МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

ДЕРЖАВНИЙ ВИЩИЙ НАВЧАЛЬНИЙ ЗАКЛАД
«ДОНБАСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ ПЕДАГОГІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ»

ISSN 2413-2667 (Print)
ISSN 2415-3079 (Online)

ЗБІРНИК НАУКОВИХ ПРАЦЬ фізико-математичного факультету ДДПУ

Заснований у 2010 році

Випуск №6

Рекомендовано вченою радою
Донбаського державного педагогічного університету
в якості наукового видання

Слов'янськ – 2016

УДК 51+53+37.016:[51+53+004].
ББК 22.1+22.3+74.262.21+74.262.22.

З – 414

Збірник наукових праць фізико-математичного факультету ДДПУ. — Слов'янськ : ДДПУ, 2016 . — Випуск № 6 — 168 с.

Для студентів, аспірантів та науковців в галузі фізико-математичних наук; вчителів та викладачів фізико-математичних дисциплін в ЗОШ та ВНЗ.

РЕДАКЦІЙНА КОЛЕГІЯ

доктор фіз.-мат. наук, професор Надточій В.О. – головний редактор (ДДПУ);
доктор фіз.-мат. наук, доцент Костіков О.П. – заст. гол. ред. (ДДПУ);
кандидат фіз.-мат. наук, доцент Чайченко С.О. – заст. гол. ред. (ДДПУ);
доктор фіз.-мат. наук, професор Нечволод М.К. (ДДПУ);
кандидат фіз.-мат. наук, доцент Новіков О.О. (ДДПУ);
кандидат фіз.-мат. наук, доцент Божко В.О. (ДДПУ);
кандидат фіз.-мат. наук, доцент Чуйко О.В. (ДДПУ);
кандидат фіз.-мат. наук, доцент Рябухо О.М.
(«Керченський державний морський технологічний університет»);
кандидат фіз.-мат. наук, доцент Величко В.Є. (ДДПУ);
кандидат фіз.-мат. наук, доцент Кадубовський О.А. (ДДПУ).

РЕЦЕНЗЕНТИ

АВРАМЕНКО О.В. — доктор фізико-математичних наук, професор, завідувач кафедри прикладної математики, статистики та економіки Кіровоградського державного педагогічного університету ім. В. Винниченка

САВЧЕНКО А.С. — кандидат фізико-математичних наук, старший науковий співробітник Донецького фізико-технічного інституту ім. О.О. Галкіна НАН України;

РЕКОМЕНДОВАНО ДО ДРУКУ

вченою радою державного вищого навчального закладу «Донбаський державний педагогічний університет», протокол № **8** від **21.04.2016**р.

За достовірність посилань, цитат і результатів експериментів відповідальність несуть автори.

© Слов'янськ, ДДПУ, 2016

Від редакційної колегії

Шановні читачі!

Ви тримаєте в руках *шостий* випуск «Збірника наукових праць фізико-математичного факультету ДДПУ» державного вищого навчального закладу «Донбаський державний педагогічний університет». Видання наукових праць викладачів, студентів та молодих науковців фізико-математичного факультету ДДПУ започатковано у 2010 році, коли результати наукових досліджень було опубліковано окремою серією «Фізико-математичні науки» в збірнику наукових праць «Пошуки і знахідки» за матеріалами науково-практичної конференції «Актуальні питання науки і освіти» (Слов'янськ, СДПУ, 20-22 квітня 2010 р.)

Метою збірника є підтримка наукової активності як серед студентів, так і серед молодих викладачів ДДПУ та інших ВНЗ.

Основу *шостого* випуску збірника складають оригінальні повнотекстові статті (в авторській редакції) переважно із числа доповідей, запланованих для участі у цьогорічній Всеукраїнській науково-практичній конференції «Спадщина Івана Франка у світлі сьогодення», присвяченій 160-річчю від дня народження Івана Франка (у межах реалізації науково-дослідної проблеми «Перспективні напрями сучасної науки та освіти», Слов'янськ, ДДПУ, 19-20 травня 2016 р.).

Засновники збірника мають намір зробити його максимально відкритим як для авторів, так і для читачів. Він виходить один раз на рік у друкованому та електронному вигляді. Електронна версія журналу та інформація щодо співпраці з авторами є доступною на офіційному сайті збірника за адресою `http://ddpu.edu.ua/fizmatzbirnyk/begin.htm`.

Запрошуємо до співпраці. Наснаги та творчих успіхів!
Члени редакційної колегії.

До 75-річчя
Пруна Анатолія Федоровича

Анатолій Федорович народився 02 березня 1940 року (що правда, у свідоцтві про народження та пізніше у паспорті рік народження помилково значився як 1941) в селі Іванівка Куп'янського району Харківської області в родині вчителя історії середньої школи Пруна Федора Трохимовича та Прун Поліни Іванівни. На самому початку війни у 1941 році Федір Трохимович пішов до лав Радянської Армії та у 1943 році загинув на фронті.

Навчання, освіта та підвищення кваліфікації Пруна Анатолія Федоровича

з 1947 по 1951 рр. — навчання в Іванівській початковій школі;

з 1951 по 1957 рр. — навчання в Кисловській середній школі;

з 1957 по 1960 рр. — навчання в Горлівському гірничому технікумі;

з 1960 по 1965 рр. — навчання на фізико-математичному факультеті Слов'янського педагогічного інституту, по закінченню якого здобув кваліфікацію «Вчитель фізики і праці середньої школи» та звання «Вчитель середньої школи»;

1967 р. — стажування на факультеті підвищення кваліфікації при «Московському державному університеті» (далі — МДУ) за спеціальністю «Загальна фізика»;
з 1971 по 1973 рр. — стажування на кафедрі магнетизму МДУ;
з *листопада* по *липень* 1983 р. — стажування на факультеті підвищення кваліфікації при МДУ за спеціальністю «Загальна фізика»;
з *лютого* по *червень* 1988 р. — стажування на факультеті підвищення кваліфікації при МДУ за спеціальністю «Загальна фізика».

Основні дати трудової діяльності

з *березня* по *липень* 1960 р. Анатолій Федорович працював «десятником» дільниці вентиляції тресту «Калининуголь» шахти «Кондратьевка - Новая»;

з 1963 по 1964 рр. — викладачем фізики 6-11 класів середньої школи №29 м. Горлівка;

з 1965 по 1970 рр. — асистентом кафедри фізики Слов'янського педагогічного інституту (далі — СПІ);

у 1970 році — тимчасово виконував обов'язки заступника декана фізико-математичного факультету СПІ;

з 1970 по 1971 рр. — старшим викладачем кафедри фізики СПІ;

з 1971 по 1973 рр. — стажером-дослідником на кафедрі магнетизму Московського державного університету;

з 1973 по 1975 рр. — старшим викладачем кафедри фізики СПІ;

з *вересня* по *жовтень* 1975 р. виконував обов'язки заступника декана фізико-математичного факультету СПІ;

з *жовтня* 1975 по 1978 рр. — завідувачем кафедри фізики та за сумісництвом в.о. доцента кафедри фізики СПІ;

з *листопада* 1978 р. — виконував обов'язки декана фізико-математичного факультету та за сумісництвом в.о. доцента кафедри фізики СПІ;

в *лютому* 1979 р. — призначено на посаду декана фізико-математичного факультету СПІ;

з *червня* 1980 р. — за сумісництвом переведено з посади в.о. доцента на доцента кафедри фізики СПІ;

з *лютого* 1979 по *лютий* 1984 рр. — деканом фізико-математичного факультету СПІ;

в *лютому* 1984 р. — переобраний на посаду декана фізико-математичного факультету СПІ;

з *лютого* 1984 по *лютий* 1989 рр. — деканом фізико-математичного факультету СПІ та за сумісництвом доцентом кафедри фізики СПІ;

в *лютому* 1989 р. — переобраний на посаду декана фізико-математичного факультету СПІ;

з *лютого* 1989 по *лютий* 1994 рр. — деканом фізико-математичного факультету СПІ та за сумісництвом доцентом кафедри фізики Слов'янського державного педагогічного інституту (далі — СДПІ);

з 1994 по 2001 рр. — доцентом кафедри фізики СПДІ;

у 2001 р. — вихід на пенсію та продовження роботи на посаді доцента кафедри СДПІ;

з 2001 по 2015 рр. — доцентом кафедри фізики СДПІ (з 2002 — СДПУ, а з 2013 — ДДПУ).

Науково-педагогічна діяльність та здобутки

Одразу після закінчення у 1965 році повного курсу навчання за спеціальністю «Вчитель фізики і праці середньої школи» Анатолія Федоровича, як одному з найкращих випускників фізико-математичного факультету Слов'янського державного педагогічного інституту, керівництво запропонує посаду асистента кафедри фізики. На цій посаді він працює до 1970 року, коли йому викладацький досвід дозволяє перейти на посаду старшого викладача цієї ж кафедри. На високому науково-методичному рівні він веде лекційні, практичні та лабораторні заняття з різних розділів курсу загальної фізики та теоретичної фізики.

Паралельно з напруженою викладацькою Прун Анатолій Федорович веде і інтенсивну науково-дослідну роботу. В 1967 році, перебуваючи на факультеті підвищення кваліфікації при Московському державному університеті, Анатолій Федорович розпочинає дослідження *магнітних властивостей моноалюмідів заліза, нікелю, кобальту, твердих розчинах між ними* під керівництвом старшого наукового співробітника кафедри магнетизму МДУ *Чечернікова Віктора Івановича.* Для вивчення парамагнітних та діамагнітних властивостей речовин та магнітного сприйняття слабко-магнітних тіл Анатолієм Федоровичем на кафедрі фізики СДПІ було створено установку для вимірювань. На цій установці виконуються дослідження у рамках наукової теми і студентські наукові роботи, якими він керує. Для завершення досліджень за темою Анатолій Федорович був відряджений на два роки до МДУ на кафедру магнетизму стажером-дослідником. Значний об'єм одержаних результатів досліджень, було опубліковано у ряді наукових статей та стали основою дисертації на здобуття ступеня кандидата фізико-математичних наук за спеціальністю «01.04.11 — фізика магнітних явищ» (тема дисертації — «Дослідження зсуву Найта на ядрах AL27 моноалюмідів

заліза, нікелю, кобальту та твердих розчинах між ними»), яку Анатолій Федорович успішно захистив у листопаді 1974 року на засіданні Вченої ради фізичного факультету МДУ.

У 1976 році Анатолій Федорович обіймає посаду завідувача кафедри фізики СДПІ. Як завідувач кафедри фізики він докладає значних зусиль підвищенню ідейного та науково-методичного рівня викладання, зміцненню матеріальної бази фізичних лабораторій, зв'язкам з вчителями фізики шкіл міста та району.

На кафедрі регулярно проводяться науково-дослідні семінари для вчителів шкіл міста і саме він є ініціатором відкриття для учнів міста дворічної школи «Юний фізик». Щорічно вчителі фізики міста і району проходять курси перепідготовки з фізики. Лабораторне обладнання кафедри дає можливість проводити зі студентами не лише навчальну, а й науково-дослідну роботу. За час його керівництва кафедрою фізики (з 1976 по 1978 рр.) на кафедрі була захищена одна кандидатська дисертація та кілька дисертацій було підготовлено до захисту.

З 1979 по 1994 рік (три п'ятирічні терміни поспіль) Анатолій Федорович обіймає посаду декана фізико-математичного факультету. Це роки динамічного розвитку фізико-математичного факультету. Збільшується кількість студентів на факультеті, з'являються нові спеціальності, постійно покращується професорсько-викладацький склад та матеріальна база факультету. З 1984 року фізико-математичний факультет переходить у новий 8-ми поверховий корпус. Здійснюється переобладнання та створення нових кабінетів і лабораторій з сучасним обладнанням та методичним забезпеченням. Створюється лабораторія технічних засобів навчання. Істотно змінюється зміст навчання, розпочинається ера інформаційних технологій. Поповнюються кабінети новими навчальними посібниками, обчислювальною технікою, методичним забезпеченням. Для проведення лабораторних занять з дисципліни «обчислювальні та вимірювальні роботи» було придбано різноманітні вимірювальні прилади та обчислювальні машини «ВК-1», «ВК-2», «Іскра» та інші. Для проведення занять з обчислювальної математики створюється кабінет з установкою малих обчислювальних машин, а згодом для занять застосовується обчислювальна машина «Промінь». На початку 80-х років з'являються лабораторії комп'ютерної техніки, які називають комп'ютерними класами. Формується обчислювальний центр факультету.

У 1986 році на фізико-математичному факультеті виникає фізкультурне відділення, яке у наступному стане факультетом фізичної культури.

Крім того, Анатолій Федорович бере активну участь у громадському житті інституту. Протягом багатьох років є керівником філософського семінару викладачів кафедр факультету. Він є активним членом спілки «Знання», членом наукової комісії СДПІ. У 1989 році Анатолію Федоровичу було присвоєно вчене звання доцента «за кафедрою загальної фізики».

По закінченню останнього терміну перебування на посаді декана фізико-математичного факультету Анатолій Федорович працює доцентом кафедри фізики. Протягом багатьох років він є одним з провідних викладачів кафедри, користується великою повагою студентів, випускників, працівників факультету.

Відзнаки, нагороди та подяки

1979 р. — нагороджено нагрудним знаком «Відмінник народної освіти України»;

1989 р. — нагороджено Медаллю А.С. Макаренка («За заслуги в галузі освіти і педагогічної науки та активну участь у громадському житті»);

2006 р. — подяка «За багаторічну сумлінну працю та особистий внесок у справу підготовки висококваліфікованих фахівців та в зв'язку з 65-річчям з дня народження»;

2010 р. — подяка «За підготовку команди для участі у XIX Всеукраїнському турнірі юних фізиків (із числа учнів Слов'янського педагогічного ліцею)»;

2011 р. — подяка «За багаторічну сумлінну працю та особистий внесок у справу підготовки висококваліфікованих фахівців та у зв'язку з 70-річчям з дня народження».

Щиросердно вітаємо Вас, шановний Анатолій Федорович, зі знаменною датою у Вашому житті! Бажаємо Вам міцного здоров'я на довгі роки, щастя та добробуту Вашій родині!

С.О. Чайченко, С.М. Чуйко, О.О. Новіков, В.О. Надточій,
М.К. Нечволод, О.П. Костіков, В.М. Ткаченко, А.З. Калімбет,
О.М. Рябухо, В.В. Величко, Т.В. Турка, Є.С. Сілін,
Б.Б. Беседін, В.С. Сьомкін, О.В. Чуйко, О.А. Кадубовський.

Основні та найбільш вагомі праці А.Ф. Пруна

1. Прун А.Ф. Экспериментальная проверка возможного влияния магнитного поля на ориентацию корневых борозд у редиса сорта «Дунганский» / А.Ф. Прун, В.П. Овчаренко, Ю.И. Новицкий // Сб. «Реакция биологических систем на слабые магнитные поля». Материалы Всесоюзного симпозиума АН СССР. — 1971.
2. Прун А.Ф. Исследование сдвига Найта Al^{27} в твердых растворах моноалюмидов железа и никеля / А.Ф. Прун, В.И. Чечерников, В.И. Неделько // «ФММ». — 1973. — №3.
3. Прун А.Ф. Исследование сдвига Найта Al^{27} в твердых растворах моноалюмидов железа и кобальта / А. Ф. Прун, В. И. Чечерников, В. И. Неделько // «УФМ». — 1973. — т. XVIII. №10.
4. Прун А.Ф. Гидростатический метод измерений магнитной восприимчивости / А.Ф. Прун, В.П. Овчаренко, Н.И. Калугин // Электронная обработка материалов. — 1973. — №6. — С. 180.
5. Прун А.Ф. Изучение сдвига Найта на ядрах Al^{27} в твердых растворах NiAl-CoAl / А.Ф. Прун, В.И. Чечерников, В.И. Неделько // «ФММ». — 1974. — №38. — С. 2.
6. Прун А. Ф. Сдвиг Найта Al^{27} и магнитный свойства моноалюмидов Fe, Co и $NiAl$ / А.Ф. Прун, В.И. Чечерников, В.И. Неделько // Журнал экспериментальной и теоретической физики. — 1974. — №67. — С. 8.
7. Прун А.Ф. Ядерный магнитный резонанс и магнитные свойства взаимных твердых растворов интерметаллических соединений / А.Ф. Прун, В.И. Чечерников, В.И. Неделько // Материалы III Всесоюзной конф. по кристаллохимии интерметаллических соединений. — 1978.
8. Прун А.Ф. Магнитная восприимчивость и эффект Холла поликристаллических разбавленных твердых растворов на основе меди / А.Ф. Прун, А.А. Гречаный, С.Д. Вангенгейм // УФЖ. — 1978. — С. 8.
9. Прун А. Ф. ЯМР и магнитные свойства взаимных твердых растворов моноалюминидов железа, никеля, кобальта / А.Ф. Прун, А.А. Гречаный, С.Д. Вангенгейм // Сб. «Нефтехимия и нефтепереработка», химико-технический институт (деп. ВИНИТИ). — 1977.
10. Прун А.Ф. Высокотемпературная приставка к спектрометру ЯМР для широких линий / А.Ф. Прун, А.А. Гречаный, С.Д. Вангенгейм // Сб. докладов научно-теоретической конференции индустриального института (деп. ВИНИТИ). — 1978.
11. Анизотропия R-Fe обмена и магнитные свойства ортоферитов системы $Y_{bx}Sm_{1-x}FeO_3$ / [А.Ф. Прун, С.Н. Борило, А.П. Гесь та ін.] // Фізика

твердого тіла, Т. 32. — 1990. — №9. — С. 2643–2649.

12. Прун А. Ф. Альтернативная модель организации учебного процесса в педвузе / А.Ф. Прун // Тези доповідей міжнародної наукової конференції «Альтернативні ідеї, підходи і технології навчання та освіти». — 1993.
13. Прун А.Ф. Одна із форм організації навчального процесу в педвузі / А.Ф. Прун, О.П. Кудима, О.П. Каменєв // Університет Києво-Могилянська академія. — 1996.
14. Каменев О.П., Прун А.Ф., Ткаченко В.М. Впровадження проблемних завдань у фізичний практикум // Стандарти фізичної освіти в Україні. Технологічні аспекти управління навчально-пізнавальною діяльністю учнів : науково-метод. зб. — Кам'янець-Подільський, 1997. — С. 81–82.
15. Прун А.Ф. Із досвіду роботи кафедри / А.Ф. Прун, В.М. Ткаченко, О.П. Каменєв // Методичні особливості викладання фізики на сучасному етапі : науково-методичний збірник. — 1998. — С. 91–92.
16. Комп'ютерне моделювання коливань при великих амплітудах / А.Ф. Прун, М.К. Нечволод, Ю.М. Гриценко, М.М. Голоденко // Всеукраїнська науково-методична конференція «Комп'ютерне моделювання та інформаційні технології в освітній діяльності». — 1999.
17. Комп'ютерне тестування як елемент процесу навчання / А.Ф. Прун, В.О. Надточій, М.М. Голоденко, М.М. Гриценко // Всеукраїнська науково-практична конференція «Інформаційні технології в освіті», Мелітопольський державний педагогічний університет. — 2001.
18. Комп'ютерна навчальна гра допомагає вивчати фізику в авіаційному коледжі / А.Ф. Прун, Ю.М. Гриценко, М.М. Голоденко, П.С. Чекар // Всеукраїнській конференції «Теорія та методика навчання математики, фізики, інформатики». — 2001. — №2. — С. 86.
19. **Курс фізики. Механіка. Молекулярна фізика і термодинаміка** / М.К. Нечволод, А.Ф. Прун. — Київ : «Просвіта», 2001. — 228 с.
20. **Курс фізики. Електрика і магнетизм** / А.Ф. Прун, М.К. Нечволод, М.М. Голоденко. — Київ : «Просвіта», 2001. — 236 с.
21. **Курс фізики. Оптика. Фізика мікрочастинок** / А.Ф. Прун, М.К. Нечволод, М.М. Голоденко. — Київ : «Просвіта», 2001. — 324 с.
22. **Курс фізики. Запитання і задачі** / А.Ф. Прун, М.К. Нечволод, М.М. Голоденко. — Київ : «Просвіта», 2001. — 232 с.
23. Прун А.Ф. Методичні вказівки та контрольно-тренувальні завдання до практикуму з розв'язування конкурсних фізичних задач для магістрантів фізико-математичного факультету СДПІ / А.Ф. Прун, І.В. Жихарєв // Слов'янськ : СДПУ. — 2002. — 40 с.

24. Прун А.Ф. Методичні вказівки з курсу «Електрика і магнетизм» для студентів фізико-математичного факультету, спеціальності «фізика та основи інформатики» / А.Ф. Прун, О.П. Каменєв, В.М. Ткаченко // Слов'янськ : СДПУ. — 2002.
25. Рентгеновские исследования поведения параметров решетки $[Fe(CHN_4C_3H_7)_6](BF_4)_2$, (Femtz) при низких температурах / А.Ф. Прун, И.В. Жихарев, В.Н. Турка, Б.В. Беляев // Вісник Східноукраїнського університету імені В.Даля. — 2002. — №12. — Ч.2. — С. 61–63.
26. Прун А.Ф. Методичні вказівки та завдання до лабораторних робіт з курсу «Квантова фізика» / А.Ф. Прун, М.М. Голоденко, В.М. Ткаченко // Слов'янський державний педагогічний університет. — 2003.
27. Прун А.Ф. Методичні вказівки та завдання до лабораторних і практичних робіт з курсу «Квантова фізика» / А.Ф. Прун, В.М. Ткаченко, О.Я. Бєлошапка // Слов'янськ : СДПУ. — 2004.
28. **Курс фізики. Електрика і магнетизм. Короткий виклад** / А.Ф. Прун, М.М. Голоденко, А.І. Посторонко. — Харків : УІПА, 2005. — 140 с.
29. Прун А.Ф. Методичні вказівки та завдання до лабораторних і практичних робіт з курсу «Астрономія» / А.Ф. Прун, О.Я. Бєлошапка, В.М. Ткаченко // Слов'янськ : СДПУ. — 2005. — 98 с.
30. Спин-переориентационные фазовые переходы в ферромагнитных нанослоях с конкурирующими анизотропиями / А.Ф. Прун, С.В. Бухтиярова, И.П. Жихарев, Т.В. Лаптева // Вісник Східноукраїнського національного університету імені В. Даля. — 2006. – №6(100). — Ч.2. — С. 165–168.
31. Прун А. Ф. Курс фізики. Механіка і молекулярна фізика. Короткий виклад / А.Ф. Прун, М.М. Голоденко, А.І. Посторонко. — Харків : УІПА, 2006. — 139 с. – (Навчальний посібник).
32. **Курс фізики. Оптика Фізика мікрочастинок. Короткий виклад** / А.Ф. Прун, М.М. Голоденко, А.І. Посторонко. — Харків: УІПА, 2006. — 188 с.
33. Прун А.Ф. Розробка тестових завдань для атестаційного контролю знань студентів з механіки і молекулярної фізики / А. Ф. Прун, І. Ю. Зайцев // Пошуки і знахідки : Матеріали наук. конф. СДПУ. — 2006. — С. 100–109.
34. Прун А.Ф. Фізика. Методичні вказівки до виконання лабораторних робіт. Частина III. Оптика. елементи квантової механіки, атомної та ядерної фізики / А.Ф. Прун, І.Ю. Зайцев. — Харків: УІПА, 2007. — 54 с.
35. Прун А.Ф. Електротехніка. Методичні вказівки по організації і плануванню самостійної роботи студентів спеціальності 6.040203 Фізика / А.Ф. Прун, В.О. Надточій // СДПУ : Кафедра фізики — 2008 — 86 с.

