Загальне число діаграм десятого типу, які самосуміщаються при повороті на кут  $\pi$  становить

$m_{n,2} = \begin{cases} 0, & n \neq 2k \\ 4C_{\frac{n}{2}}^4, & n = 2k. \end{cases}$

Тому число неізоморфних діаграм десятого типу можна обчислити за допомогою співвідношень

$$M_n^* = \frac{1}{n} \left( M_n + \phi(2)m_{n,2} \right) = \begin{cases} \frac{1}{n}M_n, & n \neq 2k \\ \frac{1}{n} \left( M_n + 4C_{\frac{n}{2}}^4 \right), & n = 2k. \end{cases} \quad (14)$$

11) Діаграми одинадцятого типу самосуміщаються при повороті на певний кут  $\omega = \frac{2\pi}{2n} \cdot 2i$  ( $i = 1, \dots, n - 1$ ) лише за умов коли  $n$  ділиться на 2, а поворот здійснюється на кут кратний куту  $\omega = \pi$  (при  $i = \frac{n}{2}$ ).

Загальне число діаграм одинадцятого типу, які самосуміщаються при повороті на кут  $\pi$  становить  $r_{n,2} = \begin{cases} 0, & n \neq 2k \\ 6C_{\frac{n}{2}}^6, & n = 2k. \end{cases}$

Тому число неізоморфних діаграм одинадцятого типу можна обчислити за допомогою співвідношень

$$R_n^* = \frac{1}{n} \left( R_n + \phi(2)r_{n,2} \right) = \begin{cases} \frac{1}{n}R_n, & n \neq 2k \\ \frac{1}{n} \left( R_n + 6C_{\frac{n}{2}}^6 \right), & n = 2k. \end{cases} \quad (15)$$

12) Діаграми дванадцятого типу самосуміщаються при повороті на певний кут  $\omega = \frac{2\pi}{2n} \cdot 2i$  ( $i = 1, \dots, n - 1$ ) лише за умов коли  $n$  ділиться на 2, а поворот здійснюється на кут кратний куту  $\omega = \pi$  (при  $i = \frac{n}{2}$ ).

Загальне число діаграм дванадцятого типу, які самосуміщаються при повороті на кут  $\pi$  становить  $s_{n,2} = \begin{cases} 0, & n \neq 2k \\ 5C_{\frac{n}{2}}^5, & n = 2k. \end{cases}$

Тому число неізоморфних діаграм дванадцятого типу можна обчислити за допомогою співвідношень

$$S_n^* = \frac{1}{n} \left( S_n + \phi(2)s_{n,2} \right) = \begin{cases} \frac{1}{n}S_n, & n \neq 2k \\ \frac{1}{n} \left( S_n + 5C_{\frac{n}{2}}^5 \right), & n = 2k. \end{cases} \quad (16)$$

З урахуванням співвідношень (5) – (16) маємо справедливість (3).

### 3. Число неізоморфних діаграм з класу $\mathfrak{S}_{8,n}$

Не важко перевірити, що всі можливі типи діаграм з класу  $\mathfrak{S}_{8,n}$ , які самосуміщаються при повороті на певний кут  $\omega_i = \frac{2\pi}{2n}i$ , вичерпуються діаграмами типу 1 – 18, наведеними на рис. 3.

Повторюючи міркування, аналогічні тим, що були використанні при доведенні леми 1, можна встановити справедливість леми 2.