36. Прун А.Ф. Методичні вказівки та контрольно-тренувальні завдання до практикуму з розв'язування конкурсних фізичних задач для магістрантів фізико-математичного факультету СДПУ / А.Ф. Прун, В.М. Ткаченко / СДПУ, 2009. — 40 с.
37. Прун А.Ф. Загальна фізика конспект лекцій (для студентів усіх спеціальностей) / А.Ф. Прун, М.М. Голоденко, Д.С. Москаль // Слов'янськ : СДПУ, 2009. — 74 с.
38. Прун А.Ф. Методичні вказівки та завдання до лабораторних і практичних робіт з курсу «Оптика. Квантова фізика» (для студентів технологічного факультету, спеціальність «Технологічна освіта. Технічна праця» / А.Ф. Прун, В.М. Ткаченко, І.В.Дудченко // СДПУ. — 2010. — 65 с.
39. Прун А.Ф. Методичні вказівки з організації і планування самостійної роботи студентів для напрямку підготовки 6.010103 Технологічна освіта / А.Ф. Прун, В.М. Ткаченко // Слов'янськ : СДПУ. — 2012. – 69 с.
40. Прун А.Ф. Використання комп'ютерних технологій при проведенні фізичного практикуму / А.Ф. Прун, І.В. Дудченко // Гуманізація навчально-виховного процесу : збірник наукових праць / [За заг. ред. проф. В.І. Сипченка]. — 2013. — №64. — С. 48—52.
41. Прун А.Ф. Експериментальні роботи фізичного практикуму / А.Ф.Прун, І.В. Дудченко, В.М. Ткаченко // Гуманізація навчально-виховного процесу : збірник наукових праць / [За заг. ред. проф. В.І.Сипченка]. — Вип. 65. — Слов'янськ — 2013.
42. Прун А.Ф. Формування поняття тілесного кута при вивченні фотометрії / А.Ф. Прун, В.С. Сьомкін // Наука и образование XXI века: Теория, практика, инновации. — Ополе. — 29.11.2013 — 30.11.2013.
43. Прун А.Ф. Елементи технології проблемного виховання як засіб підвищення пізнавального інтересу до навчання / А.Ф. Прун, О.Я. Бєлошапка // Вестник. Наука и практика / Наука и образование XXI века : Теория, практика, инновации / Польша.

Шановному Анатолію Федоровичу, бажаємо міцного здоров'я на довгі роки, щастя та добробуту Вашій родині!

МАТЕМАТИКА

УДК 517.5

Новіков О.О., Ровенська О.Г., Козаченко Ю.О., Попова К.Г., Сідаш А.О.

[1] *кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри математики, ДВНЗ «ДДПУ»*

[2] *кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри вищої математики, ДДМА*

[3–5] *студенти фізико-математичного факультету, ДДПУ*

e-mail: sgpi@slav.dn.ua

ЕКСТРЕМАЛЬНА ЗАДАЧА ДЛЯ ПОТРІЙНИХ ОПЕРАТОРІВ ФЕЙЄРА

Знайдені асимптотичні формули для верхніх граней відхилень потрійних операторів Фейєра на класі інтегралів Пуассона, які за природних умов забезпечують розв'язки відповідної задачі Колмогорова-Нікольського.

Ключові слова: *ряди Фур'є, повторні суми Фейєра, асимптотична формула.*

Нехай L — множина сумовних 2π–періодичних функцій і

$$S[f] = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k(f)\cos kx + b_k(f)\sin kx) \equiv \sum_{k=0}^{\infty} A_k(f;x)$$

— ряд Фур'є функції $f \in L$. Позначимо через $S_n(f;x)$ часткові суми ряду Фур'є. Суми Валле Пуссена функції $f \in L$ задаються співвідношенням

$$V_{n,p}(f,x) = \frac{1}{p}\sum_{k=n-p}^{n-1} S_k(f,x).$$

У випадку $p = n$ ці поліноми називають сумами Фейєра. Нехай p_1, p_2, p_3 — довільні натуральні числа такі, що $p_1 + p_2 + p_3 \leqslant n + 2$. Потрійними сумами Валле Пуссена будемо називати тригонометричні многочлени, які задаються наступним співвідношенням

$$V^{(3)}_{n,\overline{p}}(f;x) = \frac{1}{p_1}\sum_{k=n-p_1}^{n-1}\frac{1}{p_2}\sum_{m=k-p_2+1}^{k}\frac{1}{p_3}\sum_{r=m-p_3+1}^{m} S_r(f;x).$$

© Новіков О.О., Ровенська О.Г., Козаченко Ю.О., Попова К.Г., Сідаш А.О., 2016

У випадках $p_1 + p_2 + p_3 = n - r$ такі тригонометричні поліноми будемо називати відповідними потрійними сумами Фейєра $\sigma_{n,\overline{p}}^{(3,r)}$. У випадку $p_3 = 1$ потрійні оператори Фейєра співпадають з подвійними $\sigma_{n,\overline{p}}^{(2,r)}$, які вивчалися у роботі [7] та інших.

Наслідуючи О.І. Степанця [1], позначимо через S_M^0 множину функцій істотно обмежених і таких, що мають нульове середнє значення на періоді, і через $C_{\beta,\infty}^q$ – класи неперервних 2π–періодичних функцій $f(x)$, які можна подати у вигляді згортки

$$f(x) = A_0 + \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \varphi(x+t) P_\beta^q(t)\, dt,$$

в якій $P_\beta^q(t) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} q^k \cos(kt + \frac{\beta\pi}{2})$ – ядро Пуассона, а $\varphi \in S_M^0$.

Питанням наближення класів $C_{\beta,\infty}^q$ лінійними методами присвячено ряд робіт спеціалістів з теорії функцій.

С.М. Нікольський [2] показав, що для верхніх граней відхилень часткових сум Фур'є на цих класах має місце асимптотична формула

$$\mathcal{E}_n(C_{\beta,\infty}^q) = \sup_{f \in C_{\beta,\infty}^q} ||f(x) - S_{n-1}(f,x)||_C = \frac{8q^n}{\pi^2} \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{du}{\sqrt{1 - q^2 \sin^2 u}} + O(1)\frac{q^n}{n},$$

де величина $O(1)$ не залежить від $n \in \mathbb{N}$. С.Б. Стечкин в роботі [3] показав, що залишковий член цієї формули можна подати у вигляді $O(1)\frac{q^n}{n(1-q)}$, де величина $O(1)$ рівномірно обмежена відносно $n \in \mathbb{N}$ та $q \in (0;1)$.

В роботі [1] О.І. Степанець отримав аналогічну асимптотичну формулу для класів $C_\beta^q H_\omega$. В.І. Рукасов та С.О. Чайченко [4] для верхніх граней відхилень сум Валле Пуссена на класах $C_{\beta,\infty}^q$ і $C_\beta^q H_\omega$ отримали аналогічні асимптотичні формули. Зокрема, у цій роботі показано, що

$$\mathcal{E}\left(C_{\beta,\infty}^q; V_{n,p}\right) = \sup_{f \in C_{1,\infty}^q} ||f(x) - V_{n,p}(f,x)||_C =$$

$$= \frac{4q^{n-p+1}}{\pi p(1-q^2)} + O(1)\left(\frac{q^{n-p+1}}{p(n-p)(1-q)^3} + \frac{q^n}{p(1-q^2)}\right). \qquad (1)$$

А.С. Сердюк [5] показав, що має місце більш загальна рівність ніж (1):

$$\mathcal{E}\left(C_{\beta,\infty}^q; V_{n,p}\right) = \frac{q^{n-p+1}}{p}\left(\frac{4}{\pi^2}K_{p,q} + O(1)\left(\frac{q}{(n-p+1)(1-q)^s}\right)\right),$$

де

$$K_{p,q} = \int\limits_0^{\pi} \frac{\sqrt{1-2q^p\cos pt+q^{2p}}}{1-2q\cos pt+q^2}dt, \;\; s=s(p)=\begin{cases} 1, & p=1 \\ 3, & p=2,3,.....\end{cases}$$

В роботі [6] для верхніх граней відхилень сум Фейєра отримана така асимптотична формула

$$\mathcal{E}(C^q_{1,\infty};\sigma_n) = \sup_{f\in C^q_{1,\infty}} ||f(x)-\sigma_n(f,x)||_C = \frac{2}{\pi n}\left(\frac{2q}{1-q^2}+\ln\frac{1+q}{1-q}\right)+\frac{O(1)q^n}{n(1-q)^3}.$$

В роботі [7] отримана така асимптотична формула

$$\mathcal{E}(C^q_{1,\infty},\sigma^{(2,-1)}_{n,\overline{p}}) = \begin{cases} \frac{4q}{\pi p_1p_2(1-q^2)^2}+O(1)\frac{q^{n-p_1}+q^{n-p_2}}{p_1p_2}, & q\in(0;1/2]; \\ \frac{4q^2+1}{\pi p_1p_2(1-q^2)^2}+O(1)\frac{q^{n-p_1}+q^{n-p_2}}{p_1p_2(1-q)^5}, & q\in(1/2;1). \end{cases}$$

В даній роботі отримані асимптотичні формули для верхніх граней відхилень тригонометричних поліномів $\sigma^{(3,-1)}_{n,\overline{p}}$ на класах $C^q_{\beta,\infty}$ для $\beta=1$

$$\mathcal{E}(C^q_{1,\infty},\sigma^{(3,-1)}_n) = \sup_{f\in C^q_{1,\infty}} ||f(x)-\sigma^{(3,-1)}_n(f,x)||_C.$$

Теорема 1. *Нехай* $q\in(0;1)$, *Тоді для* $n\to\infty$, $p_i\to\infty$, $i=1,2,3$ *має місце асимптотична формула*

$$\mathcal{E}(C^q_{1,\infty};\sigma^{(3,-1)}_{n,\overline{p}}) = \frac{4q^2(q^2+1)}{\pi p_1p_2p_3(1-q^2)^3}+O(1)\frac{q^{p_1}+q^{p_2}+q^{p_3}}{p_1p_2p_3(1-q)^7}. \tag{2}$$

Доведення. Застосовуючи формулу (6) роботи [8], отримуємо для $q\in(0;1)$, $\beta=1$, $p_1+p_2+p_3=n+1$

$$\delta^{(3,-1)}_n(f,x) \overset{df}{=} f(x)-\sigma^{(3,-1)}_n(f;x) =$$

$$= \frac{-q^2}{\pi p_1p_2p_3}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\frac{f^q_\beta(x+t)[(1-q^4)\sin 2t+4q(q^2-1)\sin t]}{(1-2q\cos t+q^2)^4}dt+O(1)\frac{q^{p_1}+q^{p_2}+q^{p_3}}{p_1p_2p_3(1-q)^7},$$

де $f(x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^q_\beta(x+t)P^q_\beta(t)\,dt$.

Враховуючи нулі функції $\xi_q(t)=(1-q^4)\sin 2t+4q(q^2-1)\sin t$, побудуємо екстремальну для такого уявлення функцію

$$\varphi(t) = \mathrm{sign}(2(1-q^2)\sin t[-2q+(1+q^2)\cos t]) =$$

$$= \begin{cases} +1, & -\pi \leqslant t < -\arccos\frac{2q}{(1+q^2)}; \\ -1, & -\arccos\frac{2q}{(1+q^2)} \leqslant t < 0; \\ +1, & 0 \leqslant t < \arccos\frac{2q}{(1+q^2)}; \\ -1, & \arccos\frac{2q}{(1+q^2)} \leqslant t \leqslant \pi. \end{cases}$$

Оскільки $\varphi \in S_M^0$, то

$$\mathcal{E}(C^q_{1,\infty}, \sigma_n^{(3,-1)}) =$$

$$= \frac{q^2}{\pi p_1 p_2} \int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{\varphi(t)((1-q^4)\sin 2t + 4q(q^2-1)\sin t)}{(1-2q\cos t + q^2)^4} dt + O(1)\frac{q^{p_1}+q^{p_2}+q^{p_3}}{p_1p_2p_3(1-q)^7} =$$

$$= \frac{q^2}{\pi p_1 p_2 p_3} \int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{|(1-q^4)\sin 2t + 4q(q^2-1)\sin t|}{(1-2q\cos t + q^2)^4} dt + O(1)\frac{q^{p_1}+q^{p_2}+q^{p_3}}{p_1p_2p_3(1-q)^7} =$$

$$= \frac{4q^2(1-q^2)}{\pi p_1 p_2 p_3} \int\limits_{0}^{\arccos\frac{2q}{(1+q^2)}} \frac{\sin t[-2q + (1+q^2)\cos t]}{(1-2q\cos t + q^2)^4} dt -$$

$$-\frac{4q^2(1-q^2)}{\pi p_1 p_2 p_3} \int\limits_{\arccos\frac{2q}{(1+q^2)}}^{\pi} \frac{\sin t[-2q + (1+q^2)\cos t]}{(1-2q\cos t + q^2)^4} dt + O(1)\frac{q^{p_1}+q^{p_2}+q^{p_3}}{p_1p_2p_3(1-q)^7}. \quad (3)$$

Виконавши інтегрування, знаходимо

$$\int \frac{\sin t[-2q + (1+q^2)\cos t]}{(1-2q\cos t + q^2)^4} dt =$$

$$= \frac{(1+q^2)}{8q^2}(1-2q\cos t + q^2)^{-2} - \frac{(1-q^2)^2}{12q^2}(1-2q\cos t + q^2)^{-3}.$$

Виконавши обчислення, отримуємо

$$\int\limits_{0}^{\arccos\frac{2q}{(1+q^2)}} \frac{\sin t[(1+q^2)\cos t - 2q]}{(1-2q\cos t + q^2)^4} dt - \int\limits_{\arccos\frac{2q}{(1+q^2)}}^{\pi} \frac{\sin t[(1+q^2)\cos t - 2q]}{(1-2q\cos t + q^2)^4} dt =$$

$$= \frac{q^2+1}{(1-q^2)^4}.$$

Отже, на підставі формули (3) приходимо до асимптотичної формули (2). Теорема доведена.

Література

1. *Степанец А.И.* Решение задачи Колмогорова-Никольского для интегралов Пуассона непрерывных функций // Мат. сборник. — 2001. — Т. 192, № 1. — С. 113–138.
2. *Никольский С.М.* Приближение функций тригонометрическими полиномами в среднем // Изв. АН СССР. Сер. мат. — 1946. — Т. 10, № 3. — С. 207–256.
3. *Стечкин С.Б.* Оценка остатка ряда Фурье для дифференцируемых функций // Тр. Мат. ин-та им. В.А. Стеклова АН СССР. — 1980. — Т. 145. — С. 126–151.
4. *Рукасов В.І.* Наближення аналітичних періодичних функцій сумами Валле-Пуссена /*Рукасов В.І., Чайченко С.О.* // Укр. мат. журн. — 2002. — Т. 54, № 12. — С. 1653–1668.
5. *Сердюк А.С.* Наближення інтегралів Пуасона сумами Валле Пуссена // Укр. мат. журн. — 2004. — Т. 56, № 1. — С. 97–107.
6. *Новіков О.О.* Наближення класів інтегралів Пуасона операторами Фейєра / Новіков О.О., Ровенська О.Г. [та ін.] // Збірник наукових праць фізико-математичного факультету ДДПУ. — 2014. — № 4. — С. 17–22.
7. *Новіков О.О.* Задача Колмогорова-Нікольського для подвійних операторів Фейєра на класах інтегралів Пуасона /Новіков О.О., Ровенська О.Г., Чабанова Є.О. [та ін.] // Збірник наукових праць фізико-математичного факультету ДДПУ. — 2015. — № 5. — С. 15–19.
8. *Новиков О.А.* Приближение классов интегралов Пуассона r-повторными суммами Валле Пуссена /*Новиков О.А., Ровенская О.Г.* // Вісник Одеського національного університету. Математика і механіка. — 2014. — Т.19, вип. 3(23). — С.14–26.
9. *Степанец А.И.* Классификация и приближение периодических функций. — Киев: Наук. думка, 1987. — 268 с.

Novikov O., Rovenska O., Kozachenko Yu., Popova K., Sidash A.
Donbas State Teachers' Training University, Slovians'k, Ukraine;
Donbas State Engineering Academy, Kramators'k, Ukraine.

Extreme problem for a triple of operators of Fejer

We obtain asymptotic formula for upper bounds of deviations of repeated by Fejer sums on classes of Poisson integrals. Under certain conditions, formula guarantee the solvability of the Kolmogorov–Nikol'skiy problem for repeated sums of Fejer and classes of Poisson integrals.

Keywords: *Fourier series, repeated sums of Fejer, asymptotic formula.*

УДК 517.5

Бодра В.І., Шулик Т.В., Рудь К.О., Чаплик А.М., Мірошніченко Г.І.

[1] *асистент каф. вищої математики, Київський національний університет технологій і дизайну*

[2] *секретар наукового відділу, асистент кафедри геометрії та МВМ, ДВНЗ «ДДПУ»*

[3–5] *студенти фізико-математичного факультету, ДВНЗ «ДДПУ»*

e-mail: sgpi@slav.dn.ua

НАБЛИЖЕННЯ ІНТЕГРАЛІВ ПУАССОНА У РІВНОМІРНІЙ МЕТРИЦІ

Отримані розв'язки екстремальної задачі для відхилень потрійних операторів Фейєра на класі інтегралів Пуассона.

Ключові слова: *ряди Фур'є, суми, асимптотичні рівняння.*

Нехай

$$S_n(f;x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n}(a_k(f)\cos kx + b_k(f)\sin kx)$$

— часткова сума ряду Фур'є сумовної 2π–періодичної функції f. Суми Валле Пуссена функції f задаються співвідношенням

$$V_{n,p}(f,x) = \frac{1}{p}\sum_{k=n-p}^{n-1} S_k(f,x).$$

У випадку $p = n$ такий оператор називають методом Фейєра. Нехай p_1, p_2, p_3 — довільні натуральні числа такі, що $p_1 + p_2 + p_3 \leqslant n + 2$. Потрійними сумами Валле Пуссена сумовної функції f будемо називати тригонометричні многочлени, які задаються наступним співвідношенням

$$V^{(3)}_{n,\overline{p}}(f;x) = \frac{1}{p_1}\sum_{k=n-p_1}^{n-1}\frac{1}{p_2}\sum_{m=k-p_2+1}^{k}\frac{1}{p_3}\sum_{r=m-p_3+1}^{m} S_r(f;x).$$

У випадках $p_1+p_2+p_3 = n$ такі тригонометричні поліноми будемо називати потрійними сумами Фейєра $\sigma^{(3,0)}_{n,\overline{p}}(f;x)$. У випадку $p_3 = 1$ потрійні оператори Фейєра співпадають з подвійними $\sigma^{(2,0)}_{n,\overline{p}}(f;x)$, які вивчалися у роботі [1].

Наслідуючи О.І. Степанця [1], позначимо через S^0_M множину функцій істотно обмежених і таких, що мають нульове середнє значення на періоді, і

© Бодра В.І., Шулик Т.В., Рудь К.О., Чаплик А.М., Мірошніченко Г.І., 2016

через $C^q_{\beta,\infty}$ – класи неперервних 2π–періодичних функцій $f(x)$, які можна подати у вигляді згортки

$$f(x) = A_0 + \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^q_\beta(x+t)P^q_\beta(t)\,dt,$$

в якій $P^q_\beta(t) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} q^k\cos(kt + \frac{\beta\pi}{2})$ – ядро Пуассона, а $f^q_\beta \in S^0_M$.

Питанням наближення класів $C^q_{\beta,\infty}$ лінійними методами присвячено ряд робіт спеціалістів з теорії функцій. З бібліографією до цих питань можна ознайомитися у роботах [2]-[5]

В даній роботі отримані асимптотичні формули для верхніх граней відхилень тригонометричних поліномів $\sigma^{(3,0)}_{n,\overline{p}}$ на класах $C^q_{\beta,\infty}$ для $\beta = 1$

$$\mathcal{E}(C^q_{1,\infty}, \sigma^{(3,0)}_n) = \sup_{f\in C^q_{1,\infty}} ||f(x) - \sigma^{(3,0)}_n(f,x)||_C.$$

Теорема 1. *Нехай* $q \in (0;1)$, *тоді для* $n \to \infty$, $p_i \to \infty$, $i = 1,2,3$ *має місце асимптотична формула*

$$\mathcal{E}(C^q_{1,\infty}; \sigma^{(3,0)}_{n,\overline{p}}) = \frac{4q^3(1+q^2)}{\pi p_1p_2p_3(1-q^2)^3} + O(1)\frac{q^{p_1}+q^{p_2}+q^{p_3}}{p_1p_2p_3(1-q)^7}. \qquad (1)$$

Доведення. Застосовуючи формулу (6) роботи [6], отримуємо для $p_1+p_2+p_3 = n$, $q \in (0;1)$, $\beta = 1$

$$\delta^{(3,0)}_n(f,x) \overset{df}{=} f(x) - \sigma^{(3,0)}_n(f;x) = \frac{q^3}{\pi p_1p_2p_3}\times$$

$$\times\int\limits_{-\pi}^{\pi}\frac{f^q_\beta(x+t)(\sin 3t - 4q\sin 2t + 6q^2\sin t - q^4\sin t)}{(1-2q\cos t+q^2)^4}dt + O(1)R^{(3)}_n,$$

де $R^{(3)}_n = \frac{q^{p_1}+q^{p_2}+q^{p_3}}{p_1p_2p_3(1-q)^7}$.

Враховуючи нулі функції $\xi_q(t) = \sin 3t - 4q\sin 2t + 6q^2\sin t - q^4\sin t$, побудуємо екстремальну для даного інтегрального уявлення функцію

$$\varphi(t) = \mathrm{sign}(\sin 3t - 4q\sin 2t + 6q^2\sin t - q^4\sin t) =$$

$$\varphi(t) = \mathrm{sign}(\xi_q(t)) = \begin{cases} -1, & -\pi \leqslant t < -\arccos\frac{2q-(1-q^2)}{2}; \\ +1, & -\arccos\frac{2q-(1-q^2)}{2} \leqslant t < -\arccos\frac{2q+(1-q^2)}{2}; \\ -1, & -\arccos\frac{2q+(1-q^2)}{2} \leqslant t < 0; \\ +1, & 0 \leqslant t < \arccos\frac{2q+(1-q^2)}{2}; \\ -1, & \arccos\frac{2q+(1-q^2)}{2} \leqslant t < \arccos\frac{2q-(1-q^2)}{2}; \\ +1, & \arccos\frac{2q-(1-q^2)}{2} \leqslant t \leqslant \pi, \end{cases}$$

Оскільки $\varphi \in S_M^0$, то

$$\mathcal{E}(C^q_{1,\infty}, \sigma_n^{(3,0)}) =$$

$$= \frac{q^3}{\pi p_1 p_2} \int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{\varphi(t)(\sin 3t - 4q \sin 2t + 6q^2 \sin t - q^4 \sin t)}{(1 - 2q\cos t + q^2)^4} dt + O(1) R_n^{(3)} =$$

$$= \frac{q^3}{\pi p_1 p_2 p_3} \int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{|\sin 3t - 4q \sin 2t + 6q^2 \sin t - q^4 \sin t|}{(1 - 2q\cos t + q^2)^4} dt + O(1) R_n^{(3)} =$$

$$= \frac{2q^3}{\pi p_1 p_2 p_3} \int\limits_{0}^{\arccos \frac{2q+(1-q^2)}{2}} \frac{\sin t(4\cos^2 t - 8q\cos t + (6q^2 - q^4 - 1))}{(1 - 2q\cos t + q^2)^4} dt +$$

$$+ \frac{-2q^3}{\pi p_1 p_2 p_3} \int\limits_{\arccos \frac{2q+(1-q^2)}{2}}^{\arccos \frac{2q-(1-q^2)}{2}} \frac{\sin t(4\cos^2 t - 8q\cos t + (6q^2 - q^4 - 1))}{(1 - 2q\cos + q^2)^4} dt -$$

$$+ \frac{2q^3}{\pi p_1 p_2 p_3} \int\limits_{\arccos \frac{2q-(1-q^2)}{2}}^{\pi} \frac{\sin t(4\cos^2 t - 8q\cos t + (6q^2 - q^4 - 1))}{(1 - 2q\cos t + q^2)^4} dt + O(1) R_n^{(3)}. \tag{2}$$

Виконуючи інтегрування, знаходимо

$$\int \frac{\sin t(4\cos^2 t - 8q\cos t + (6q^2 - q^4 - 1))}{(1 - 2q\cos t + q^2)^4} dt = -\frac{1}{2q^3}(1 - 2q\cos t + q^2)^{-1} +$$

$$+ \frac{1 - q^2}{2q^3}(1 - 2q\cos t + q^2)^{-2} - \frac{(1 - q^2)^3}{6q^3}(1 - 2q\cos t + q^2)^{-3}.$$

Виконуючи елементарні перетворення, маємо

$$\left(-\frac{1}{2q^3(1 - 2q\cos t + q^2)} + \frac{1 - q^2}{2q^3(1 - 2q\cos t + q^2)^2} - \right.$$

$$\left. - \frac{(1 - q^2)^3}{6q^3(1 - 2q\cos t + q^2)^3} \right) \Bigg|_{0}^{\arccos \frac{2q+(1-q^2)}{2}} - \Bigg|_{\arccos \frac{2q+(1-q^2)}{2}}^{\arccos \frac{2q-(1-q^2)}{2}} + \Bigg|_{\arccos \frac{2q-(1-q^2)}{2}}^{\pi} = \frac{2(1 + q^2)}{(1 - q^2)^3}.$$

Підставивши в (2), отримуємо рівність (1). Теорема доведена.