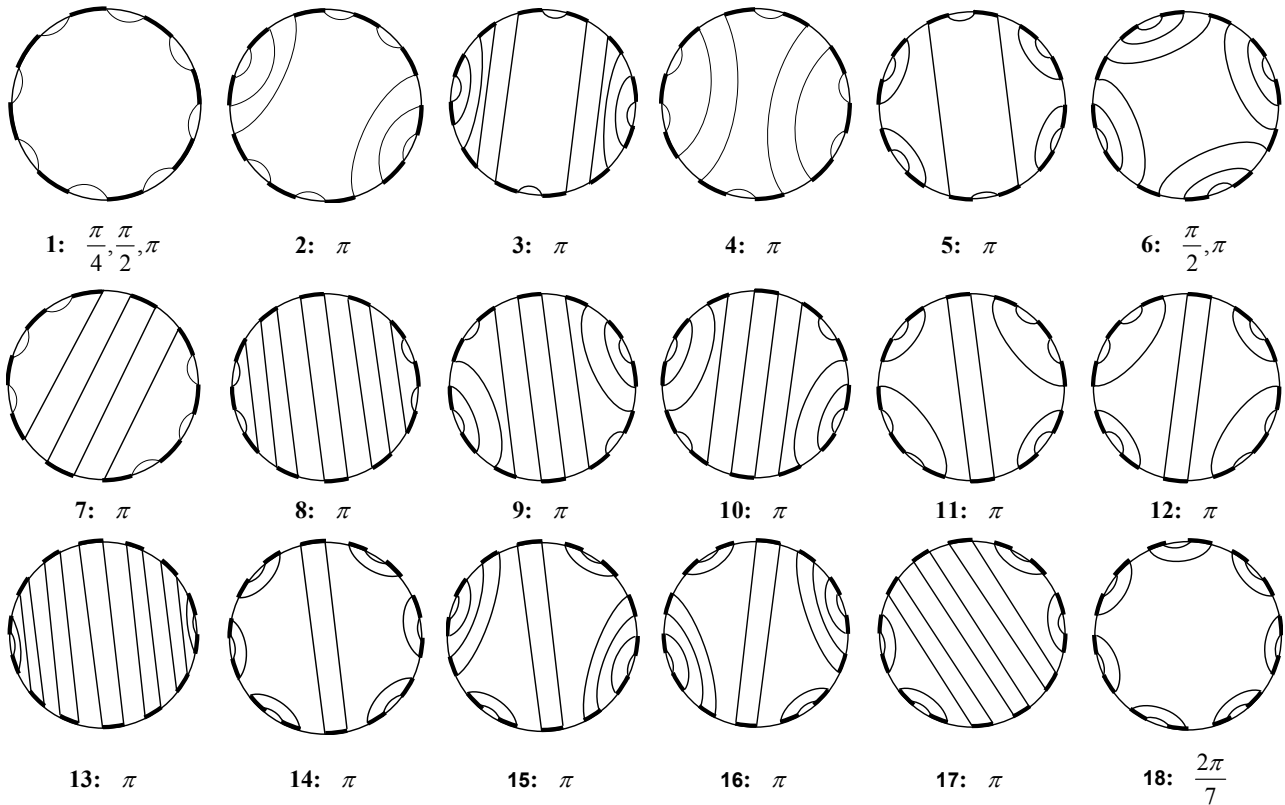


Рис. 3: Всі типи діаграм з класу  $\mathfrak{S}_{8,n}$ , які самосуміщаються при повороті на певний кут

**Лема 2.** Число неізоморфних діаграм з класу  $\mathfrak{S}_{8,n}$  можна обчислити за допомогою співвідношень:

$$P_{8,n}^* = \frac{1}{n} \left( \frac{1}{n} \cdot C_n^8 \cdot C_n^7 + p(8, n) \right), p(8, n) =$$

$$= \begin{cases} 0, & n \neq 2k \neq 7p \\ C_{\frac{n}{2}}^4 + 15C_{\frac{n}{2}}^5 + 45C_{\frac{n}{2}}^6 + 35C_{\frac{n}{2}}^7, & n = 2k \neq 4m \neq 7p \\ \phi(4)(C_{\frac{n}{4}}^2 + 3C_{\frac{n}{4}}^3) + C_{\frac{n}{2}}^4 + 15C_{\frac{n}{2}}^5 + 45C_{\frac{n}{2}}^6 + 35C_{\frac{n}{2}}^7, & n = 4k \neq 8l \neq 7p \\ \phi(8)C_{\frac{n}{8}}^1 + \phi(4)(C_{\frac{n}{4}}^2 + 3C_{\frac{n}{4}}^3) + C_{\frac{n}{2}}^4 + 15C_{\frac{n}{2}}^5 + 45C_{\frac{n}{2}}^6 + 35C_{\frac{n}{2}}^7, & n = 8k \neq 7p \\ \phi(7)2C_{\frac{n}{7}}^2, & n = 7k \neq 2m \\ \phi(7)2C_{\frac{n}{7}}^2 + C_{\frac{n}{2}}^4 + 15C_{\frac{n}{2}}^5 + 45C_{\frac{n}{2}}^6 + 35C_{\frac{n}{2}}^7, & n = 14k \neq 4m \\ \phi(7)2C_{\frac{n}{7}}^2 + \phi(4)(C_{\frac{n}{4}}^2 + 3C_{\frac{n}{4}}^3) + C_{\frac{n}{2}}^4 + 15C_{\frac{n}{2}}^5 + 45C_{\frac{n}{2}}^6 + 35C_{\frac{n}{2}}^7, & n = 28k \neq 8l \\ \phi(7) \cdot 2C_{\frac{n}{7}}^2 + \phi(8)C_{\frac{n}{8}}^1 + \phi(4)(C_{\frac{n}{4}}^2 + 3C_{\frac{n}{4}}^3) + C_{\frac{n}{2}}^4 + 15C_{\frac{n}{2}}^5 + 45C_{\frac{n}{2}}^6 + 35C_{\frac{n}{2}}^7, & n = 56k \end{cases} \quad (17)$$

**Зауваження 1.** З урахуванням результатів робіт [11] і [12], для довільного  $n \in N$  і простого  $k = 2, 3, 5, 7$  число неізоморфних діаграм з класу  $\mathfrak{S}_{k,n}$  можна обчислити за допомогою наступних співвідношень

$$P_{k,n}^* = \frac{1}{n} \left( \frac{1}{n} \cdot C_n^k \cdot C_n^{k-1} + p_{\frac{n}{k}} + p(k, n) \right), \quad \text{де} \quad (18)$$

$$p_k^n = \begin{cases} 0, & \text{якщо } \frac{n}{k} \notin Z \\ \phi(k) \cdot \frac{n}{k}, & \text{якщо } \frac{n}{k} \in Z, \end{cases} \quad (19)$$

$$p(k, n) = \sum_{j|НСД(n, k-1), j \neq 1} \phi(j) \cdot \left( \frac{k-1}{j} + 1 \right) \cdot C_{\frac{n}{j}}^{\frac{k-1}{j}+1} \cdot C_{\frac{n}{j}}^{\frac{k-1}{j}}. \quad (20)$$

Крім того, безпосередня перевірка (при  $2 \leq n \leq 18$ ) інших простих  $k$  дозволяє висунути **гіпотезу** про те, що для довільного простого  $k$  число неізоморфних діаграм з класу  $\mathfrak{S}_{k,n}$  можна обчислити за допомогою співвідношень (18) – (20).