Література

1. *Новіков О.О.* Задача Колмогорова-Нікольського для подвійних операторів Фейєра на класах інтегралів Пуасона /Новіков О.О., Ровенська О.Г., Чабанова Є.О. [та ін.] // Збірник наукових праць фізико-математичного факультету ДДПУ. — 2015. — № 5. — С. 15–19.
2. *Степанец А.И.* Решение задачи Колмогорова-Никольского для интегралов Пуассона непрерывных функций // Мат. сборник. — 2001. — Т. 192, № 1. — С. 113—138.
3. *Никольский С.М.* Приближение функций тригонометрическими полиномами в среднем // Изв. АН СССР. Сер. мат. — 1946. — Т. 10, № 3. — С. 207—256.
4. *Стечкин С.Б.* Оценка остатка ряда Фурье для дифференцируемых функций // Тр. Мат. ин-та им. В.А. Стеклова АН СССР. — 1980. — Т. 145. — С. 126–151.
5. *Сердюк А.С.* Наближення інтегралів Пуасона сумами Валле Пуссена // Укр. мат. журн. — 2004. — Т. 56, № 1. — С. 97–107.
6. *Степанец А.И.* Приближения суммами Валле Пуссена / Степанец А.И., Рукасов В.И., Чайченко С.О. — К. : Ін-т математики НАН України, — 2007. — 386 с. — (Праці Ін-ту математики НАН України ; т. 68).
7. *Новиков О.А.* Приближение классов интегралов Пуассона r-повторными суммами Валле Пуссена /*Новиков О.А., Ровенская О.Г.* // Вісник Одеського національного університету. Математика і механіка. — 2014. — Т.19, вип. 3(23). – С.14–26.

Bodra V., Shulik T., Rud K., Chaplyk A., Miroshnichenko H.
Kyiv National University of Technologies and Design, Kyiv, Ukraine;
Donbas State Teachers' Training University, Slovians'k, Ukraine.

Approximation of Poisson integrals in the uniform metric

Found asymptotic formula for upper bounds of deviations of repeated by Fejer sums on the set of Poisson integrals. Under certain conditions, formula guarantee the solvability of the Kolmogorov–Nikol'skiy problem for repeated sums of Fejer and classes of Poisson integrals.

Keywords: *Fourier series, sums, the asymptotic equations.*

УДК 517.5

Новіков О.О., Стьопкін А.В., Волик С.В., Сипчук Є.Ю.

[1] *кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри математики, ДВНЗ «ДДПУ»*

[2] *старший викладач кафедри алгебри, ДВНЗ «ДДПУ»*

[3–5] *студенти фізико-математичного факультету, ДВНЗ «ДДПУ»*

e-mail: sgpi@slav.dn.ua

НАБЛИЖЕННЯ ПОТРІЙНИМИ СУМАМИ ФЕЙЄРА

Отримані розв'язки екстремальної задачі для точних верхніх меж наближень потрійними операторами Фейєра на класі інтегралів Пуассона.

Ключові слова: *ряди Фур'є, повторні суми Фейєра, асимптотична формула.*

Нехай

$$S_n(f;x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n}(a_k(f)\cos kx + b_k(f)\sin kx)$$

— часткова сума ряду Фур'є сумовної 2π–періодичної функції f. Нехай $p_1 + p_2 + p_3 = n - 1$. Потрійними сумами Фейєра функції f будемо називати тригонометричні многочлени, які задаються наступним співвідношенням [3]

$$\sigma_{n,\bar{p}}^{(3,1)}(f;x) = \frac{1}{p_1}\sum_{k=n-p_1}^{n-1}\frac{1}{p_2}\sum_{m=k-p_2+1}^{k}\frac{1}{p_3}\sum_{r=m-p_3+1}^{m} S_r(f;x).$$

Наслідуючи О.І. Степанця [1], через $C^q_{\beta,\infty}$ – класи неперервних 2π–періодичних функцій $f(x)$, які можна подати у вигляді згортки

$$f(x) = A_0 + \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(x+t)P^q_\beta(t)\,dt,$$

де $P^q_\beta(t) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} q^k\cos(kt + \frac{\beta\pi}{2})$ – ядро Пуассона, а через $\varphi \in S^0_M$ позначається множина функцій істотно обмежених одиницею і таких, що мають нульове середнє значення на періоді.

Питанням наближення класів $C^q_{\beta,\infty}$ лінійними методами присвячені роботи відомих спеціалістів з теорії функцій. З бібліографією до цих питань можна ознайомитися у роботах [1]–[3].

В даній роботі отримані асимптотичні формули для величин

$$\mathcal{E}(C^q_{1,\infty}, \sigma_n^{(3,0)}) = \sup_{f\in C^q_{1,\infty}} ||f(x) - \sigma_n^{(3,0)}(f,x)||_C.$$

© Новіков О.О., Стьопкін А.В., Волик С.В., Сипчук Є.Ю., 2016

Теорема 1. *Нехай* $q \in (0;1)$, *тоді для* $n \to \infty$, $p_i \to \infty$, $i = 1,2,3$ *має місце асимптотична формула*

$$\mathcal{E}(C^q_{1,\infty}; \sigma^{(3,1)}_{n,\bar{p}}) = \frac{4q^4(1+q^2)}{\pi p_1 p_2 p_3 (1-q^2)^3} + O(1) R^{(3)}_n, \tag{1}$$

де $R^{(3)}_n = \frac{q^{p_1}+q^{p_2}+q^{p_3}}{p_1 p_2 p_3 (1-q)^7}$.

Доведення. Застосовуючи формулу (6) роботи [3], отримуємо для $q \in (0;1)$, $\beta = 1$, $p_1 + p_2 + p_3 = n-1$

$$\delta^{(3,1)}_n(f,x) \stackrel{df}{=} f(x) - \sigma^{(3,1)}_n(f;x) = \frac{-q^4}{\pi p_1 p_2 p_3} \times$$

$$\times \int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{f^q_\beta(x+t)(\sin 4t - 4q \sin 3t + 6q^2 \sin 2t - 4q^3 \sin t)}{(1-2q\cos t + q^2)^4} dt + O(1) R^{(3)}_n, \tag{2}$$

де $f^q_\beta(x)$ така, що

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^q_\beta(x+t) P^q_\beta(t)\, dt.$$

Враховуючи, що функція

$$\xi_q(t) = 4 \sin t [2\cos^3 t - 4q \cos^2 t + [3q^2 - 1] \cos t + q - q^3];$$

для будь-якого $q \in (0;1)$ змінює знак у точках $t = 0$, $t = \pm\pi$; $t = \pm \arccos q$; $t = \arccos \frac{q \pm \sqrt{2-q^2}}{2}$ і виконується умова

$$\arccos \frac{q + \sqrt{2-q^2}}{2} \leqslant \arccos q \leqslant \arccos \frac{q - \sqrt{2-q^2}}{2},$$

побудуємо функцію, яка замість $f^q_\beta(x)$ забезпечує найбільше значення головного члена інтегрального уявлення (2). Маємо

$$\varphi(t) = \operatorname{sign}(\xi_q(t)) = \begin{cases} +1, & -\pi \leqslant t < -\arccos \frac{q-\sqrt{2-q^2}}{2}; \\ -1, & -\arccos \frac{q-\sqrt{2-q^2}}{2} \leqslant t < -\arccos q; \\ +1, & -\arccos q \leqslant t < -\arccos \frac{q+\sqrt{2-q^2}}{2}; \\ -1, & -\arccos \frac{q+\sqrt{2-q^2}}{2} \leqslant t < 0; \\ +1, & 0 \leqslant t < \arccos \frac{q+\sqrt{2-q^2}}{2}; \\ -1, & \arccos \frac{q+\sqrt{2-q^2}}{2} \leqslant t < \arccos q; \\ +1, & \arccos q \leqslant t < \arccos \frac{q-\sqrt{2-q^2}}{2}; \\ -1, & \arccos \frac{q-\sqrt{2-q^2}}{2} \leqslant t \leqslant \pi. \end{cases}$$

Оскільки $\varphi \in S_M^0$, то

$$\mathcal{E}(C^q_{1,\infty};\sigma^{(3,1)}_{n,\overline{p}}) = \sup_{f\in C^q_{1,\infty}} ||\delta^{(3,1)}_{n,\overline{p}}(f;x)|| =$$

$$= \frac{8q^4}{\pi p_1p_2p_3}\int\limits_0^{\pi} \frac{|\sin t[2\cos^3 t - 4q\cos^2 t + [3q^2-1]\cos t + q - q^3]|}{(1-2q\cos t+q^2)^4}dt + O(1)R_n^{(3)} =$$

$$= \frac{8q^4}{\pi p_1p_2p_3}\int\limits_0^{\arccos\frac{q+\sqrt{2-q^2}}{2}} \frac{\sin t[2\cos^3 t - 4q\cos^2 t + [3q^2-1]\cos t + q - q^3]}{(1-2q\cos t+q^2)^4}dt -$$

$$-\frac{8q^4}{\pi p_1p_2p_3}\int\limits_{\arccos\frac{q+\sqrt{2-q^2}}{2}}^{\arccos q} \frac{\sin t[2\cos^3 t - 4q\cos^2 t + [3q^2-1]\cos t + q - q^3]}{(1-2q\cos t+q^2)^4}dt -$$

$$+\frac{8q^4}{\pi p_1p_2p_3}\int\limits_{\arccos q}^{\arccos\frac{q-\sqrt{2-q^2}}{2}} \frac{\sin t[2\cos^3 t - 4q\cos^2 t + [3q^2-1]\cos t + q - q^3]}{(1-2q\cos t+q^2)^4}dt -$$

$$-\frac{8q^4}{\pi p_1p_2p_3}\int\limits_{\arccos\frac{q-\sqrt{2-q^2}}{2}}^{\pi} \frac{\sin t[2\cos^3 t - 4q\cos^2 t + [3q^2-1]\cos t + q - q^3]}{(1-2q\cos t+q^2)^4}dt +$$

$$+O(1)R_n^{(3)}. \qquad (3)$$

Виконуючи інтегрування, знаходимо

$$J(t;q) = \int \frac{\sin t[2\cos^3 t - 4q\cos^2 t + [3q^2-1]\cos t + q - q^3]}{(1-2q\cos t+q^2)^4}dt =$$

$$= \frac{-1}{8q^4}\ln(1-2q\cos t+q^2) - \frac{3-q^2}{8q^4(1-2q\cos t+q^2)} +$$

$$+\frac{(1-q^2)(3-q^2)}{16q^4}(1-2q\cos t+q^2)^{-2} + \frac{(q^2-1)^3}{24q^4}(1-2q\cos t+q^2)^{-3}.$$

Тоді на підставі (3)

$$\mathcal{E}(C^q_{\beta,\infty};\sigma^{(3,1)}_{n,\overline{p}}) = \frac{8q^4}{\pi p_1p_2p_3}[2J(\arccos\frac{q+\sqrt{2-q^2}}{2}) +$$

$$+2J(\arccos\frac{q+\sqrt{2-q^2}}{2}) - J(0) - 2J(q) - J(\pi)] + O(1)R_n^{(3)}. \qquad (4)$$

Виконуючи обчислення, маємо

$$J(t;q)\Big|_{0}^{\arccos\frac{q+\sqrt{2-q^2}}{2}}+\Big|_{\arccos\frac{q+\sqrt{2-q^2}}{2}}^{\arccos q}+\Big|_{\arccos q}^{\arccos\frac{q-\sqrt{2-q^2}}{2}}+\Big|_{\arccos\frac{q-\sqrt{2-q^2}}{2}}^{\pi}=\frac{1+q^2}{2(1-q^2)^3}.$$

Тоді на підставі (4) отримуємо рівність (1). Теорема доведена.

Література

1. *Степанец А.И.* Решение задачи Колмогорова-Никольского для интегралов Пуассона непрерывных функций // Мат. сборник. — 2001. — Т. 192, № 1. — С. 113—138.
2. *Степанец А.И.* Приближения суммами Валле Пуссена / Степанец А.И., Рукасов В.И., Чайченко С.О. — К. : Ін-т математики НАН України, — 2007. — 386 с. — (Праці Ін-ту математики НАН України ; т. 68).
3. *Новиков О.А.* Приближение классов интегралов Пуассона r-повторными суммами Валле Пуссена /*Новиков О.А., Ровенская О.Г.* // Вісник Одеського національного університету. Математика і механіка. — 2014. — Т.19, вип. 3(23). — С.14–26.

Novikov O., Stepkin A., Volyk S., Sypchuk Ye.
Donbas State Teachers' Training University, Slovians'k, Ukraine.

The approach of triple sums Fejer

The solutions of the extremum problem for exact upper bounds of approximations by the triple operators of Fejer on the class of Poisson integrals has been obtained.

Keywords: *Fourier series, repeated sums of Fejer, the asymptotic equations.*

УДК 512.552.3, 511.14

Пащенко З.Д., Вагнер Г.О.

[1] *кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри алгебри, ДВНЗ «ДДПУ»*
[2] *студентка 3 курсу фізико-математичного факультету, ДВНЗ «ДДПУ»*

e-mail: pashchenko_zd@mail.ru; annetvagner@mail.ru

СКІНЧЕННІ ЛАНЦЮГОВІ ГАУСОВІ ДРОБИ

У статті розглядається можливість представлення довільного комплексного числа у вигляді ланцюгових гаусових дробів. Автори сформулювали твердження, що раціональні гаусові числа і тільки вони представляються у вигляді скінченного ланцюгового гаусового дробу.

Ключові слова: *гаусові числа, алгоритм Евкліда, ланцюгові дроби гаусових чисел.*

Вступ

В теорії чисел широке застосування знайшли ланцюгові дроби. Вони використовуються для представлення дійсних чисел, при розв'язуванні діофантових рівнянь, при наближених обчисленнях раціональних дробів, квадратних коренів та ін. [5]. Так як діофантові рівняння можна застосовувати для лінійного представлення найбільшого спільного дільника двох чисел, то можна говорити про застосування ланцюгових дробів при вирішенні таких задач. Основним підґрунтям для побудови ланцюгового дробу раціонального числа є існування алгоритму Евкліда в кільці цілих чисел. В свою чергу, алгоритм Евкліда існує в довільному евклідовому кільці [4].

Оскільки кільце цілих гаусових чисел $Z[i]$ є евклідовим [3], то природно виникають питання 1) про можливість аналогічного представлення елементів поля часток $Z[i]$, а, можливо, і довільних комплексних чисел, у вигляді ланцюгових дробів, 2) про властивості такого аналогу ланцюгових дробів, 3) про застосування таких дробів. В даній статті вводиться поняття ланцюгового гаусового дробу та розглядається питання про представлення елементів поля часток $Z[i]$ у вигляді таких дробів.

Основна частина

Зауважимо, що довільна частка цілих гаусових чисел є комплексне число з раціональними коефіцієнтами:

$$\frac{a+bi}{c+di} = \frac{ac+bd}{c^2+d^2} + \frac{ad+bc}{c^2+d^2}i.$$

© Пащенко З.Д., Вагнер Г.О., 2016

З іншого боку довільне комплексне число з раціональними коефіцієнтами представляється у вигляді частки цілих гаусових чисел:

$$\frac{a_1}{a_2} + \frac{b_1}{b_2} i = \frac{a_1 b_2 + b_1 a_2 i}{a_2 b_2}.$$

Тому полем часток $Z[i]$ буде поле $Q[i]$. Назвемо числа цього поля **гаусовими дробами або раціональними гаусовими числами.**

Нагадаємо означення евклідового кільця. Область цілісності K (комутативне кільце з одиницею без дільників нуля) називається **евклідовим кільцем**, якщо існує таке відображення $\delta : K_{-0} \to N_0$, (воно називається **нормою**) яке задовольняє умовам:

1. $\delta(ab) \geqslant \delta(a), \forall a, b \neq \theta \in K$
2. $\forall a, b \in K, b \neq \theta \; \exists q, r \in K$, що
   а) $a = bq + r$,
   б) $\delta(r) < \delta(b)$ або $r = \theta$.

Виконання умови 2) найчастіше називають теоремою про ділення з остачею.

Якщо в області цілісності $Z[i]$ обрати норму $\delta(a + bi) = a^2 + b^2$, то $Z[i]$ задовольняє означенню евклідового кільця [1]. Зауважимо, що для довільних комплексних чисел

$\delta(z) = |z|^2, \delta(z_1 z_2) = \delta(z_1)\delta(z_2), \delta(\frac{z_1}{z_2}) = \frac{\delta(z_1)}{\delta(z_2)}$,

$\delta(z) = 0 \Leftrightarrow z = 0, \delta(z) < n \Longleftrightarrow |z| < \sqrt{n}, \delta(z) \leqslant 1 \Longleftrightarrow |z| \leqslant 1$.

Ціла $[z]$ та дробова $\{z\}$ частини комплексного числа $z = s + ti$ обчислюються таким чином, щоб $[z]$ було найближчим цілим гаусовим числом до числа z, а $\{z\} = z - [z]$. Тоді $z = [z] + \{z\}, [z] \in Z[i]$ і $\delta(\{z\}) \leqslant \frac{1}{2}$. В залежності від значень s і t, ціла частина $[z]$ може мати значення $[s]+[t]i$, $[s]+1+[t]i$, $[s] + ([t] + 1)i$, $[s] + 1 + ([t] + 1)i$.

Коротко опишемо алгоритм ділення числа $\alpha = a + bi$ на число $\beta = c + di$ з остачею в $Z[i]$. Він полягає в підборі q як цілої частини $\frac{\alpha}{\beta}$ та обчисленні $r = \alpha - \beta q$.

Тоді $\frac{r}{\beta}$ є дробовою частиною $\frac{\alpha}{\beta}$ і $\delta(\frac{r}{\beta}) \leqslant \frac{1}{2}$, звідки $\delta(r) \leqslant \frac{1}{2}\delta(\beta) < \delta(\beta)$.

Дріб вигляду $q_0 + \cfrac{1}{q_1 + \cfrac{1}{q_2 + \cfrac{1}{\ddots}}}$,

де $q_k \in Z[i], k = 0, 1, 2, \ldots$, будемо називати **ланцюговим гаусовим дробом**. Такий дріб позначається $[q_0; q_1, q_2, q_3, \ldots]$.

Розглянемо **скінченні ланцюгові гаусові дроби** $[q_0; q_1, q_2, q_3, \ldots, q_s]$ **s-го порядку**. Зрозуміло, що $q_s \neq 0$. Зауважимо, що кожний ланцюговий дріб $[q_0; q_1, q_2, q_3, \ldots]$ можна привести до рівнозначного, у якого нульовим може

бути лише перший коефіцієнт. Для позбавлення від нульового коефіцієнту застосовуються деякі перетворення, які ми опишемо.

Якщо $\alpha = [q_0; q_1, q_2, ...]$, то $\alpha = [q_0; q_1, q_2, ..., q_{k-1}, \beta]$, де $\beta = [q_k, q_{k+1}, ...]$. Тоді $\forall k \geqslant 0$ маємо: $[q_k, 0, q_{k+2}, q_{k+3}, q_{k+4}, ...] = [q_k + q_{k+2}, q_{k+3}, q_{k+4}, ...]$; $[0, 0, q_{k+2}, q_{k+3}, q_{k+4}, ...] = [q_{k+2}, q_{k+3}, q_{k+4}, ...]$.

Тобто,

1) якщо ланцюговий дріб α містить один нульовий коефіцієнт $q_{k+1} = 0$ між ненульовими q_k, q_{k+2}, то три коефіцієнти замінюються одним $q_k + q_{k+2}$,
2) якщо ланцюговий дріб α містить два сусідніх нульових коефіцієнти, то ці коефіцієнти вилучаються.

Застосовуючи ці два перетворення, довільний ланцюговий дріб α може бути приведений до вигляду $\alpha = [t_0, t_1, t_2, ...]$, $t_j \neq 0$, $j = 1, 2, ...$.

Не можна позбутися нульового коефіцієнту $t_0 = 0$, якщо $t_1 \neq 0$, бо до цього випадку не можна застосувати жодного з описаних перетворень.

1) Скінченний ланцюговий гаусів дріб 0-го порядку $\alpha = [q_0] = q_0 \in Z[i]$. Якщо $\alpha = [q_0; q_1]$ — скінченний ланцюговий дріб 1-го порядку, то $\alpha = q_0 + \frac{1}{q_1} = \frac{q_0 q_1 + 1}{q_1} \in Q[i]$.
2) Припустимо, що довільний скінченний гаусовий дріб $(s-1)$-го порядку представляється у вигляді гаусового дробу $\frac{a'}{b'} \in Q[i]$.

Нехай $\alpha = [q_0; q_1, q_2, q_3, ..., q_s], q_i \neq 0, i = 1, 2, 3, ...$– скінченний ланцюговий гаусів дріб s-го порядку. Тоді, за припущенням, скінченний ланцюговий гаусів дріб $(s-1)$-го порядку $[q_1; q_2, q_3, ..., q_s]$ представляється у вигляді гаусового дробу $\frac{a'}{b'}$, причому його ціла частина $q_1 \neq 0$, тому $a' \neq 0$, а також $\alpha = q_0 + \frac{1}{q_1 + \frac{1}{\ddots + \frac{1}{q_s}}} = q_0 + \frac{1}{[q_1; q_2, ..., q_s]} = q_0 + \frac{1}{\frac{a'}{b'}} = q_0 + \frac{b'}{a'} = \frac{q_0 a' + b'}{a'} = \frac{a}{b} \in Q[i]$.

Отже, нами одержано

Твердження 1. *Довільний скінченний ланцюговий гаусовий дріб представляється у вигляді гаусового дробу* $\frac{a}{b}$.

Зауваження 1. *Ми також одержали залежність чисельника* a *і знаменника* b *скінченного ланцюгового гаусового дробу* s*-го порядку* $\alpha = [q_0; q_1, q_2, q_3, ..., q_s]$ *від чисельника* a' *і знаменника* b' *скінченного ланцюгового гаусового дробу* $\alpha = [q_1; q_2, q_3, ..., q_s]$ $(s-1)$*-го порядку, яка виражається формулами:* $a = q_0 a' + b'$, $b = a'$.

З іншого боку, *довільне раціональне гаусове число може бути представлене у вигляді скінченного ланцюгового гаусового дробу.* Це представлення може бути одержане за допомогою алгоритму Евкліда.

Нехай $\alpha = \frac{a}{b}$, $a, b \in Z[i], b \neq 0$. Застосуємо до a і b алгоритм Евкліда. Нехай він має остачі від послідовного ділення $r_0, r_1, r_2, ..., r_k, r_{k+1} = 0$, а його неповні частки $q_0, q_1, q_2, ..., q_k, q_{k+1}$. Тоді маємо наступне:

1. $a = bq_0 + r_0, \delta(r_0) \leqslant \frac{1}{2}\delta(b)$, $q_0 = [\frac{a}{b}]$	1. $\frac{a}{b} = q_0 + \frac{r_0}{b} = q_0 + \frac{1}{\frac{b}{r_0}}$, $\delta(\frac{b}{r_0}) \geqslant 2$
2. $b = r_0 q_1 + r_1, \delta(r_1) \leqslant \frac{1}{2}\delta(r_0)$, $q_1 = [\frac{b}{r_0}]$	2. $\frac{b}{r_0} = q_1 + \frac{r_1}{r_0} = q_1 + \frac{1}{\frac{r_0}{r_1}}, \delta(\frac{r_0}{r_1}) \geqslant 2$
3. $r_0 = r_1 q_2 + r_2, \delta(r_2) \leqslant \frac{1}{2}\delta(r_1)$, $q_2 = [\frac{r_0}{r_1}]$	3. $\frac{r_0}{r_1} = q_2 + \frac{r_2}{r_1} = q_2 + \frac{1}{\frac{r_1}{r_2}}$, $\delta(\frac{r_1}{r_2}) \geqslant 2$
$k+1$. $r_{k-2} = r_{k-1} q_k + r_k$, $\delta(r_k) \leqslant \frac{1}{2}\delta(r_{k-1}), q_k = [\frac{r_{k-2}}{r_{k-1}}]$	$k+1$. $\frac{r_{k-2}}{r_{k-1}} = q_2 + \frac{1}{\frac{r_{k-1}}{r_k}}, \delta(\frac{r_{k-1}}{r_k}) \geqslant 2$
k. $r_{k-1} = r_k q_{k+1} + \theta$, $q_{k+1} = [\frac{r_{k-1}}{r_k}]$.	k. $\frac{r_{k-1}}{r_k} = q_{k+1}$.

Зауважимо, що $\delta(\frac{b}{r_0}) \geqslant 2$, $\delta(\frac{r_{j-1}}{r_j}) \geqslant 2$, $j = 1, 2, ...$. Тобто модуль цих комплексних чисел не менше $\sqrt{2}$. Отже, вони знаходяться на комплексній площині за межами кола з центром в початку координат і радіусом $\sqrt{2}$, включаючи саме коло. Оскільки неповні частки $q_j, j = 1, 2, ...$ знаходяться як цілі частини від чисел, що знаходяться в цій області, то найменша норма цих неповних часток буде 1. Ця норма досягається на числах $1, i, -1, -i$. Взагалі, всі значення $q_j, j = 1, 2, ...$ знаходяться за межами квадрата цілих гаусових чисел з вершинами $\pm 1 \pm i$, тобто можуть приймати довільні, відмінні від нуля, значення ($q_j \neq 0, j = 1, 2, ...$) в кільці $Z[i]$.

Поступова підстановка виразів із правої частини (аналізу) алгоритму Евкліда дає наступний і теоретичний, і практичний результат:

$$\frac{a}{b} = q_0 + \cfrac{1}{q_1 + \cfrac{1}{\ddots + \frac{1}{q_k + \frac{1}{q_{k+1}}}}} = [q_0; q_1, q_2, ..., q_{k+1}] -$$

довільне раціональне гаусове число $\alpha = \frac{a}{b}, a, b \in Z[i], b \neq 0$ *може бути представлене у вигляді скінченного ланцюгового гаусового дробу, який складається із неповних часток алгоритму Евкліда, застосованого до* a і b.

Таким чином маємо

Твердження 2. *Раціональні гаусові числа і тільки вони представляються у вигляді скінченного ланцюгового гаусового дробу.*

Для довільного комплексного числа z можна розглядати процес поступового виділення цілої частини цього числа та чисел, обернених до дробової частини попереднього: $q_0 = [z]; \{z\} \neq 0$,

$z_1 = \frac{1}{\{z\}}, q_1 = [z_1], \{z_1\} \neq 0\,, \quad z_2 = \frac{1}{\{z_1\}}, q_2 = [z_2], \{z_2\} \neq 0, ...$
Тоді $z = [q_0; q_1, q_2, ...]$.
Якщо $\exists z_s$, що $\{z_s\} = 0$, то $z = [q_0; q_1, q_2, ..., q_s] \in Q[i]$.

Твердження 3. *Довільне комплексне число можна представити у вигляді ланцюгового гаусового дробу.*

Висновки

Отримане твердження дає позитивну відповідь на поставлене в цій роботі питання. Аналізуючи перспективи продовження даного дослідження, цікаво одержати відповідь на питання про однозначність представлення довільного комплексного числа у вигляді ланцюгових гаусових дробів, про властивості підхідних дробів ланцюгових гаусових дробів, про застосування ланцюгових гаусових дробів. В межах даної статті не розглядалися підхідні дроби ланцюгових гаусових дробів та рекурентні формули для обчислення чисельників та знаменників цих дробів. Та зазначене зауваження 1 дає право сподіватись, що ці рекурентні формули будуть співпадати з такими формулами для ланцюгових дробів цілих чисел.

Література

1. *Безущак О.О., Ганюшкін О.Г.* Елементи теорії чисел: Навч. посібник. — К. : полігр. центр «Київський університет», 2003. — 202 с.
2. *Бородін О. І.* Теорія чисел. — К.: Вища шк., 1970. — 275 с.
3. *Карл Фридрих Гаусс* Труды по теории чисел. — М.: Издательство академии наук СССР., 1959. — 980 с.
4. *Куликов Л. Я.* Алгебра и теория чисел. — М.: Высшая шк., 1979. — 559 с.
5. Цепные дроби их применения: сб. научных трудов / под ред. В.Я. Скоробогатько. Институт математики АН УССР. — Киев, 1976. — С. 96–97.

Pashchenko Zoja D., Vagner Anna A.
Donbas State Teachers' Training University, Slovians'k, Ukraine.

Gaussian finite continued fraction

The article deals with the possibility of representing arbitrary complex numbers as Gaussian continued fractions. The authors formulated a statement that the Gaussian rational numbers, and only them are presented as a Gaussian finite continued fraction.

Keywords: *Gaussian numbers, Euclidean algorithm, continued fractions of Gaussian numbers.*

УДК 512.562

Кадубовський О.А., Баляса Н.П.

[1] *кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри геометрії та МВМ, ДВНЗ «ДДПУ»*

[2] *студентка 5 курсу фізико-математичного факультету, ДВНЗ «ДДПУ»; лаборант кафедри природничо-математичних дисциплін та методики їх викладання, ДонОблІППО*

e-mail: kadubovs@ukr.net, balyasa@ippo.dn.ua

ПЕРЕРАХУВАННЯ ДВОКОЛЬОРОВИХ ХОРДОВИХ O-ДІАГРАМ РОДУ 1, ЯКІ МАЮТЬ ОДИН ЧОРНИЙ (АБО СІРИЙ) ЦИКЛ, ВІДНОСНО ДІЇ ЦИКЛІЧНОЇ ТА ДІЕДРАЛЬНОЇ ГРУП

Для натуральних $n \geqslant 3$ встановлено формули підрахунку числа нееквівалентних 2-кольорових хордових O-діаграм (з n хордами), які мають лише один чорний (сірий) та $(n-2)$ сірих (відповідно чорних) циклів відносно дії діедральної групи (порядку $2n$). Крім того, для початкових $3 \leqslant n \leqslant 10$ в явному вигляді наведено всі неізоморфні та нееквівалентні діаграми із зазначених класів, а для $3 \leqslant n \leqslant 40$ — точні значення числа неізоморфних та відповідно нееквівалентних таких діаграм.

Ключові слова: *2-кольорова хордова O-діаграма з n хордами, род діаграми, цикл діаграми, група діедра.*

Вступ

Добре відомо, що хордові діаграми ефективно використовують в багатьох галузях науки, зокрема математиці (топології, теорії вузлів), фізиці, біології, генетиці тощо.

Нагадаємо, що *хордовою діаграмою порядку* n або, коротко, n-діаграмою називають конфігурацію на площині, що складається з кола, $2n$ точок на ньому (які є вершинами правильного $2n$-кутника) та n хорд, що сполучають вказані точки. Хордові діаграми називають *ізоморфними*, якщо одну можна одержати з іншої в результаті повороту. Діаграми називають *еквівалентними*, якщо їх можна сумістити за допомогою повороту, дзеркального відбиття, або ж їх композиції.

Питаннями переліку певних класів хордових n-діаграм (відносно дії циклічної групи порядку $2n$ та діедральної групи порядку $4n$) займалась ціла низка відомих математиків та сучасників, зокрема автори робіт [10], [8], [3], [7], [2], [9], [6], [1]. Задачі про підрахунок числа неізоморфних та нееквівалентних n-діаграм були повністю розв'язані в роботах [7], [2], [9], [6].

© Кадубовський О.А., Баляса Н.П., 2016

Слід відзначити, що вперше число хордових n-діаграм *фіксованого роду* g було підраховано ще у 1972 р. в [10], більш елегантну рекурентну формулу для підрахунку числа таких діаграм було встановлено у 1986 р. в [3]. Проте, формули для підрахунку числа неізоморфних *планарних* (роду 0), *тороїдальних* (роду 1) n-діаграм та $2m$-діаграм *максимального роду* m було встановлено лише у 2000 р. в роботі [2]. Інші результати, крім зазначених випадків, авторам статті є невідомими.

Крім того, слід констатувати, що *одержання явних формул для підрахунку числа неізоморфних (а тому і нееквівалентних)*, зокрема двокольорових, n-діаграм *фіксованого роду* виявилося досить складною задачею і в загальному випадку до сьогодні *нерозв'язаною проблемою.*

Для **двокольорових** діаграм найбільш вагомими є наступні результати:

задачі про підрахунок числа неізоморфних та нееквівалентних O- і N-діаграм (відповідно) повністю розв'язано в роботі [13];

формули для підрахунку числа неізоморфних та нееквівалентних O-діаграм (відповідно N-діаграм), які мають *точно один цикл певного кольору* (чорний або ж сірий) одержано в [14] та відповідно в [15];

формули для підрахунку числа неізоморфних та нееквівалентних *планарних* O-діаграм (з n хордами) було встановлено у 2000 р. в [1]; проте питання про узагальнення цієї задачі на випадок фіксованого числа чорних (або ж сірих) циклів було повністю розв'язано лише у 2014 р. в [16];

задача про підрахунок числа неізоморфних O-діаграм *максимального роду* (з одним чорним та одним сірим циклом) була розв'язана у 2006 р. в [12], а про число нееквівалентних таких діаграм — лише у 2015 р. в [17].

Навіть для випадку O-діаграм (з n хордами) фіксованого роду $g \geqslant 1$ (крім O-діаграм максимального роду), які мають *точно один* чорний (або ж сірий) цикл **питання залишається відкритим**.

Встановленню формул для підрахунку числа неізоморфних та нееквівалентних O-діаграм роду $g = 1$, які мають точно один чорний (або ж сірий) цикл й присвячена дана стаття.

1. Основні поняття та попередні відомості

Означення 1. *Коло з $2n$ точками на ньому (що є вершинами правильного $2n$-кутника), дуги якого почергово розфарбовані у два кольори (чорний і сірий) та фіксованою нумерацією вершин за годинниковою стрілкою, будемо називати двокольоровим $2n$-шаблоном — рис. 1 а).*

2-кольоровою *хордовою n-діаграмою будемо називати n-діаграму, побудовану на основі двокольорового $2n$-шаблону.*

Означення 2. *2-кольорову n-діаграму, яка не містить (містить) хорди, що сполучає вершини з номерами однакової парності, називають O-діаграмою (N-діаграмою) — рис. 1 $c), b)$.*

Означення 3. *«Чорним» («сірим») циклом 2-кольорової діаграми називатимемо послідовність хорд та чорних (сірих) дуг, які утворюють гомеоморфний образ (орієнтованого) кола — рис. 1 $b) - c)$.*

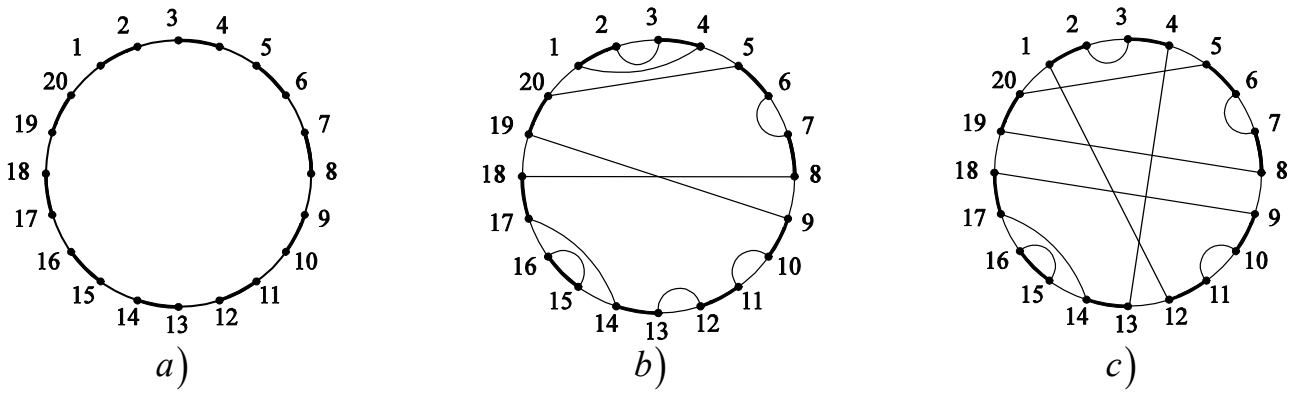


Рис. 1:
a) двокольоровий 20-шаблон;
b) N-діаграма (з 10 хордами), яка має 7 сірих та 3 чорних циклів;
c) O-діаграма (з 10 хордами), яка має 6 сірих та 3 чорних циклів

Якщо проігнорувати колір, то кожен чорний (сірий) цикл 2-кольорової O-діаграми співпадає з відповідним циклом непофарбованої діаграми. Тоді наслідуючи [2], природнім чином визначається рід O-діаграми, а саме

Означення 4. *Родом 2-кольорової O-діаграми будемо називати ціле число g, яке визначається рівністю*

$$g = \frac{n+1-\lambda}{2}, \tag{1}$$

де λ — сумарне число чорних і сірих циклів діаграми.

Означення 5. *Множину O-діаграм з n хордами (побудованих на 2-кольоровому $2n$-шаблоні), які мають точно 1 чорний та k сірих циклів будемо позначати $\Im^{O}_{1,k;n}$.*

Зауваження 1. *З урахуванням рівності (1) та введених позначень, діаграми з класу $\Im^{O}_{1,n-2;n}$ є O-діаграмами (з n хордами) роду 1. Тобто, для O-діаграм роду 1 з одним чорним (або ж сірим) циклом число k сірих (відповідно чорних) циклів визначається однозначно і становить $k = n - 2$.*

2. Основна частина

2.1. Число діаграм з класу $\Im^O_{1,n-2;n}$

Приклад 1. *При* $n = 3$ *існує* ***єдина*** *діаграма з класу* $\Im^O_{1,1;3}$ *– рис.* 2 *a*) *;*
при $n = 4$ *—* ***п'ять*** *діаграм з класу* $\Im^O_{1,2;4}$ *– рис.* 2 *b*) *.*

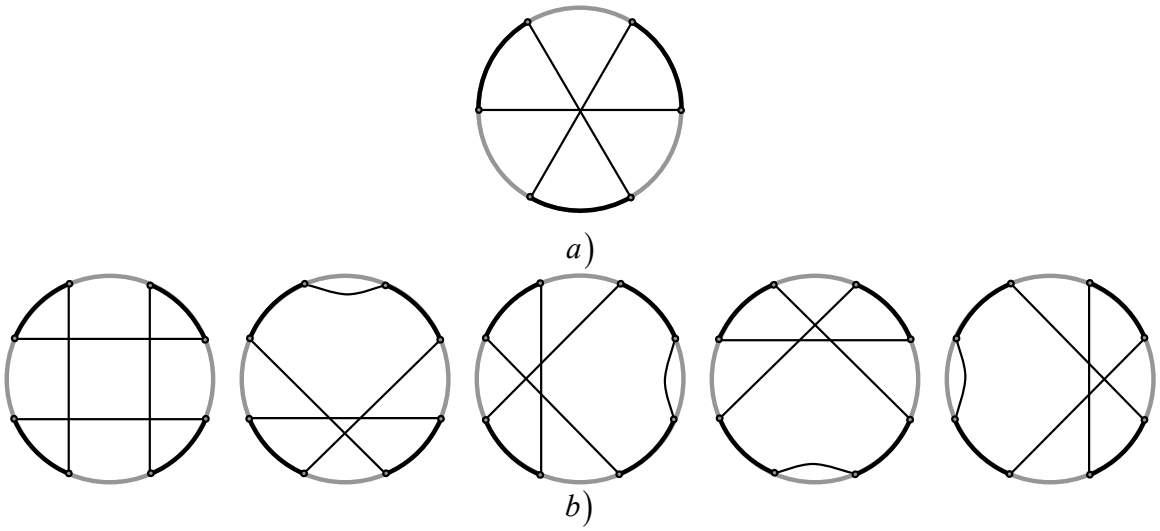


Рис. 2: *a*) єдина діаграма з класу $\Im^O_{1,1;3}$, *b*) всі діаграми з класу $\Im^O_{1,2;4}$

Лема 1. *Число* $d(n)$ *діаграм з класу* $\Im^O_{1,n-2;n}$ *можна знайти за формулою*

$$d(n) = C^4_{n+1} = \frac{(n-2)\cdot(n-1)\cdot n\cdot(n+1)}{24}. \qquad (2)$$

Доведення. За визначенням кожна діаграма з класу $\Im^O_{1,n-2;n}$ має точно 1 чорний та $n-2$ сірих циклів. Очевидно, що кожен з $(n-2)$ сірих циклів містить щонайменше 1 сіру дугу, решта (2 сірі дуги) можуть потрапити або до 2 різних циклів та сформувати точно два 2-цикли, або ж до одного циклу сформувавши точно один 3-цикл. Таким чином, всі O-діаграми (з n хордами) які мають $(n-2)$ сірі цикли можна умовно розділити дві множини:

перша множина діаграм характеризується наявністю точно двох 2-циклів та $(n-4)$ 1-циклів – рис. 3 *a*), *b*) ;

друга множина діаграм — наявністю точно одного 3-циклу та $(n-3)$ 1-циклів – рис. 3 *c*), *d*) .

Проте:

1) якщо хорди, які утворюють два 2-цикли не перетинаються (так, як це показано на рис. 3 *b*)), то така діаграма має точно три чорні цикли, і тому не належить класу $\Im^O_{1,n-2;n}$;

2) якщо хорди, які утворюють єдиний 3-цикл не перетинаються (так, як це показано на рис. 3 d)), то така діаграма також має точно три чорні цикли, і тому не належить класу $\Im^O_{1,n-2;n}$.

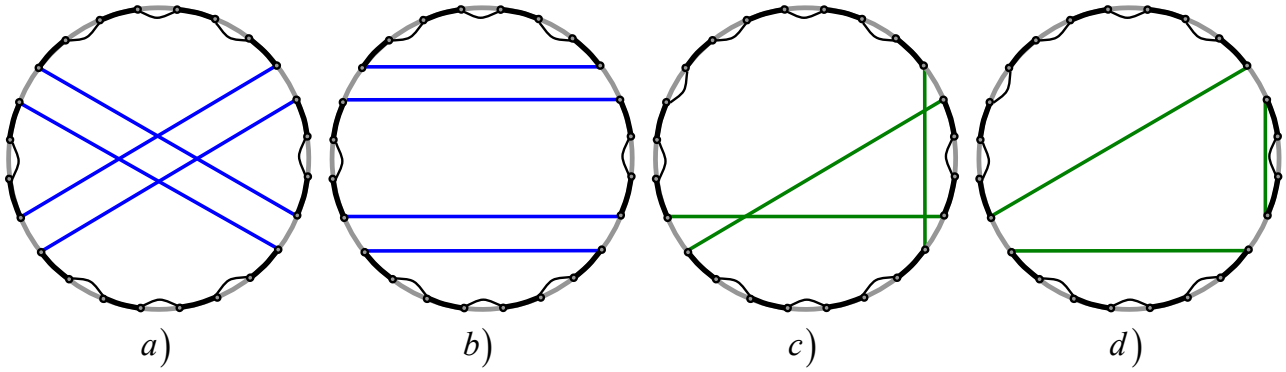


Рис. 3: $a), b)$ — два можливі типи O-діаграм (з n хордами), які мають два сірі 2-цикли та $(n-4)$ сірих 1-циклів, $c), d)$ — два можливі типи O-діаграм (з n хордами), які мають один сірий 3-цикл та $(n-3)$ сірих 1-циклів

З урахуванням зазначеного, всі діаграми з класу $\Im^O_{1,n-2;n}$ можна розділити на два характеристичні підкласи A і B, а саме:

діаграми з множини A характеризуються наявністю точно $(n-4)$ сірих 1-циклів та двох сірих 2-циклів, утворених хордами, що перетинаються – рис. 3 $a)$, а

діаграми з множини B — наявністю точно $(n-3)$ сірих 1-циклів та одного сірого 3-циклу, утвореного хордами, що перетинаються – рис. 3 $c)$.

Очевидно, що кожна діаграма з підкласу A однозначно визначається вибором 4-ох (з n) сірих дуг, і тому $|A| = C_n^4$;

так само, кожна діаграма з підкласу B однозначно визначається вибором 3-ох (з n) сірих дуг, і тому $|B| = C_n^3$.

Таким чином $\left|\Im^O_{1,n-2;n}\right| = |A| + |B| = C_n^4 + C_n^3 = C_{n+1}^4$. □

Зауваження 2. *Як з'ясувалося, для натуральних $n = n' + 1$ початкові значення величини $d(n) = \left|\Im^O_{1,n-2;n}\right|$ співпадають зі значеннями величини $S_H(n'; n'-1)$ — «Hultman number» [4]* (послідовність **A164652** в [11]).

Більше того, з урахуванням результатів роботи [17], має місце

Теорема 1. [17] *Для натуральних g та $n \geqslant 2g+1$ має місце рівність*

$$\left|\Im^O_{1,n-2g;n}\right| = S_H\left(n-1; n-2g\right), \tag{3}$$

а величину $S_H\left(n-1; n-2g\right)$ можна обчислити так, як це зроблено в [4] (Theorem 14) або ж в [5] (Theorem 4.1).

2.2. Ілюстративні приклади до числа нееквівалентних діаграм з класу $\Im^O_{1,n-2;n}$ для початкових n

Нижче для натуральних $n = 5; 6; 7; 8$ в явному вигляді наведено всі неізоморфні діаграми з відповідних класів $\Im^O_{1,n-2;n}$.