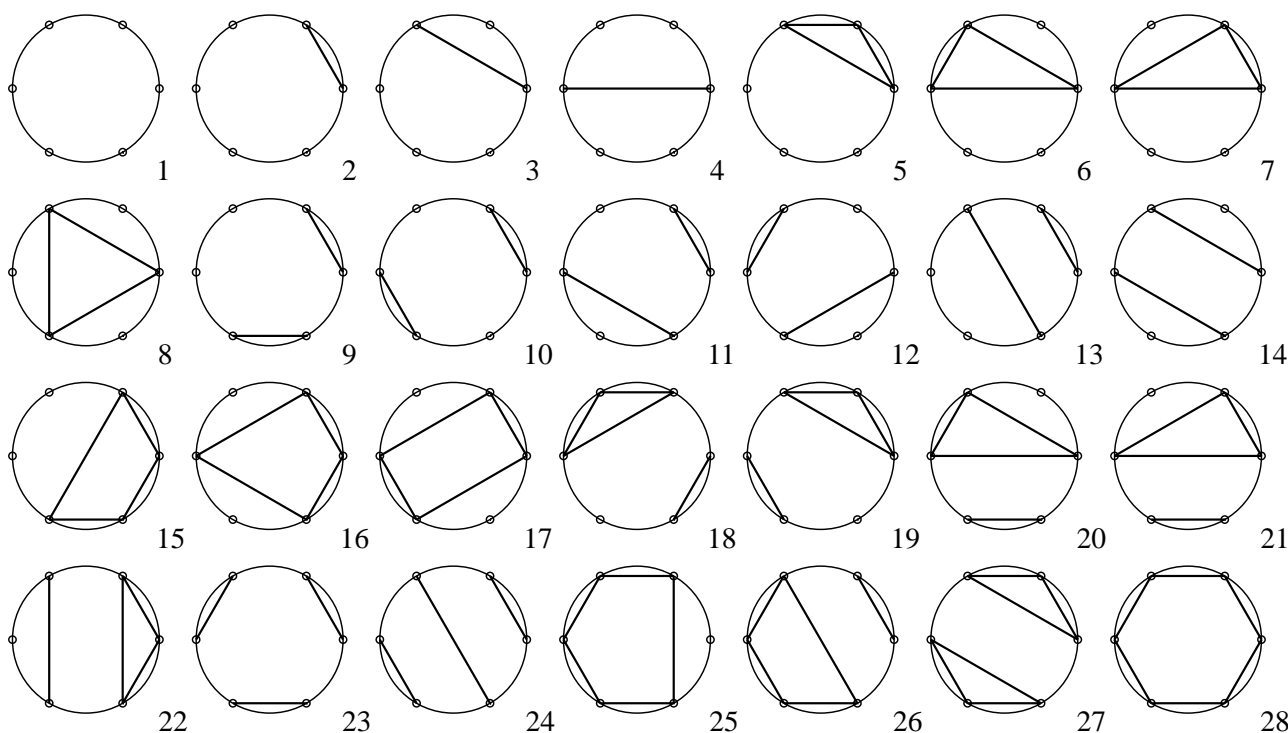


Рис. 4: Всі неізоморфні планарні двокольорові  $O$ -діаграми з 6 хордами:

точки на колах служать зображенням чорних дуг, ізолювана точка – зображенням чорної дуги разом із хордою, що сполучає її кінці, ізолюваний відрізок – зображенням паралельних хорд і т.п.;

**серед них:** 1 з класу  $\mathfrak{S}_{1,6}$ , 3 – з  $\mathfrak{S}_{2,6}$ , 10 – з  $\mathfrak{S}_{3,6}$ , 10 – з  $\mathfrak{S}_{4,6}$ , 3 – з  $\mathfrak{S}_{5,6}$  і 1 – з  $\mathfrak{S}_{6,6}$ .

## Висновки

З урахуванням останнього зауваження автори впевнені в тому, що дослідження в цьому напрямку можна успішно продовжити, узагальнивши одержані результати для діаграм з класу  $\mathfrak{S}_{k,n}$  ( $\forall n \in N$ ) не лише для довільного простого, а й довільного непарного  $1 \leq k \leq n$ .

$n \setminus k$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
2	1	1																
3	1	1	1															
4	1	2	2	1														
5	1	2	4	2	1													
6	1	3	10	10	3	1												
7	1	3	15	25	15	3	1											
8	1	4	26	64	64	26	4	1										
9	1	4	38	132	196	132	38	4	1									
10	1	5	56	256	536	536	256	56	5	1								
11	1	5	75	450	1260	1764	1260	450	75	5	1							
12	1	6	104	765	2736	5102	5102	2736	765	104	6	1						
13	1	6	132	1210	5445	13068	17424	13068	5445	1210	132	6	1					
14	1	7	172	1868	10247	30711	52634	30711	10247	1868	172	7	1					
15	1	7	213	2763	18219	66807	143151	184041	143151	66807	18219	2763	213	7	1			
16	1	8	266	3994	31092	136710	357980	575284	357980	136710	31092	3994	266	8	1			
17	1	8	320	5600	50960	264992	832832	1635920	2044900	1635920	832832	264992	50960	320	8	1		
18	1	9	390	7726	80976	491054	1823676	4298400	6566914	6566914	4298400	1823676	491054	80976	390	9	1	