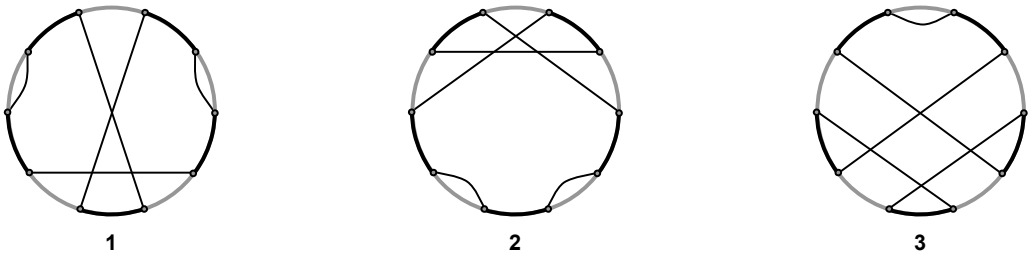


Рис. 4: всі неізоморфні діаграми з класу $\Im^O_{1,3;5}$

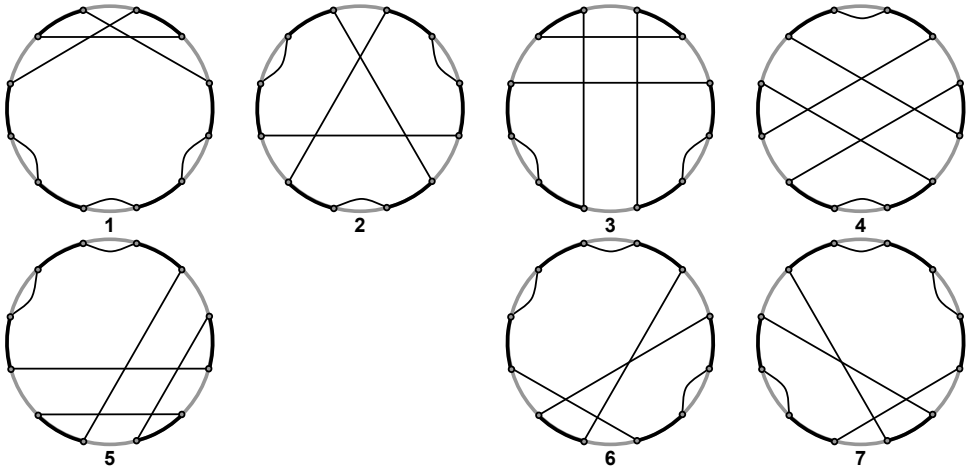


Рис. 5: всі неізоморфні діаграми з класу $\Im^O_{1,4;6}$

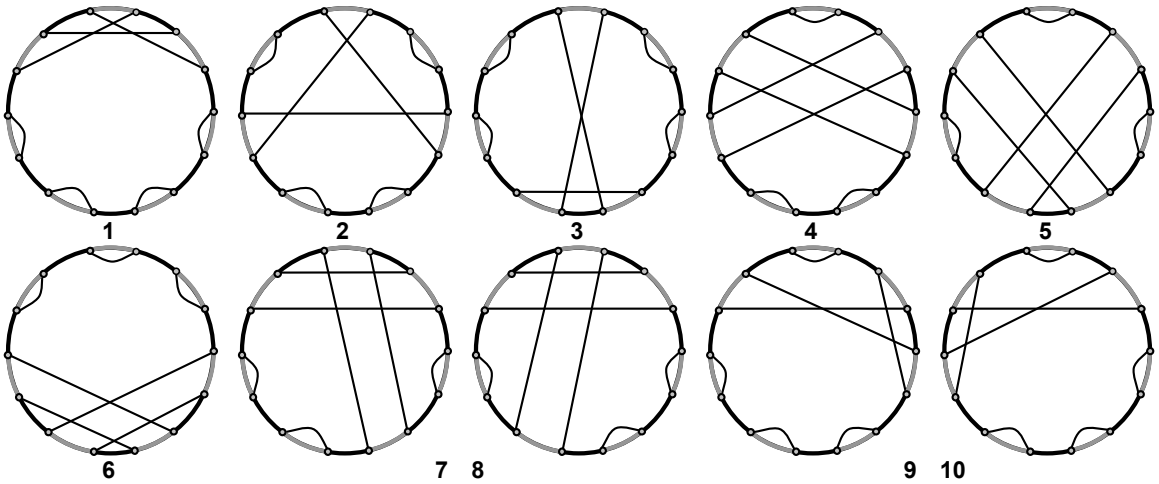


Рис. 6: всі неізоморфні діаграми з класу $\Im^O_{1,5;7}$

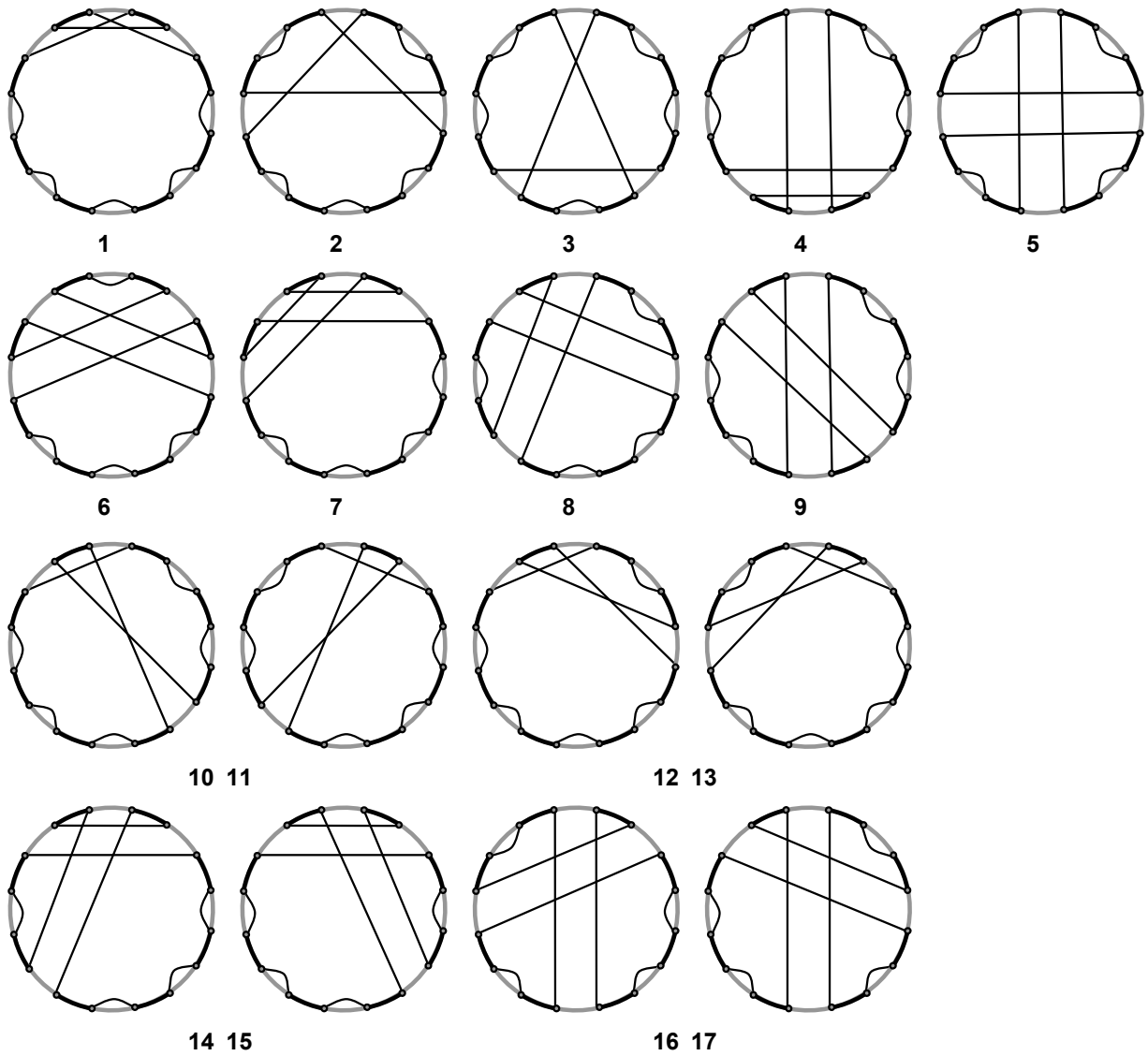


Рис. 7: всі неізоморфні діаграми з класу $\Im^O_{1,6;8}$

Не важко бачити, що:

у випадку $n = 5$ (рис. 4 вище) всі неізоморфні (відносно повороту) діаграми є також і нееквівалентними (відносно дії діедральної групи);

у випадку $n = 6$ (рис. 5) серед 7 неізоморфних діаграми 6 і 7 є еквівалентними, а тому існує лише $7 - 2 + 1 = 6$ нееквівалентних діаграм з класу $\Im^O_{1,4;6}$;

у випадку $n = 7$ (рис. 6) серед 10 неізоморфних діаграми 7 і 8 та 9 і 10 є еквівалентними, а тому існує лише $10 - 4 + 2 = 8$ нееквівалентних діаграм з класу $\Im^O_{1,5;7}$;

у випадку $n = 8$ (рис. 7) серед 17 неізоморфних діаграми 10 і 11, 12 і 13, 14 і 15 та 16 і 17 є еквівалентними, а тому існує лише $17 - 8 + 4 = 13$ нееквівалентних діаграм з класу $\Im^O_{1,6;8}$.

2.3. Число неізоморфних діаграм з класу $\Im^{O}_{1,n-2;n}$

За лемою Бернсайда (див. напр. [2], [13], [14]) число $d^*(n)$ неізоморфних (нееквівалентних відносно дії циклічної групи) діаграм з класу $\Im^{O}_{1,n-2;n}$ можна знайти за допомогою співвідношення

$$d^*(n) = \frac{1}{n}\left(d(n) + \sum_{i|n,\ i\neq n} \phi\left(\frac{n}{i}\right)\cdot \rho\left(n,i\right)\right), \tag{4}$$

де $d(n) = \left|\Im^{O}_{1,n-2;n}\right|$; $\phi(q)$ — функція Ейлера (кількість натуральних менших за q чисел, взаємнопростих із ним), а $\rho\left(n,i\right)$ — число тих діаграм з класу $\Im^{O}_{1,n-2;n}$, які самосуміщуються при повороті (за годинниковою стрілкою) на кут $\omega(n,i) = \frac{2\pi}{2n}\cdot 2i = 2\pi\cdot\frac{i}{n}$.

Очевидно, що для дільників $i \neq n$ числа n кут $\omega(n,i) \leqslant \pi$. Більше того, поклавши $j = \frac{n}{i}$, співвідношення (4) можна подати у вигляді

$$d^*(n) = \frac{1}{n}\left(d(n) + \sum_{j|n,\ j\neq 1} \phi(j)\cdot \rho\left(n,\tfrac{n}{j}\right)\right), \tag{5}$$

де $\rho\left(n,\frac{n}{j}\right)$ — число тих діаграм з класу $\Im^{O}_{1,n-2;n}$, які самосуміщуються при повороті (за годинниковою стрілкою) на кут $\omega\left(n,\frac{n}{j}\right) = \frac{2\pi}{j}$.

Теорема 2. *Для натуральних $n \geqslant 3$ число $d^*(n)$ неізоморфних (нееквівалентних відносно дії циклічної групи) діаграм з класу $\Im^{O}_{1,n-2;n}$ можна обчислити за формулами*

$$d^*(n) = \frac{1}{n}\left(C^4_{n+1} + \sum_{\substack{j|n,\\ j\in\{2,3,4\}}} \phi(j)\cdot \rho\left(n,\tfrac{n}{j}\right)\right), \tag{6}$$

$$\rho\left(n,\tfrac{n}{2}\right) = \frac{n(n-2)}{8}, \qquad \rho\left(n,\tfrac{n}{3}\right) = \frac{n}{3}, \qquad \rho\left(n,\tfrac{n}{4}\right) = \frac{n}{4}. \tag{7}$$

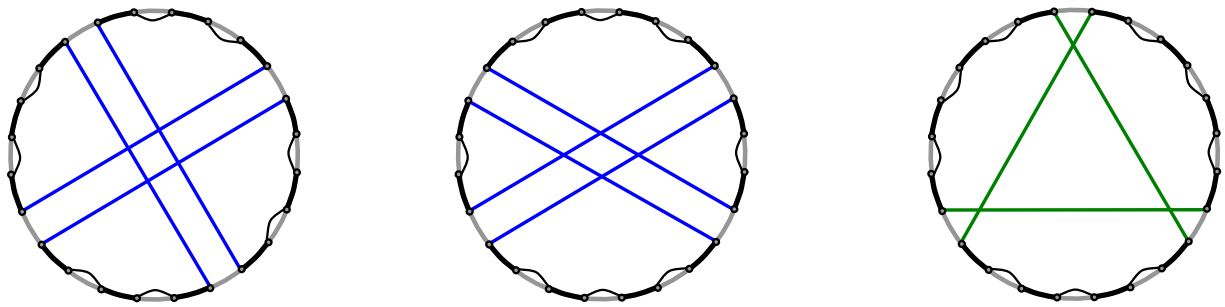
Доведення. Як було показано вище, всі діаграми з класу $\Im^{O}_{1,n-2;n}$ поділяються на два характеристичні підкласи A (рис. 8 $a), b)$) і B (рис. 8 $c)$).

Діаграми з підкласу B самосуміщуються при повороті на певний кут

$$\omega\left(n,\tfrac{n}{j}\right) = \frac{2\pi}{j}, \quad j \in \{2,...,n\} \tag{8}$$

лише за умов, коли n ділиться на 3, а поворот здійснюється на кут кратний куту $\omega = \frac{2\pi}{3}$ (при $j = 3$) — рис. 8 $c)$.

Для $n = 3k$ число таких діаграм становить C_k^1, або, що теж саме, для цілих $\frac{n}{3}$ число зазначених діаграм становить $\rho\left(n, \frac{n}{3}\right) = C_{\frac{n}{3}}^1 = \frac{n}{3}$.



a) *b*) *c*)

Рис. 8: всі типи діаграм з класу $\Im_{1,n-2;n}^O$, які самосуміщуються при повороті на кути $\frac{\pi}{2}$, π та $\frac{2\pi}{3}$ відповідно

Діаграми з підкласу A самосуміщуються при повороті на певний кут (8) лише за умов, коли n ділиться на 4 або ж на 2. Причому:

в першому випадку поворот здійснюється на кут кратний куту $\omega = \frac{\pi}{2}$ (при $j = 4$) — рис. 8 *a*),

в другому випадку — на кут кратний куту $\omega = \pi$ (при $j = 2$) — рис. 8 *b*). Крім того, не важко перевірити, що:

в першому випадку для $n = 4k$ число відповідних діаграм становить C_k^1; звідки для цілих $\frac{n}{4}$ число зазначених діаграм становить $\rho\left(n, \frac{n}{4}\right) = \frac{n}{4}$,

в другому випадку для $n = 2k$ число відповідних діаграм також становить C_k^1; звідки для цілих $\frac{n}{2}$ число зазначених діаграм становить $\rho\left(n, \frac{n}{2}\right) = \frac{n}{2}$. □

2.4. Число нееквівалентних діаграм з класу $\Im_{1,n-2;n}^O$

Застосовуючи лему Бернсайда (див. напр. [2], [13], [14]), не важко встановити, що число $d^{**}(n)$ нееквівалентних (відносно дії діедральної групи) діаграм з класу $\Im_{1,n-2;n}^O$ можна визначити за допомогою співвідношення

$$d_n^{**} = \frac{1}{2}\left(d^*(n) + S(n)\right), \tag{9}$$

де $d^*(n)$ — число неізоморфних діаграм з класу $\Im_{1,n-2;n}^O$,

$$S(n) = \begin{cases} s_0(n), & n = 2m+1 \\ \frac{1}{2}(s_1(n) + s_2(n)), & n = 2m, \end{cases} \tag{10}$$

$s_0(n)$ – число тих діаграм з класу $\Im_{1,n-2;n}^O$, що є симетричними відносно **фіксованої осі симетрії**, яка проходить через середини протилежних чорної та сірої дуг 2-кольорового $2n$-шаблону;

$s_1(n)$ ($s_2(n)$) — число тих діаграм з класу $\Im^O_{1,n-2;n}$, що є симетричними відносно **фіксованої осі симетрії**, яка проходить через середини протилежних чорних (відповідно сірих) дуг 2-кольорового $2n$-шаблону.

Таким чином, з урахуванням співвідношень (9), (10) та встановлених формул (6), (7) для обчислення величини $d^*(n)$, задача про підрахунок числа $d^{**}(n)$ нееквівалентних діаграм з класу $\Im^O_{1,n-2;n}$ зводиться до задач про підрахунок величин $s_0(n)$, $s_1(n)$, $s_2(n)$.

Зауваження 3. *В подальшому з метою більшої наочності та уникнення непотрібних нагромаджень (при візуалізації відповідних типів діаграм) дуги діаграми, які містять виключно сірі 1-цикли, будемо зображати у вигляді «прозорої» дуги, яку стягує пунктирна «дуга-хорда» – рис. 9 c).*

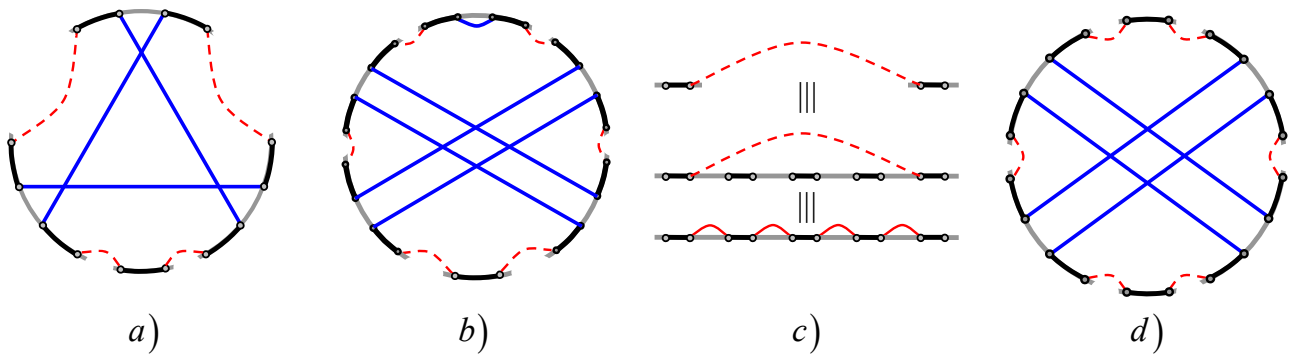


Рис. 9:

Лема 2. *Нехай $n = 2m+1$. Тоді число $s_0(n)$ діаграм з класу $\Im^O_{1,n-2;n}$, що є симетричними відносно фіксованої осі симетрії, яка проходить через середини протилежних чорної та сірої дуг 2-кольорового $2n$-шаблону, можна обчислити за формулою.*

$$s_0(n) = \frac{1}{8}(n-1)(n+1). \tag{11}$$

Доведення. Всі діаграми з класу $\Im^O_{1,n-2;n}$, що є симетричними відносно фіксованої осі симетрії, яка проходить через середини протилежних чорної та сірої дуг 2-кольорового $2n$-шаблону ($n = 2m+1$), вичерпуються діаграмами двох типів – *першого* і *другого*, зображених на рис. 9 *a*) та рис. 9 *b*) відповідно.

Оскільки $n = 2m+1$, то число діаграм *першого* типу становить $C^1_{\frac{(2m+1)-1}{2}} = C^1_m$. Число діаграм *другого* типу становить $C^2_{\frac{(2m+1)-1}{2}} = C^2_m$. І тому $s_0(n) = s_0(2m+1) = C^1_m + C^2_m = C^2_{m+1} = \frac{m\cdot(m+1)}{2} = \frac{1}{8}(n-1)(n+1)$.

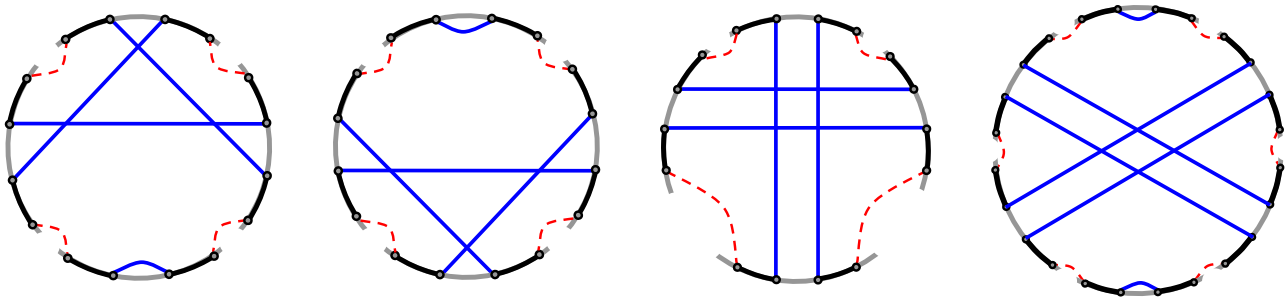
Лема 3. *Нехай* $n = 2m$. *Тоді мають місце рівності*

$$s_1(n) = C^2_{\frac{n}{2}} = \frac{1}{8}n(n-2), \quad s_2(n) = \frac{1}{8}(n-2)(n+8); \tag{12}$$

$$\frac{1}{2}\left(s_1(n) + s_2(n)\right) = \frac{1}{8}(n-2)(n+4). \tag{13}$$

Доведення. Всі діаграми з класу $\Im^O_{1,n-2;n}$, що є симетричними відносно фіксованої осі симетрії, яка проходить через середини протилежних чорних дуг 2-кольорового $2n$-шаблону ($n = 2m$), вичерпуються діаграмами виду, зображених на рис. 9 d). Число таких діаграм становить $C^2_{\frac{2m}{2}} = C^2_m$.

Звідки $s_1(n) = C^2_{\frac{n}{2}} = \frac{1}{8}n(n-2)$.



a) b) c) d)

Рис. 10:

Діаграми з класу $\Im^O_{1,n-2;n}$, що є симетричними відносно фіксованої осі симетрії, яка проходить через середини протилежних сірих дуг 2-кольорового $2n$-шаблону, вичерпуються діаграмами чотирьох типів – *першого*, *другого*, *третього* і *четвертого*, зображених на рис. 10 $a), b), c)$ і $d)$ відповідно.

Оскільки $n = 2m$, то
число діаграм *першого* типу становить $C^1_{\frac{2m-2}{2}} = C^1_{m-1}$;
число діаграм *другого* типу також становить C^1_{m-1};
число діаграм *третього* типу – $C^1_{\frac{2m-2}{2}} = C^1_{m-1}$, а
четвертого типу – $C^2_{\frac{2m-2}{2}} = C^2_{m-1}$.

І тому
$s_2(n) = s_2(2m) = 3C^1_{m-1} + C^2_{m-1} = 2C^1_{m-1} + C^2_m = \frac{1}{8}(n-2)(n+8)$.

Крім того,
$\frac{1}{2}\left(s_1(n) + s_2(n)\right) = \frac{1}{16}(n-2)\left(n+n+8\right) = \frac{1}{8}(n-2)(n+4)$.

□

З урахуванням співвідношень $(9), (10)$ та лем 1 і 2, має місце

Теорема 3. *Для натуральних* $n \geqslant 3$ *число* $d^{**}(n)$ *нееквівалентних (відносно дії діедральної групи) діаграм з класу* $\Im^{O}_{1,n-2;n}$ *можна обчислити за формулою*

$$d^{**}(n) = \frac{1}{2}\left(d^{*}(n) + S(n)\right), \tag{14}$$

де $d^{*}(n)$ *визначається за формулами* $(6), (7)$, *а*

$$S(n) = \begin{cases} \frac{1}{2}m(m+1), & n = 2m+1 \\ \frac{1}{2}(m-1)(m+2), & n = 2m. \end{cases} \tag{15}$$

3. Додатки та прикінцеві зауваження

Нижче (на рис. 11 та 12) в явному вигляді наведено всі неізоморфні діаграми з класів $\Im^{O}_{1,7;9}$ та $\Im^{O}_{1,8;10}$ відповідно.

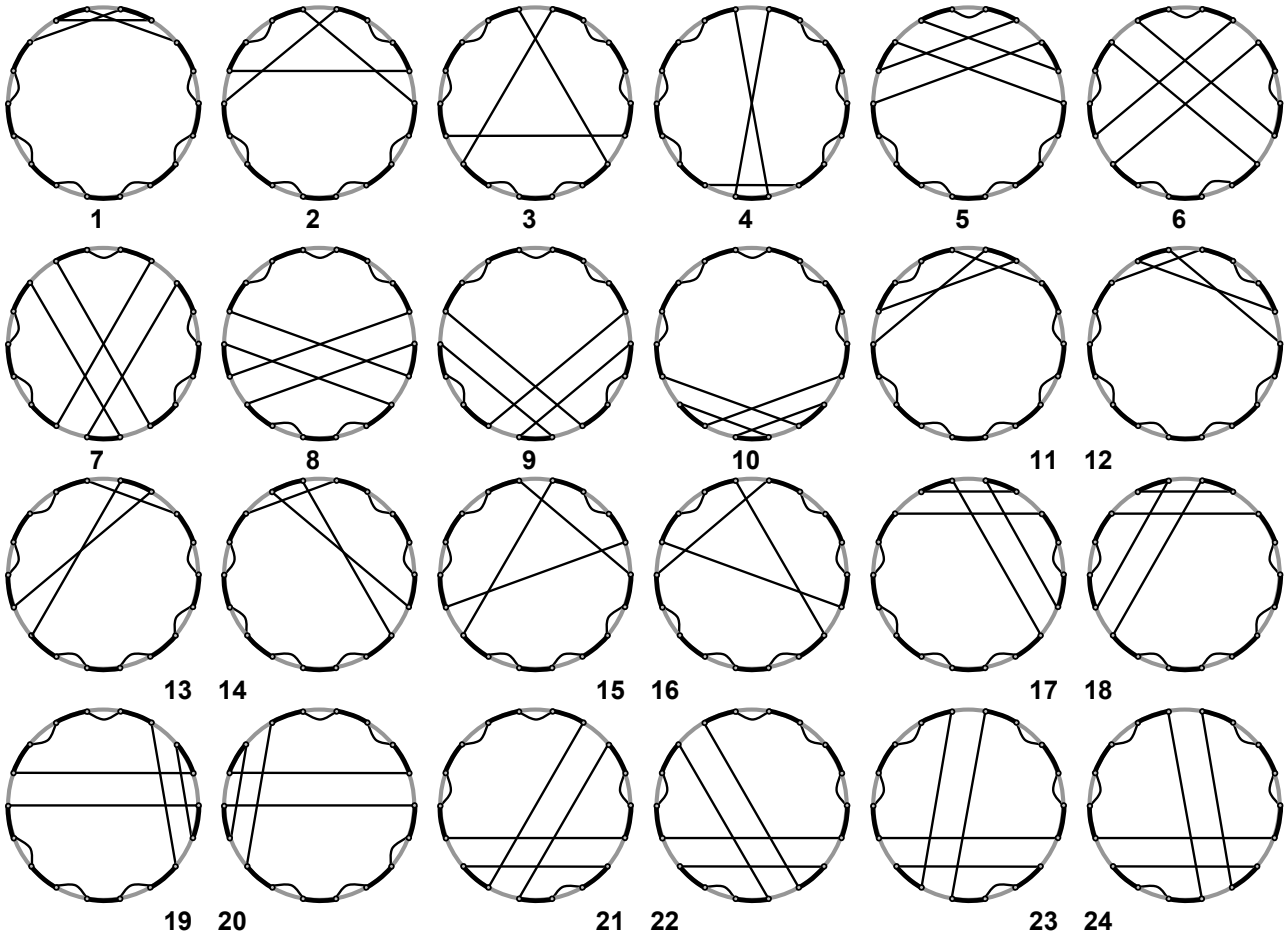


Рис. 11: всі неізоморфні діаграми з класу $\Im^{O}_{1,7;9}$

Не важко перевірити, що серед 24 неізоморфних діаграм з класу $\Im^{O}_{1,7;9}$ є 7 пар еквівалентних діаграм. І тому $d^{**}(9) = 17$.

Серед 34 неізоморфних діаграм з класу $\Im^{O}_{1,8;10}$ є 10 пар еквівалентних діаграм. І тому $d^{**}(10) = 24$.

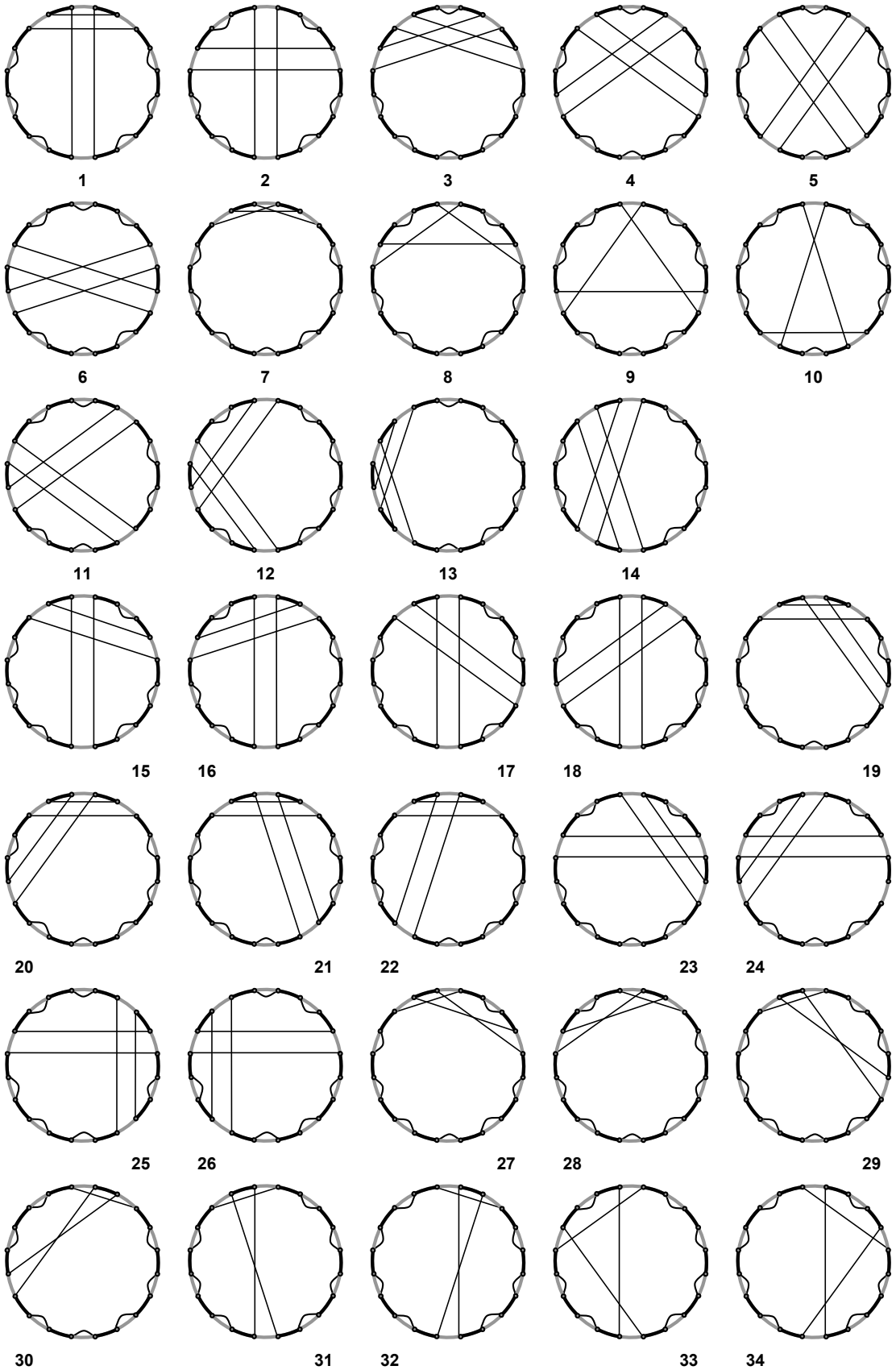


Рис. 12: всі неізоморфні діаграми з класу $\Im^{O}_{1,8;10}$

Повторюючи міркування, аналогічні наведеним в роботі [6], не важко встановити справедливість наступного твердження

Твердження 1. *При* $n \to \infty$ *величини* $d^{**}(n)$ *та* $\frac{d(n)}{2n} = \frac{(n-2)\cdot(n-1)\cdot(n+1)}{48}$ *є еквівалентними нескінченно великими величинами.*

n	$d(n)$	$d^*(n)$	$s(n)$	$d^{**}(n)$	$\overline{d^{**}(n)} = \left[\frac{d(n)}{2n}\right]$
4	5	2	2	2	1
5	15	3	3	3	2
6	35	7	5	6	3
7	70	10	6	8	5
8	126	17	9	13	8
9	210	24	10	17	12
10	330	34	14	24	17
11	495	45	15	30	23
12	715	62	20	41	30
13	1 001	77	21	49	39
14	1 365	99	27	63	49
15	1 820	122	28	75	61
16	2 380	151	35	93	74
17	3 060	180	36	108	90
18	3 876	218	44	131	108
19	4 845	255	45	150	128
20	5 985	302	54	178	150
21	7 315	349	55	202	174
22	8 855	405	65	235	201
23	10 626	462	66	264	231
24	12 650	531	77	304	264
25	14 950	598	78	338	299
26	17 550	678	90	384	338
27	20 475	759	91	425	379
28	23 751	852	104	478	424
29	27 405	945	105	525	473
30	31 465	1 053	119	586	524
40	101 270	2 537	209	1 37	1 266
100	4 082 925	40 842	1 274	21 058	20 415
200	65 998 350	330 017	5 049	167 533	164 996
300	335 246 275	1 117 526	11 324	564 425	558 744
400	1 061 326 700	2 653 367	20 099	1 336 733	1 326 658
500	2 593 739 625	5 187 542	31 374	2 609 458	2 593 740
1 000	41 583 291 750	41 583 417	125 249	20 854 333	20 791 646
2 000	665 999 833 500	333 000 167	500 499	166 750 333	166 499 958
3 000	3 372 749 625 250	1 124 250 251	1 125 749	562 688 000	562 124 938
4 000	10 661 332 667 000	2 665 333 667	2 000 999	1 333 667 333	1 332 666 583
5 000	26 031 248 958 750	5 206 250 417	3 126 249	2 604 688 333	2 603 124 896

Табл. 1: початкові значення величин $d(n)$, $d^*(n)$ та $d^{**}(n)$

Висновки

Таким чином, в представленій роботі для натуральних $n \geqslant 3$ повністю розв'язана задача про підрахунок числа *неізоморфних* (нееквівалентних відносно дії циклічної групи) та *нееквівалентних* (відносно дії діедральної групи) діаграм з класу $\Im^{O}_{1,n-2;n}$. Крім того, для початкових $n \in \{3, 5, ..., 10\}$ в явному вигляді наведено всі неізоморфні та нееквівалентні діаграми з відповідних класів, а для $n \in \{3, 5, ..., 40\}$ – точні значення числа неізоморфних та нееквівалентних таких діаграм.

Більше того, з урахуванням зауваження 2. та теореми 1., існує тісний зв'язок між діаграмами з класу $\Im^{O}_{1,n-2g;n}$ та перестановками певного виду, чиї «breakpoint» графи розкладаються у $k = n - 2g$ циклів [4, 5, 17].

На нашу думку, цілком досяжною здається подальша робота, пов'язана з одержанням аналогічних результатів для діаграм з класу $\Im^{O}_{1,n-4;n}$ (роду 2).

Література

1. *Callan D.* Non-crossing Partitions under Rotation and Reflection [Electronic resource] / D. Callan, L. Smiley // Arxiv: math. — 2000. — 15 p. — Access mode: http://arxiv.org/abs/math.CO/0510447.
2. *Cori R.* Counting non-isomorphic chord diagrams / R. Cori, M. Marcus // Theoretical Computer Science. — 1998. — Vol. 204. — P. 55–73.
3. *Harer J.* The Euler characteristic of the moduli space of curves / J. Harer, D. Zagier // Inventiones mathematical. — 1986. — No. 85. — P. 457–485.
4. *Doignon J.P.* On Hultman Numbers / J.P. Doignon, A. Labarre // Journal of Integer Sequences 10 (6), article 07.6.2, 13 pages.
5. *Grusea S.* The distribution of cycles in breakpoint graphs of signed permutations / S. Grusea, A. Labarre // Discrete Applied Mathematics. — 2013. — Vol. 161. — P. 1448–1466.
6. *Khruzin A.* Enumeration of chord diagrams, arXiv:math/0008209v1.
7. *Li B.* Exact number of chord diagrams and an estimation of the number of spine diagrams of order n / B. Li, H. Sun // Chinese Science Bulletin. — 1997. — Vol. 42, No. 9. — P. 705–720.
8. *Riordan J.* The distribution of crossings of chords joining pairs of $2n$ points on a circle // Math. Comp. — 1975. — Vol. 29, No. 129. — P. 215–222.
9. *Stoimenov A.* Enumeration of chord diagrams and an upper bound for Vassiliev invariants // Journal of Knot and its Ramifications. — 1998. — Vol. 7, No. 1. — P. 93–114.
10. *Walsh T.R.S., Lehman A.B.* Counting rooted maps by genus I, II // J. Combin. Theory (B). — 1972. — Vol. 13, Issue 2. — P. 192–218, 122–141.

11. The OEIS Foundation Inc., «The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences», published electronically at `http://oeis.org`.
12. *Кадубовський О.* Про один клас хордових діаграм максимального роду / О. Кадубовський // Вісник Київського університету Серія: фізико-математичні науки. — 2006. — Вип. 1. — С. 17–27.
13. *Кадубовський О.А.* Двокольорові O- і N-діаграми / О.А. Кадубовський, О.В. Сторожилова, Н.В. Сторожилова // Пошуки і знахідки. Серія: фізико-математичні науки. — 2010. — Том I, Вип. 10. — С. 41–50.
14. *Кадубовський О.А.* Двокольорові O-діаграми з одним чорним циклом / О.А. Кадубовський, Ю.С. Саприкіна, С.Ю. Мазур // Пошуки і знахідки. Серія: фізико-математичні науки. — 2010. — Том I, Вип. 10. — С. 51–60.
15. *Кадубовский А.А.* Двухцветные хордовые N-диаграммы с одним черным циклом // Труды института прикладной математики и механики НАН Украины. — 2012. — Том 24. — С. 134–146.
16. *Кадубовский А.А.* О числе топологически неэквивалентных функций с одной вырожденной критической точкой типа седло на двумерной сфере, II / А.А. Кадубовский / Труды международного геометрического центра. — 2015. — Том 8, № 1. — С. 46–61.
17. *Кадубовський О.А.* Перерахування топологічно нееквівалентних гладких мінімальних функцій на замкнених поверхнях // Топологія відображень маловимірних многовидів : Збірник праць Інституту математики НАН України. — 2015. — Том 12, № 6. — С. 105–145.

Kadubovs'kyi Oleksandr A., Balyasa Nataliya P.
Donbas State Teachers' Training University, Slovians'k, Ukraine.

Enumeration of 2-color chord O-diagrams of the genus one that have one black (or grey) face under rotation and reflection

In this paper we consider 2-color chord O-diagrams (of order n) with one black and $(n-2)$ grey faces under the action of (i) the rotation group (cyclic of the order n) and of (ii) the rotation/reflection group (dihedral of the order $2n$).

For natural $3 \leqslant n \leqslant 10$ we have illustrated all non-isomorphic and non-equivalent of such diagrams. We have established explicit formulas for counting the number of non-isomorphic and non-equivalent diagrams from the specified class. In addition, for natural $3 \leqslant n \leqslant 40$ we have also listed the exact value of the number of non-isomorphic and non-equivalent such diagrams accordingly.

Keywords: *2-color chord O-diagrams, genus of a diagram, faces of a diagram, cyclic and dihedral groups.*

ФІЗИКА. МЕТОДИКА ВИКЛАДАННЯ ФІЗИКИ І АСТРОНОМІЇ В ЗОШ ТА ВНЗ

УДК 537.311.33

Надточий В.А., Хаперец Д.С., Шарап Р.А.

[1] *доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой физики, ГВУЗ «ДГПУ»*

[2–3] *студенты 4 курса физико-математического факультета, ГВУЗ «ДГПУ»*

e-mail: fiziksgpu@ya.ua

ВЛИЯНИЕ НИЗКОТЕМПЕРАТУРНОЙ ДЕФОРМАЦИИ НА ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА КРЕМНИЕВЫХ p-n-ПЕРЕХОДОВ

Исследованы электрические свойства кремневых p-n-переходов, деформируемых сжатием в условиях ступенчатого нагружения при 300 и 77 К.

Установлены две характерные области: ниже критического давления обратный ток p-n-перехода изменяется обратимо, выше — необратимо. Проведены исследования структуры деформированных p-n-переходов и температурных зависимостей обратного тока.

Ключевые слова: *деформация, дислокация, обратный ток, энергетические уровни, дефекты структур*

Введение

В работах [1-3, 9, 10] были исследованы структурно-кинетические закономерности микропластической деформации монокристаллического Si и Ge. Установлено, что в приповерхностных слоях этих полупроводников глубиной около 10 мкм в интервале механических напряжений (20-100) МПа при 20 °C происходит зарождение дислокаций. Представляло интерес изучить влияние низкотемпературной деформации на свойства p-n-переходов в тех случаях, когда их глубина залегания находится в пределах пластически деформированного слоя.

© Надточий В.А., Хаперец Д.С., Шарап Р.А., 2016

Основная часть

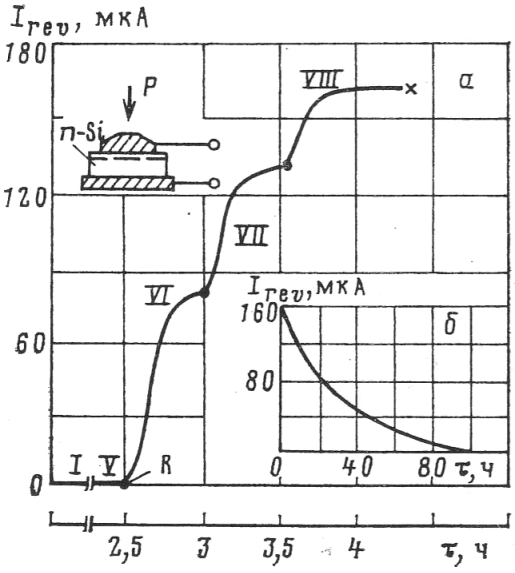


Рис. 1

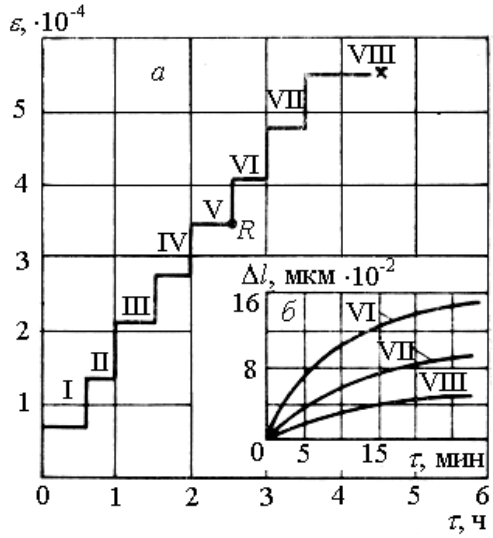


Рис. 2

Рис. 1: Зависимость обратного тока I_{rev} кремниевого p-n-перехода от времени при 300 К: *а* — изменение обратного тока в процессе ступенчатого нагружения и схема деформации; *б* — изменение обратного тока нагруженного p-n-перехода при длительной выдержке при 300 К

Рис. 2: Кривая ступенчатой ползучести при сжатии вдоль [111] при 300 К: *а* — ступенчатая деформация, величина ступени нагружения $\Delta P = 10$ МПа; *б* — переходная ползучесть, кривые сведены к общему началу отсчёта без скачков деформации при нагружениях, цифры у кривых обозначают номера ступеней нагружения

Материалы и методика. В настоящей работе исследовались диффузионные кремниевые p-n-переходы с глубиной залегания ~ 5 мкм на базе шайб диаметром 5 и толщиной 0,2 мм. P-n-переходы изготавливались диффузией бора ($N_B \approx 5 \cdot 10^{18}\,\text{см}^{-3}$) в плоскость (111) монокристаллов n-Si ($\langle p \rangle, N_p \approx 2 \cdot 10^{16}\,\text{см}^{-3}$)с плотностью дислокаций в исходных монокристаллах $N \leqslant 2 \cdot 10^2\,\text{см}^{-2}$. Для устранения влияния на электрические характеристики p-n-переходов поверхностных утечек и для стабилизации поверхности p-n-переходы окружались диффузионными охранными кольцами (кольцами бора) и защищались пиролитическим окислом SiO_2. Омические контакты создавались пайкой к вольфрамовым компенсаторам, что исключало появление механических напряжений в полупроводниковом материале при изменениях температуры вследствие разности теплового коэффициента расширения кремния и кристаллодержателя.

Переходы деформировались сжатием по схеме, указанной на рис. 1. В процессе сжатия снимались зависимости обратного темнового тока p-n-перехода от времени при различных нагрузках.

Кроме того, для установления взаимосвязи между изменениями электрических и деформационных характеристик испытывались на сжатие вдоль [111] образцы n-Si, имеющие форму прямоугольных призм размерами $3 \times 3 \times 10$ мм^3. Боковые поверхности представляли кристаллографические плоскости типа (110), (112) и (111), а наибольшее измерение (10 мм) совпадало с направлением [111]. Режим деформации выбирался один и тот же: сжатие при ступенчатом режиме нагружения. Величина ступени нагружения ΔP выбиралась равной 10 МПа. Время выдержки на каждой ступени составляло 30 мин. Деформирование осуществлялось на специально разработанной установке, позволяющей регистрировать очень малые изменения длины образцов. Чувствительность датчика деформации составляла 0,004 мкм. Имелась возможность деформировать образцы при 300 и 77 К.

Результаты и их обсуждение. `Деформация`. Зависимость деформации сжатия образца Si во времени при ступенчатом режиме нагружения при 300 К представлена на рис. 2, *а*. Здесь каждой ступени нагружения $\Delta P = 10$ МПа соответствует скачкообразное приращение деформации, причем выдержка образца под напряжением на каждой ступени до V включительно не дает заметной микропластичности. На VI ступени нагружения (выше R) при общей нагрузке $P = 60$ МПа после скачка деформации регистрируется деформация микроползучести (рис. 2), затухающая по логарифмическому закону [1, 3]. График этой закономерности без учета скачка деформации при нагружении показан отдельно (рис. 2, *б*) ввиду малости общей микропластической деформации. На последующих VII и VIII ступенях нагружения общая величина микродеформации ползучести уменьшается (кривые VII, VIII). Таким образом на ступенчатой кривой можно выделить две области: до R, где образец Si деформируется чисто упруго, и область выше этой точки, где существует микропластичность, обусловленная появлением дислокаций. На рис. 3, *а* показана дислокационная структура, снятая на глубине 5 мкм от нагруженной поверхности образца Si. Видны ямки травления от отдельных полупетель, выходящих на поверхность.