$n \setminus k$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
2	1	1																
3	1	1	1															
4	1	2	2	1														
5	1	2	4	2	1													
6	1	3	8	8	3	1												
7	1	3	12	17	12	3	1											
8	1	4	19	41	41	19	4	1										
9	1	4	27	78	116	78	27	4	1									
10	1	5	38	148	298	298	148	38	5	1								
11	1	5	50	250	680	932	680	250	50	5	1							
12	1	6	67	420	1443	2651	2651	1443	420	67	6	1						
13	1	6	84	650	2835	6684	8912	6684	2835	650	84	6	1					
14	1	7	107	997	5281	15618	26667	26667	15618	5281	997	107	7	1				
15	1	7	131	1455	9330	33771	72188	92633	72188	33771	9330	1455	131	7	1			
16	1	8	161	2095	15840	68943	179970	288867	288867	179970	68943	15840	2095	161	8	1		
17	1	8	192	2912	25872	133280	417984	819920	1024900	819920	417984	133280	25872	2912	192	8	1	
18	1	9	231	4007	40992	246703	914190	2152728	3287867	3287867	2152728	914190	246703	40992	4007	231	9	1

Табл. 1: Початкові значення числа неізоморфних та нееквівалентних діаграм з класу  $\mathcal{S}_{k,n}$  для  $1 \leq n \leq 18$

## Література

- [1] *Walsh T.R.S., Lehman A.B.* Counting rooted maps by genus I,II // J. Combin.Theory (B). – 1972. – 13.-p.192-218, 122-141.
- [2] *Harer J., Zagier D.* The Euler characteristic of the moduli space of curves // Inventiones mathematical – 1986. – 85. – p.457-485.
- [3] *Stoimenov A.* On the number of chord diagrams // Discrete Math. – 2000. – 218. N1-3-p.209-233.
- [4] *Gori R., Marcus M.* Counting non-isomorphic chord diagrams // Theoretical Computer Science - 1998-204. – p. 55-73.
- [5] *Vella A.* Pattern avoidance in permutations: linear and cyclic orders // The electronic journal of combinatorics 10 (2003).
- [6] *Callan D., Smiley L.* Non-crossing Partitions under Rotation and Reflection // <http://arxiv.org/abs/math.CO/0510447> (2004).
- [7] *P.Barry* On Integer-Sequence-Based Constructions of Generalized Pascal Triangles // Journal of Integer Sequences, Vol. 9, 2006.
- [8] *Кадубовський О.А.*, Про один клас хордових діаграм максимального роду: Вісник Київського університету ім. Тараса Шевченка. Серія: фізико-математичні науки. – Вип. 1, 2006. – С. 17-27.
- [9] *Кадубовський О.А., Сторожилова О.В., Сторожилова Н.В.*, Двокольорові  $O$ - і  $N$ -діаграми: Пошуки і знахідки. СЕРІЯ: фізико-математичні науки. Матеріали наукової конференції СДПУ – 2010 / Укладач В.К. Сарієнко. – Вип. 1, Том IV. – Слов'янськ: СДПУ, 2010. – С. 41-50.
- [10] *Кадубовський О.А., Саприкіна Ю.С., Мазур С.Ю.*, Двокольорові  $O$ -діаграми з одним чорним циклом: Пошуки і знахідки. СЕРІЯ: фізико-математичні науки. Матеріали наукової конференції СДПУ – 2010 / Укладач В.К. Сарієнко. – Вип. 1, Том IV. – Слов'янськ: СДПУ, 2010. – С. 51-60.
- [11] *Кадубовський О.*, Про число топологічно нееквівалентних функцій з однією виродженою критичною точкою типу сідла на двовимірній сфері: Геометрія та топологія функцій: Збірник праць Інституту математики НАН України. – Т 7, № 4, 2010. – С. 87-107.
- [12] *Кадубовський О.А.*, Про один клас гладких функцій на двовимірній сфері: Вісник СДПУ. Математика. – Слов'янськ: СДПУ. – Вип. 1(4), 2010. – С. 39-57.