`Электрические свойства`. Рассмотрим теперь электрические свойства деформируемого при комнатной температуре p-n-перехода. Различают две группы эффектов изменения обратного тока при деформации кремния [4, 5]: эффекты, обусловленные изменением ширины запрещенной зоны, и за счет возникновения центров генерации-рекомбинации. Учитывая различие концентрации примесей n- и p- типа $(\approx 10^2)$, образующих p-n-переход, можно с достаточным основанием считать, что расширение области объемного заряда при наложении обратного смещения будет происходить в основном

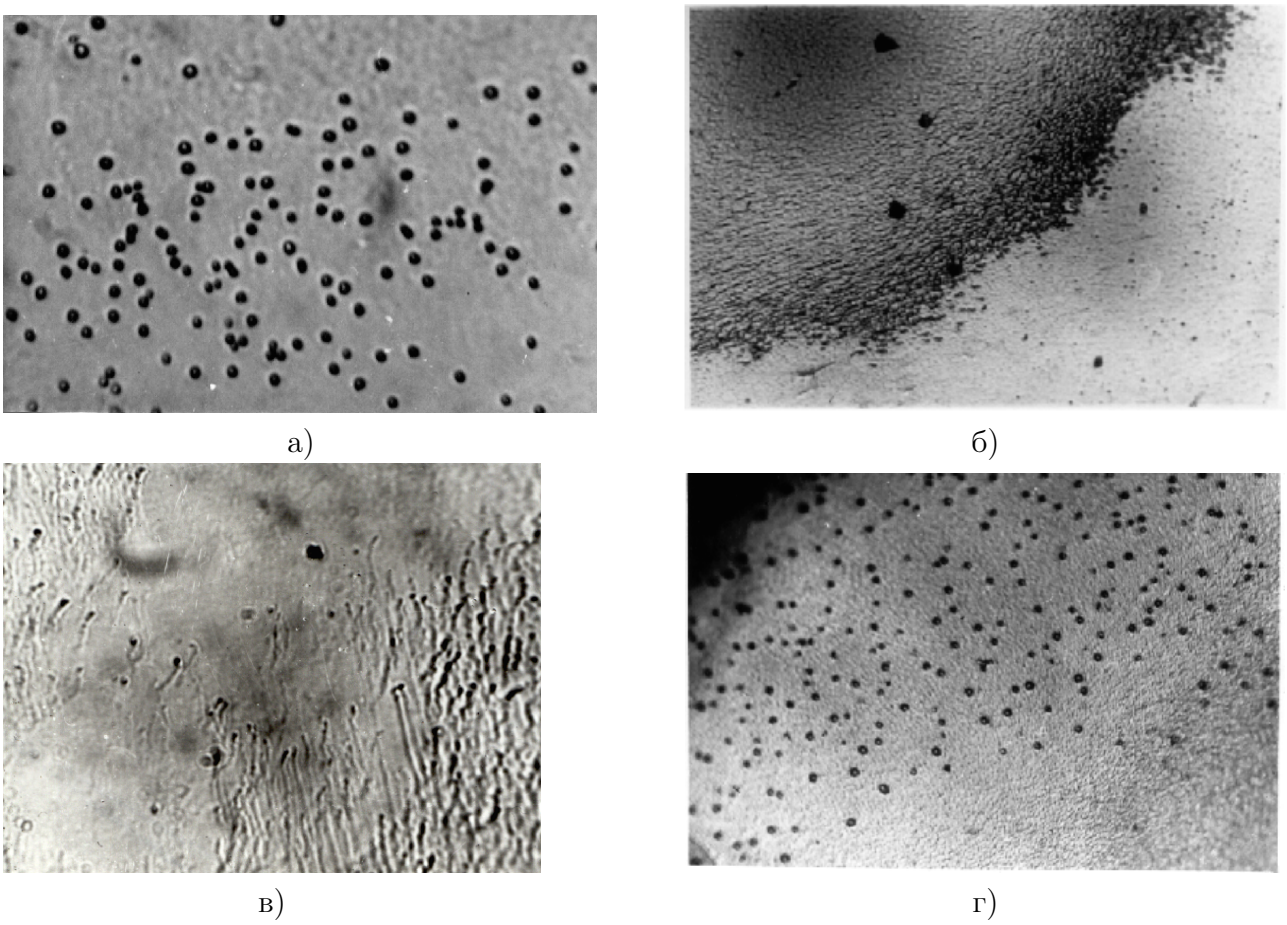


Рис. 3: Дислокационная структура Si: *а* — после деформации на глубине 5 мкм от нагруженной поверхности; $\times 2000$; *б–г* — p-n-переход, деформированный при 70 К; *б* — вблизи выхода на поверхность диффузии; $\times 800$; *в* — граница раздела пластически деформированной области; $\times 4000$; *г* — область выхода на поверхность диффузии; $\times 2000$

в n-область, и, следовательно, уровень обратного тока (дрейфовый ток) p-n-перехода будет определяться положительно заряженными носителями — неосновными носителями для n-области. При чисто упругой деформации n-Si вдоль [111] концентрация носителей заряда должна изменяться незначительно [3, 6]. Действительно, обратный ток при ступенчатом нагружении p-n-перехода остается приблизительно постоянным ($I_{rev} = 0,1$ мкА) до нагружения $P = 50$ МПа, т.е. до точки R на кривой $I_{rev}(\tau)$ (рис. 1, *а*). Зависимость снималась при постоянном обратном напряжении 30 В. На VI ступени нагружения обратный ток начинает резко возрастать с постепенным выходом на насыщение. Подобное нарастание тока наблюдается также на VII и VIII ступенях. Для получения полной информации и проверки воспроизводимости результатов испытания проводились также на p-n-переходах, полученных по технологии изготовления Д-215, Д-242, Д-243, Д-245, Д-246. Закономерности изменения обратного тока оказались приблизительно таки-

ми же, с той лишь разницей, что величина тока в конце испытаний несколько отличалась от образца к образцу по абсолютному значению.

Сравнение результатов деформирования p-n-переходов и призматических образцов, а также структурные данные позволяют сделать вывод, что резкое возрастание обратного тока при нагрузке 60 МПа обусловлено появлением дислокаций в области p-n-перехода. Обратный ток при этом определяется в основном генерационной составляющей, т.е. обусловлен тепловой генерацией в области перехода электронно-дырочных пар на центрах, уровни энергии которых находятся вблизи середины запрещенной зоны [7].

Характерным для изменения I_{rev} сразу после ступенчатого нагружения (рис. 1, *а*) является наличие инкубационного периода, где темп роста тока замедлен. Это можно объяснить тем, что для достижения основной массой дислокаций, генерируемых в основном с поверхности, области p-n-перехода требуется некоторое время. После затухания ползучести плотность дислокаций, пересекающих p-n-переход, остается постоянной и ток в первом приближении не меняется. Подобные закономерности изменения I_{rev} наблюдаются и на последующих ступенях нагружения, но поскольку с увеличением нагрузки величина приращения микропластической деформации и приращения плотности дислокаций уменьшается, рост тока также ограничивается. При указанных испытаниях он достигает значения ~ 160 мкА и сохраняется сразу после снятия нагрузки. В процессе длительной выдержки образца при комнатной температуре наблюдается постепенное снижение обратного тока (рис. 1, *б*). Через 5-6 суток он становится приблизительно равным обратному току до деформации (доли миллиампера). Однако при повторном нагружении ток снова постепенно нарастает. Наблюдается электрическая «ползучесть».

Изменение электрической активности дислокаций при длительной выдержке образцов обусловлено, по-видимому, оседанием вдоль дислокаций точечных дефектов. Дислокации остаются относительно чистыми только непосредственно после деформации. С течением времени порождаемые самой движущейся дислокацией вакансии, примесные или собственные дислоцированные атомы, оказавшиеся вблизи дислокации, будут перемещаться к ней, частично снимая упругие напряжения и понижая ее генерационную активность. Повторное нагружение вызывает освобождение дислокаций от этих дефектов. Этими процессами можно объяснить также изменение вида обратных ветвей вольтамперных характеристик p-n-перехода (рис. 4), снятых до деформации (1), после испытаний (2) и разных по длительности выдержек (3, 4). Исследования показали, что если к разгруженному p-n-переходу сразу

приложить большое обратное напряжение (100 – 150) В, то нарастание тока не ограничивается и переход через некоторое время пробивается за счет образования на дислокациях микроплазм [7, 9, 10].

Испытания отдельных образцов кремния при 77 К и промежуточных температурах до комнатной показали, что критическое напряжение, соответствующее началу зарождения новых дислокаций в кремнии, слабо зависит от температуры. Глубина пластически деформированного слоя при 77 К приблизительно такая же (8 – 10) мкм, как и при 300 К, если условия деформирования сохраняются те же.

`Структура`. Представляло интерес провести структурные исследования p-n-переходов, деформированных при 77 К, изучить влияние введенных при этом дислокаций на величину обратного тока и характер изменения электрической активности дислокаций в температурном интервале 77 – 300 К.

Кремниевый p-n-переход деформировали при 77 К в ступенчатом режиме нагружения; полная нагрузка на переход через 4 ч испытаний доводилась до 100 МПа. После разгрузки образец за 20 с отогревался до комнатной температуры. При напряжении 30 В обратный ток при 300 К составлял 160 – 180 мкА, т.е. был приблизительно таким, как сразу после деформирования при 300 К. Уже через 20 мин выдержки при 300 К обратный ток, уменьшаясь по экспоненциальному закону, спадал до 13 % от начального значения. Отсюда следует, что сохранить чистые дислокации при 300 К даже на время измерений невозможно. Обратный ток образца, как оказалось, можно сохранить без существенного изменения на время 1 ч при 77 К. Поэтому температурные зависимости обратного тока, проводимости, э.д.с. Холла, подвижности носителей и др. можно снимать сразу после разгрузки образцов при этой температуре.

Структурные исследования деформированного при 77 К p-n-перехода проводились следующим образом. Со стороны базы p-n-переход химически стравливался в смеси HNO_3 и HF до выхода на диффузионную поверхность так, что в месте выхода создавался клин с очень малым углом. Затем p-n-переход кратковременно травился на дислокации по методике, описанной в [3]. На рис. 3 представлены металлографические структуры, снятые в области диффузионного слоя вблизи границы выхода на поверхность кристалла. Видны (рис. 3, *б*) две области: пластически деформированная и область, практически свободная от дислокаций. При большем увеличении (рис. 3, *в*) наблюдаются отдельные дислокации, ориентированные почти параллельно поверхности. Эта структура снята на границе двух указанных областей. Глубина фронта пластической деформации находится на расстоянии 10 мкм от

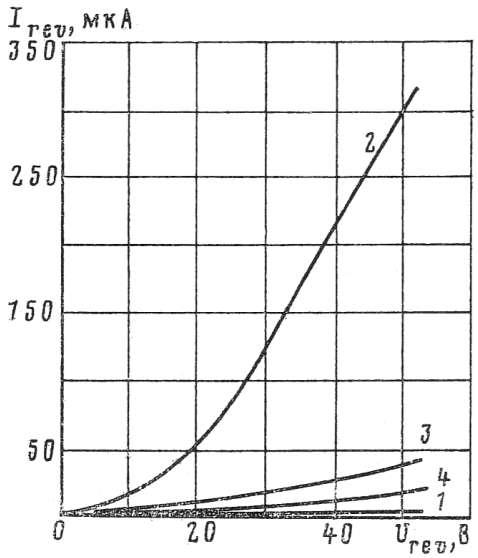


Рис. 4

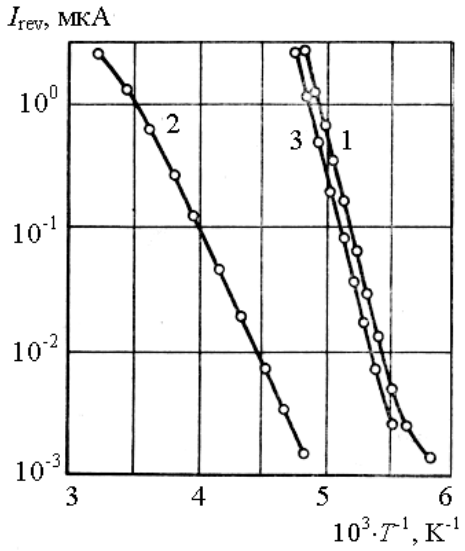


Рис. 5

Рис. 4: Зависимость обратного тока I_{rev} от напряжения U_{rev} кремниевого p-n-перехода: 1 — зависимость, снятая до деформации; 2 — после испытания на ступенчатую ползучесть; 3, 4 — кривые, полученные после выдержки p-n-перехода при 300 К в течение 3 и 6 сут. соответственно

Рис. 5: Температурная зависимость обратного тока I_{rev} : 1 — снятая сразу после испытания на ступенчатую ползучесть при 77 К; 2 — после выдержки при 300 К в течение 3 сут.; 3 — после повторной выдержки под давлением 100 МПа в течение 20 мин при 70 К

поверхности диффузии. Плотность дисклокаций $N_d = (10^4 - 10^6)$ см$^{-2}$. На тех участках, где дислокации выходят под большим углом к поверхности, вытравливаются парные ямки от каждой полупетли (рис. 3, *а, г*). Характерно, что на дислокациях, введенных в Si при низких температурах (300 К и ниже), вытравливаются неглубокие ямки, что обусловлено очень слабой насыщенностью их примесной атмосферы [3, 9].

`Энергетические уровни.` Положение глубоких энергетических уровней, которые определяют величину I_{rev}, может быть найдено путем измерения его температурной зависимости. Такие измерения проводились на деформированном при 77 К p-n-переходе сразу после снятия нагрузки и отогреве до 300 К. Для этого же перехода снимались температурные зависимости I_{rev} после выдержки при 300 К без нагрузки и после повторной кратковременной деформации (рис. 5).

Обработка результатов осуществлялась по формуле, применимой в тех случаях, когда обратный ток определялся генерационными процессами на генерационно-рекомбинационных (gr) центрах

$$I_{rev} = -\frac{eWn_i}{2\sqrt{\tau_n \tau_p}} \operatorname{ch}\left[\frac{E_t - E_i}{kT} + \frac{1}{2}\ln\frac{\tau_n}{\tau_p}\right]$$

где W — ширина p-n-перехода; τ_n, τ_p — времена жизни неосновных носителей в объеме электронной и дырочной областей соответственно; E_t — энергетический уровень gr-центра.

Для 1-й и 3-й зависимости $E_t = 0,68$ эВ, для 2-й — 0,4 эВ. Первый результат близок к значению $E_t = 0,64$ эВ для дислокационного уровня в кремнии, найденного Веланом (см. [7, с. 383]). Второй результат согласуется с данными [8], полученными при высокотемпературной деформации n-Si (0,4 и 0,44 эВ). Энергия уровня E_t отсчитывается от потолка валентной зоны. Сравнение с результатами [8] дает возможность предположить, что уровень gr-центра 0,4 эВ связан с комплексами на основе дислокаций. В комплексы входят точечные дефекты, захваченные дислокациями после длительной выдержки образца при 300 К. Дислокации, по-видимому, освобождаются от этих дефектов при повторной деформации (рис. 5, кривая 3) и температурные зависимости обратного тока 1 и 3 почти совпадают.

Заключение

Предложенная методика введения относительно «чистых» дислокаций при низких температурах дает возможность уточнить наши представления об их электрической активности с привлечением других электрофизических измерений.

Литература

1. *Надточий В.А., Алехин В.П., Нечволод Н.К., Шоршоров М.Х.* О закономерностях пластической деформации кремния при комнатной температуре // Физика и химия обраб. материалов. — 1974. — № 6. — С. 103–107.
2. *Шоршоров М.Х., Надточий В.А., Нечволод Н.К. и др.* Низкотемпературная деформация в монокристаллах Ge и Si. — В кн. Монокристаллы тугоплавких и редких металлов, сплавов и соединений. М.: Наука, 1977. — 150 с.
3. *Надточий В.А.* Исследование закономерностей низкотемпературной пластической деформации монокристаллического германия и кремния. Автореф. дис. на соискание уч. ст. канд. физ.-мат. наук. Киев: ИМФ АН УССР, 1975.
4. *Полякова А.Л., Шкловская-Корди В.В.* Влияние деформаций на свойства кремниевых p-n-переходов. — ФТТ. — 1966. — Т. 8, № 1. — С. 208.
5. *Полякова А.Л., Шкловская-Корди В.В.* Электрические характеристики кремниевых p-n-переходов, подвергнутых неоднородной деформации. Л.: Наука, 1969. — 141 с.

6. *Киреев П.С.* Физика полупроводников. М.: Высш. шк., 1969. — 348 с.
7. *Матаре Г.* Электроника дефектов в полупроводниках. М.: Мир, 1974. — 126 с.
8. *Еременко В.Г., Никитенко В.И., Якимов Е.В.* Исследование природы диодного єффекта на дислокациях в кремнии. — ЖЭТФ, 1974. — Т. 67, № 3. — С. 1148.
9. *Надточий В.А.* Микропластичность алмазоподобных кристаллов (Si, Ge, GaAs, InAs): Дисс. ... доктора физ.-мат. наук: 01.04.07 / Харьковский национальный университет. — Харьков, 2006. — 467 с.
10. *Nadtochiy V., Golodenko N., Nechvolod N.* Recombination of non-equilibrium charge carries injected into Ge through intermediate defective layer // Functional Materials. — 2005. — V.12, № 1. — P. 45–50.

Nadtochiy Viktor A., Khaperets Dmytro S., Sharap Roman A.
Donbas State Teachers' Training University, Slovians'k, Ukraine.

Effect of low-temperature deformation of the electrical properties of silicon $p-n$-junctions

The electrical properties of the silicon p-n-junctions, deformable in compression under the step of loading at 300 and $77K$. Established two distinct areas: lower reverse current p-n-junction critical pressure changes reversibly, above – is irreversible. Investigations of the structure of deformed p-n-junction temperature and reverse current dependencies.

Keywords: *strain, dislocation, reverse current, the energy levels of structural defects.*

УДК 537.311.33

Надточий В.А., Нечволод Н.К.

[1] *доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой физики, ГВУЗ «ДГПУ»*

[2] *доктор физико-математических наук, советник ректора, ГВУЗ «ДГПУ»*

e-mail: fiziksgpu@ya.ua

ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА КРЕМНИЕВЫХ p-n-ПЕРЕХОДОВ С ДЕФЕКТАМИ СТРУКТУРЫ

Структурные исследования ковалентных полупроводников, деформированных при низких температурах, показали важную роль вакансий в пластичности приповерхностных слоев. Дислокационные петли, возникающие под действием деформации в области объемного заряда p-n-перехода кремния, значительно снижают время жизни неравновесных носителей заряда, инжектируемых в базу. На вольтамперных характеристиках p-n-перехода с дислокациями обнаруживается резкое возрастание обратного тока.

Ключевые слова: *механические напряжения, деформация, германий, кремний, дислокации, релаксация напряжений, p-n-переход*

Введение

В процессе изготовления полупроводниковых приборов и интегральных схем пластины полупроводниковых материалов подвергаются различным механическим и термическим воздействиям: шлифовке и полировке, окислению, диффузии примесей, разделению на заготовки, содержащие полупроводниковые структуры. При этом в поверхностных слоях создаются значительные механические напряжения, вследствие чего возникают условия для зарождения дислокаций. В алмазоподобных полупроводниках германии и кремнии в интервале низких температур 77–600 K этот процесс реализуется при весьма малых напряжениях порядка $20 \div 100$ МПа [1–4]. Источниками дислокаций могут быть частицы выделений типа SiO_x или GeO_x для кремния и германия соответственно [2], а процесс зарождения дислокаций представляется по механизму Эшби-Джонсона [5]. Среди ряда причин, обусловливающих при низких температурах проявление микропластичности в ковалентных полупроводниках Ge и Si исключительно в приповерхностных слоях, отмечалась возможная роль вакансий [2]. Получены новые результаты структурных исследований, которые подтверждают определенную роль точечных дефектов в процессе зарождения и движения дислокаций и позволяют объяснить физическую природу низкотемпературной микропластичности материалов с

© Надточий В.А., Нечволод Н.К., 2016

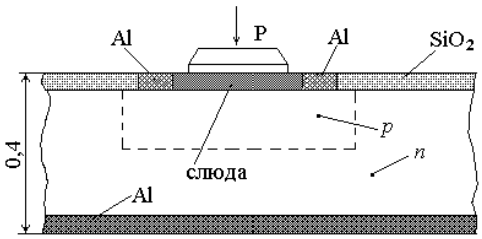


Рис. 1

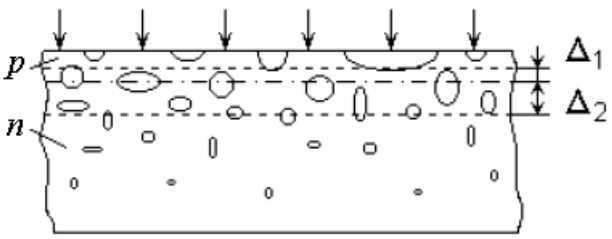


Рис. 2

Рис. 1: Схема деформирования кремниевого p-n-перехода.

Рис. 2: Распределение дислокаций под нагружающей площадкой после деформации. С увеличением расстояния от поверхности размеры дислокационных петель уменьшаются. Глубина залегания p-n-перехода составляет ~ 8 мкм.

высоким потенциальным рельефом Пайерлса [3]. В данной работе исследовано влияние линейных дефектов струтктуры, создающих значительные токи обратно-смещенных p-n-переходов.

Основная часть

Переходы изготовлялись по планарной технологии на основе монокристаллического Si, выращенного методом зонной плавки с удельным сопротивлением $\rho = 500$ Ом $\cdot$ см и малым содержанием кислорода ($< 10^{15}$ см^3). Выбор такого материала облегчает идентификацию электрических параметров p-n-переходов, содержащих деформационные структурные дефекты. Омические контакты создавались напылением алюминия на подлегированные p^+ и n^+ слои. Деформирование перехода в ступенчатом режиме нагружения осуществлялось через тонкую слюдяную шайбу (рис. 1). Поверхностные утечки исключались окислом SiO_2. Площадь деформируемой поверхности составляла 18 мм^2. Деформирование осуществлялось при различных температурах в низкотемпературном интервале 300–650 К. Глубина залегания p-n-перехода составляла 8 мкм. До и после деформации для каждого объекта определялось время жизни неравновесных дырок, инжектированных в базу, и снимались вольтамперные зависимости обратного тока.

Дислокации в области p-n-перехода (рис. 2) являются эффективными центрами генерации-рекомбинации, поскольку создают в запрещенной зоне глубокие энергетические уровни [10]. Толщина поверхностного слоя, в котором зарождаются дислокации, увеличивается с ростом температуры. После деформации при 77 К время жизни, измеренное методом модуляции проводимости в точечном контакте непосредственно на поверхности, снижается от 250 до $20 \div 30$ мксек. При температуре 300 К заметное снижение τ_p, найденное из анализа переходных процессов переключения из прямого в обратное включе-

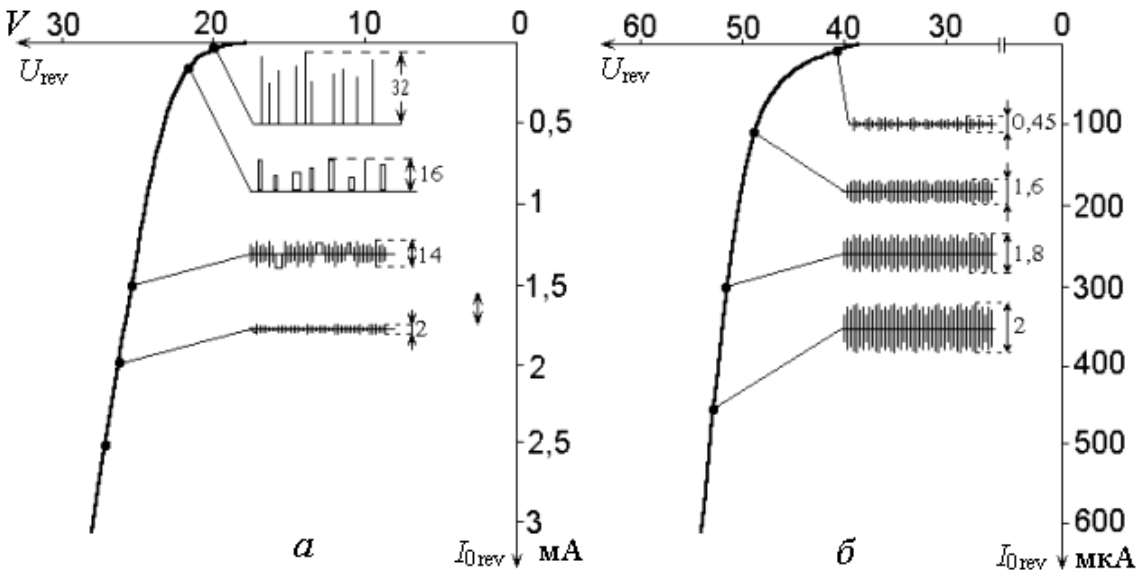


Рис. 3: Вольтамперные характеристики обратного тока опорного диода Д816А (*а*) и кремниевого *p*-*n*-перехода с дислокациями (*б*). Импульсные и шумовые составляющие обратного тока указаны в микроамперах

ние, наблюдается в *p*-*n*-переходах глубиной 2–5 мкм. В данных исследованиях использовались *p*-*n*-переходы глубиной $\sim$ 8 мкм и шириной области объемного заряда при отсутствии внешнего напряжения $\Delta_1 + \Delta_2 = 5,5$ мкм. Для них снижение τ_p от 250 мкс до 100 мкс возникало при температуре деформации $\geqslant$ 450 К. После введения дислокаций при 650 К на вольтамперных зависимостях *p*-*n*-переходов (рис. 3, *б*) появляется участок резкого возрастания обратного тока. Вид этой кривой подобен характеристике стабилитрона (рис. 3, *а*). Однако процессы нарастания тока в областях малых его значений существенно различны. Так, начало нарастания тока кремниевого стабилитрона сопровождается дискретными импульсами пробоя микроплазм, связанных с микронеоднородностями кремния в области объемного заряда. (В работе [11] показано, например, что микроплазменные явления могут происходить на частицах SiO_2, возникающих при распаде пересыщенного твердого раствора кислорода).

Амплитуды импульсов порядка 30–40 мкА, длительность несколько микросекунд, распределение длительности и скважности носит хаотический характер. С увеличением величины обратного тока средняя длительность импульсов возрастает, амплитуда их уменьшается, и при дальнейшем росте постоянной составляющей переменная составляющая в интервале $10^4 - 10^6$ Гц имеет характер «белого» шума с флуктуациями в пределах 2 мкА. В дислокационном *p*-*n*-переходе рост тока уже в самом начале сопровождается появлением «белого» шума с очень малым среднеквадратичным значением

тока. Среднеквадратичное значение шумового сигнала затем растет и постепенно достигает приблизительно такого же уровня, как в стабилитроне при постоянной составляющей 2–3 мА.

Выводы

Возникающая при низкотемпературной деформации алмазоподобных кристаллов микропластичность протекает с участием диффузионных процессов. Принципиальным отличием механизма диффузионной микропластичности от обычного дислокационного является тот факт, что для начала пластического течения по первому механизму не требуется, чтобы напряжение превышало какую-либо критическую величину, в то время как для реализации обычного дислокационного скольжения требуется некоторая стартовая величина напряжений.

Созданные в процессе низкотемпературной деформации Si дефекты снижают время жизни неравновесных носителей заряда. Введение дислокаций в область кремниевых p-n-переходов вызывает рост обратного тока, что необходимо учитывать при производстве полупроводниковых приборов.

Литература

1. *Шоршоров М.Х., Надточий В.А., Нечволод Н.К., Алехин В.П., Калимбет А.З., Вареца В.П.* Низкотемпературная деформация в монокристаллах Ge и Si. Монокристаллы тугоплавких и редких металлов, сплавов и соединений. — М.: Инст-т металлургии им. А.А. Байкова, 1992. — 190 с.
2. *Алехин В.П.* Физика прочности и пластичности поверхностных слоев материалов. — М.: Наука, 1983. — 280 с.
3. *Nadtochiy V., Nechvolod N., Golodenko N.* Microplasticity and electrical properties of subsurface layers of diamond - like semiconductors strained at low temperatures // Functional Materials. — 2003. — V.10, № 4. — P. 702–706.
4. *Nadtochiy V., Zhikcharev I., Golodenko N., Nechvolod N.* Structure changes caused by the stress gradient in subsurface layers of germanium single crystals // Solid State Phenomena. — 2003. — V.94. — P. 253–256.
5. *Ashby M.F., Jonson L.* On the generation of dislocations at misfitting particles in a ductile matrics // Phil. Mag. — 1969. — V.20, № 167. — P. 1009–1022.
6. *Степанов Ю.Н., Алехин В.П., Гуров К.П.* Диффузионная релаксация вакансий при циклическом нагружении металлов // ФММ. — 1991. — № 4. — С. 42-46.

7. *Степанов Ю.Н., Гуров К.П.* Влияние циклических нагрузок на дислокационные петли в монокристаллах // Физика и химия обработки материалов. — 1993. — № 5. — С. 107-111.
8. *Степанов Ю.Н.* Закономерности диффузионно–дислокационных процессов и особенности разрушения кристаллов кремния и германия при высокочастотном механическом воздействии: Дис. ... доктора физ.–мат. наук: М., ИМЕТ им. А. Байкова. — 2002. — 310 с.
9. *Матаре Г.* Электроника дефектов в полупроводниках. — М.: Мир, 1974. — 464 с.
10. *Родес Р.Г.* Несовершенства и активные центры в полупроводниках Ge, Si. — М.: Металлургия, 1968. — 371 с.
11. *Бабич В.М., Блецкан Н.И., Венгер Е.Ф.* Кислород в монокристаллах кремния. — Киев: Интерпресс ЛТД, 1997. — 240 с.

Nadtochiy Viktor A., Nechvolod Nikolay K.
Donbas State Teachers' Training University, Slovians'k, Ukraine.

The electrical properties of silicon p-n-junctions with structural defects

Structural studies of covalent semiconductors, deformed at low temperatures, have shown the important role of vacancies in the surface layers of plasticity. Dislocation loops arising under the influence of the deformation in the space charge region p-n-junction silicon significantly reduces the lifetime of the non-equilibrium carriers injected into the base. In the current-voltage characteristics of the p-n-junction with dislocations observed a sharp increase in the reverse current.

Keywords: *mechanical stress, deformation, germanium, silicon, dislocations, stress relaxation, p-n- junctions.*

УДК 551.466.8

Билюнас М.В., Доценко С.Ф.

[1] *кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математики, физики и информатики, «Керченский морской технологический университет», г. Керчь*

[2] *доктор физико-математических наук, профессор, главный научный сотрудник, «Морской гидрофизический институт», г. Севастополь*

e-mail: biliunas_mv@mail.ru, sf_dotsenko@mail.ru

ПОВЕРХНОСТНЫЕ ПОДВЕТРЕННЫЕ ВОЛНЫ В СДВИГОВЫХ ТЕЧЕНИЯХ

В работе рассмотрена задача о генерации поверхностных волн при обтекании потоком с вертикальным сдвигом скорости неровности дна. Получены аналитические решения задачи в виде выражения смещения уровня свободной поверхности для модельных распределений скорости в зависимости от различной формы подводного препятствия

Ключевые слова: *сдвиговые течения, однородная жидкость, поверхностные волны, подветренные волны*

Вступление

Волны, образующиеся при обтекании потоком с вертикальным сдвигом скорости неровностей поверхности земли, – крайне распространенное явление как в атмосфере, так и в океане [1, 2]. Они обнаруживаются вниз по потоку от препятствия и поэтому известны как подветренные или волны за препятствиями. Например, когда воздушный поток натекает на перпендикулярный к нему горный хребет, то, по мере усиления ветра до 9-10 м/с и более, ламинарное обтекание переходит в волнообразное или в возникновение за хребтом подветренных вихрей. Аналогичные явления наблюдаются и в жидкости при обтекании течением подводного препятствия. Отличительной особенностью таких волн является неизменность волновой картины с течением времени: гребни волн всегда остаются на одних и тех же местах при движении потока. Такие волны, форма которых не зависит от времени, называют стационарными. Исследованию характеристик таких волн в зависимости от параметров течения и неровности дна и посвящена данная работа.

Постановка задачи. Предположим, что поток идеальной несжимаемой жидкости $U(z)$ постоянной глубины H, обтекает неровность дна, форма которой задается функцией $D(x)$ (рис. 1). Толщина слоя выражается как $H - D(x)$.

© Билюнас М.В., Доценко С.Ф., 2016

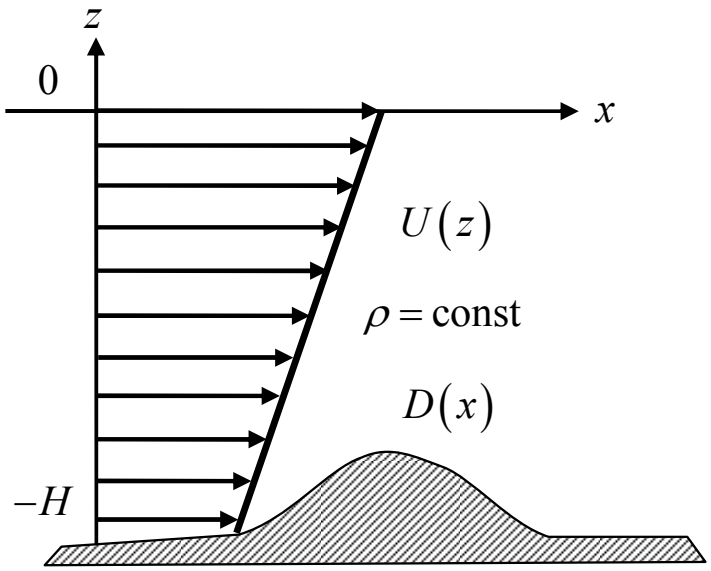


Рис. 1: Обтекание неровностей дна течением с вертикальным сдвигом скорости

Система уравнений, описывающая стационарные волны в таком потоке, будет описана системой трех линеаризованных относительно среднего течения $u = U(z), w = 0$ уравнений с зависящими от z коэффициентами (они получены из системы уравнений Эйлера и уравнения неразрывности [3])

$$U\frac{\partial u}{\partial x} + w\frac{\partial U}{\partial z} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x},$$

$$U\frac{\partial w}{\partial x} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z},$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0,$$

где $u(x,z)$, $w(x,z)$ — малые возмущения поля скорости сдвигового течения; $p(x,z)$ — динамические возмущения гидростатического давления в жидкости; $\rho = \text{const}$ — плотность жидкости.

Вышеописанную систему уравнений необходимо дополнить кинематическим и динамическим условиями на свободной поверхности $(z = 0)$ и условием скольжения на дне бассейна $(z = -H)$ [3]

$$U(0)\frac{\partial \zeta}{\partial x} = w, \quad p - \rho g\zeta = 0 \quad (z = 0),$$

$$w = u\frac{\partial D}{\partial x} \quad (z = -H + D(x)),$$

где $\zeta(x)$ — смещение свободной поверхности жидкости; g — ускорение свободного падения.

Переход к краевой задаче для системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Применяя к сформулированной задаче преобразование Фурье по переменной x с параметром m, приходим к неоднородной краевой задаче

$$\overline{w}'' - [m^2 + \alpha(z)]\overline{w} = 0 \quad (-H < z < 0),$$
$$\overline{w}'(0) - \nu\overline{w}(0) = 0,$$
$$\overline{w}(-H) = imU(-H)\overline{D}(m),$$

где штрих означает производную по переменной z,

$$\alpha = \frac{U''(z)}{U(z)}, \quad \nu = \frac{g}{U^2(0)} + \frac{U'(0)}{U^2(0)},$$
$$\overline{f}(m) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-imx}dx$$

— трансформанта Фурье.

Будем предполагать, что скорость течения не изменяет своего направления $(U(z) > 0)$ при всех $-H \leqslant z \leqslant 0$. Далее рассматриваются волны вдали от неровности дна конечной ширины, то есть, считаем, что $|x| \to +\infty$. Решение вышеописанной задачи находим в следующем виде

$$\overline{w}(z) = A_1 \sinh k(z+H) + A_2 \cosh k(z+H),$$

где $k^2 = m^2 + \alpha$, A_1, A_2 — константы, которые определяются из граничных условий. В итоге, можно записать

$$\overline{\zeta}(m) = \frac{U(-H)}{U(0)} \frac{k}{\cosh kH} \frac{\overline{D}(m)}{\Delta},$$

где $\Delta = k - \nu \tanh kH$. Следовательно, по формуле обратного преобразования Фурье, имеем

$$\zeta(x) = \frac{1}{2\pi} \frac{U(-H)}{U(0)} \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(m)e^{imx}dm,$$

где $f(m) = \frac{k}{\cosh kH} \frac{\overline{D}(m)}{\Delta}$.

Далее, преобразовывая контуры интегрирования и применяя теорию вычетов [4], а также учитывая, что $\Delta'(-m) = \Delta'(m)$, а $\overline{D}(-m) = \overline{D}(m)$, получим

$$\zeta(x) = -2\frac{U(-H)}{U(0)} \frac{k_0}{\cosh k_0 H} \frac{\overline{D}(m_0)}{\Delta'(m_0)} \sin m_0 x + o(1) \ (x \to \infty), \text{ где } k_0 = k(m_0).$$

Изучая различные профили течения (например, рассмотренные в [5]) и модельные функции, задающие форму подводного препятствия, находим соответствующие им амплитуды смещения свободной поверхности. Для наглядности приведем некоторые рассмотренные модельные распределения $D(x)$, задающие рельеф неровности дна, и соответствующие им амплитуды смещения свободной поверхности A в таблице 1, где формулы, упорядочены по мере увеличения кривизны склона препятствия.

	$D(x)$	A
1	$\begin{cases} 0 & (-\infty < x < -L) \\ D_0 & (-L \leqslant x \leqslant L) \\ 0 & (L < x < \infty) \end{cases}$	$-4D_0 \frac{U(-H)}{U(0)} \frac{k_0}{\cosh k_0 H} \frac{\sin m_0 L}{m_0 \Delta_0'}$
2	$D_0 \left(\frac{x^2+L^2}{L^2}\right)^{-2}$	$-D_0 L\pi \frac{U(-H)}{U(0)} \frac{k_0}{\cosh k_0 H} \frac{(\lvert m_0\rvert L+1)e^{-\lvert m_0\rvert L}}{\Delta_0'}$
3	$\begin{cases} 0 & (-\infty < x < -L) \\ D_0 \left(\frac{-\lvert x\rvert+L}{L}\right) & (-L \leqslant x \leqslant L) \\ 0 & (L < x < \infty) \end{cases}$	$-\frac{4D_0}{L} \frac{U(-H)}{U(0)} \frac{k_0}{\cosh k_0 H} \frac{1-\cos m_0 L}{m_0^2 \Delta_0'}$
4	$D_0 e^{-qx^2}$	$-2D_0 \sqrt{\frac{\pi}{q}} \frac{U(-H)}{U(0)} \frac{k_0}{\cosh k_0 H} \frac{e^{-\frac{m_0^2}{4q}}}{\Delta_0'}$
5	$\frac{D_0}{1+\left(\frac{x}{L_1}\right)^2}$	$-2\pi D_0 L_1 \frac{U(-H)}{U(0)} \frac{k_0}{\cosh k_0 H} \frac{e^{-\lvert m_0\rvert L_1}}{\Delta_0'}$

Табл. 1: Модельные распределения неровности дна и соответствующие им амплитуды подветренных поверхностных волн.

В формулах q и L_1 — произвольные параметры, характеризующие кривизну препятствия.

Из приведенных выражений следует, что для всех рассмотренных неровностей амплитуда смещения свободной поверхности пропорциональна высоте препятствия и отношению скорости течения у дна к скорости течения на поверхности, но не зависит от кривизны профиля течения. Чем больше высота обтекаемого препятствия и отношение скоростей потока, тем больше амплитуда смещения свободной поверхности.

Подветренные волны в потоке будут возникать при выполнении условия

$$\nu H > 1.$$

Для параметров течения, близких к реальным значениям, генерирующиеся на потоке поверхностные волны получаются короткими и будут иметь очень незначительную амплитуду в сравнении с внутренними волнами. Это объясняется тем, что для выведения из положения равновесия границы раздела вода-воздух требуется гораздо большая возмущающая сила, чем для нарушения гидродинамического равновесия во внутренних слоях океана.

При выполнении условия $\nu H \to 1$ при обтекании неровности дна сдвиговым течением будут генерироваться поверхностные волны большей длины и амплитуды.

Выводы

Рассмотрена задача о поверхностных подветренных волнах в сдвиговых течениях однородной жидкости. Показано, что для параметров течения, близких к реальным значениям, генерирующиеся на потоке поверхностные волны получаются короткими и будут иметь очень незначительную амплитуду в сравнении с внутренними волнами. При $\nu H \to 1$ будут генерироваться поверхностные волны на сдвиговом течении большей длины и амплитуды. В линейном приближении показано, что амплитуда возникающих в течении волн в значительной степени будет зависеть от высоты подводного препятствия и отношения скорости течения на поверхности и на дне потока.

Литература

1. *Durran D.R.* Lee waves and mountain waves. Encyclopedia of Atmospheric Sciences. Holton, J.R., J. Pyle and J.A. Curry eds. Elsevier Science Ltd., 2003. — P. 1161–1170.
2. *Makarenko N.I., Maltseva J.L.* Interference of lee waves over mountain ranges // Nat. Hazards Earth Syst. Sci. — 2011. — Vol. 11. — P. 27–32.
3. *Ле Блон П., Майсек Л.* Волны в океане. Т. 1. — М.: Мир, 1981. — 478 с.
4. Математический анализ. Продолжение курса / В.А. Ильин, В.А. Садовничий, Б.Х. Сендов. Под ред. Тихонова. — М.: Изд-во МГУ, 1987. — 358 с.
5. *Билюнас М.В., Доценко С.Ф.* Стационарные волны в потоке однородной жидкости с вертикальным сдвигом скорости // Морской гидрофизический журнал. — Севастополь. — 2010. — № 4. — С. 15–29.

Biliunas Marianna V., Dotsenko Sergey P.
Kerch Marine Technological University, Kerch;
Marine Hydrophysical Institute, Sevastopol.

Surface lee waves in shear flows

The paper considers the problem of the generation of surface stationary waves formed in a stream of vertical sheared flow on the leeward side of bottom irregularities. The analytical solution of the problem in the form of expression of the free surface shifting level are obtained for some model distributions speed depending on the different forms of underwater obstacles.

Keywords: *shear flow, homogeneous liquid, surface waves, lee waves.*

УДК 681.511.46

Подольская О.Г., Безуглая А.Е.

[1] *кандидат технических наук, доцент кафедры математики, физики и информатики,*
«Керченский государственный морской технологический университет»
[2] *кандидат технических наук, доцент кафедры информационных систем,*
«Севастопольский государственный университет»

e-mail: ogpodolskaya@i.ua, anna_bezuglaya@list.ru

ТЕРМИНАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ НЕЛИНЕЙНЫМИ СИСТЕМАМИ С РАЗРЫВАМИ РЕШЕНИЙ МЕТОДОМ КОНЕЧНОГО СОСТОЯНИЯ

Предложено обобщение метода конечного состояния для синтеза терминального управления многомерными нелинейными дискретными системами. Описана модель конечного состояния, а также алгоритм непрерывного и дискретного управления для систем с разрывами решений.

Ключевые слова: *терминальное управление, нелинейные системы с разрывами решений, метод конечного состояния.*

Введение.

Многие управляемые динамические процессы адекватно описываются нормальными системами обыкновенных дифференциальных и конечно-разностных одноиндексных уравнений. Такая форма математического описания, называемая «непрерывно-дискретные» системы, используется в тех случаях, когда часть переменных изменяется непрерывно во времени (в общем случае по любой независимой переменной), а часть — в отдельных точках временной оси.

Существует направление, связанное с использованием переходных функций линейных непрерывно-дискретных систем [1], развитие которого на нелинейные задачи управления определенного класса предлагается в данной работе.

Целью работы является обобщение метода конечного состояния для терминального управления нелинейными системами с разрывами решений.

© Подольская О.Г., Безуглая А.Е., 2016

Постановка и решение задачи.

В настоящей работе метод конечного состояния применен для решения более общей, чем непрерывно-дискретной по времени задачи терминального управления [2], — задачи терминального управления системой с разрывами решений в следующей постановке:

$$\begin{aligned}
&J = J\left(x\left(t_f\right)\right) \to J^*, \\
&\frac{dx\left(t\right)}{dt} = \Phi_1\left(t, x\left(t-0\right)\right) + B_1\left(t\right) \cdot u_1\left(t\right), \\
&x\left(t_j\right) = \Phi_2\left(t_j - 0, x\left(t_j - 0\right)\right) + B_2\left(t_j\right) u_2\left(t_j\right), \\
&t \in \left[t_0, t_f\right], \;\; x\left(t_0\right) = x^0, \;\; j = 1, 2, \ldots, N, \\
&t_1 < t_2 < \ldots < t_N, \;\; t_N \leqslant t_f,
\end{aligned} \tag{1}$$

где $u_1\left(t\right)$, $u_2\left(t_j\right)$ — $\left(r_1 \times 1\right)$, $\left(r_2 \times 1\right)$-мерные векторы управляющих воздействий на непрерывном и дискретном входах соответственно; x^0 — $\left(n \times 1\right)$-мерный вектор начальных условий, J^* — желаемое значение терминального критерия. Известные на всем интервале детерминированные внешние воздействия, по предположению, входят в непрерывную и непрерывно дифференцируемую по всем своим аргументам $\left(n \times 1\right)$-мерную вектор-функцию Φ_1 и определенную при всех своих аргументах $\left(n \times 1\right)$-мерную вектор-функцию Φ_2.

Подобная форма записи [3] гибридных систем в виде уравнений с разрывами решений позволяет соответствующим выбором Φ_1 и Φ_2 описывать как чисто непрерывные (при $\Phi_2 \equiv 0$, $B_2 \equiv 0$), чисто дискретные с произвольным количеством переменных во времени тактов и соотношений между ними (при $\Phi_1 \equiv 0$, $B_1 \equiv 0$), так и смешанные системы. Использование в качестве аргументов функций Φ_1, Φ_2 значения состояния в точках $t - 0$, $t_j - 0$, т.е. при пределах слева соответствующих времен, позволяет учитывать влияние состояния в предшествующий скачку момент времени. При этом, очевидно, порядок записи уравнений в системе (1) может быть произвольный.

Рассмотрим последовательно дискретные интервалы времени и на каждом из них найдем непрерывное управление $u_1\left(t\right)$, приводящее состояние системы (1) в некоторое заданное промежуточное состояние, задаваемое значением $J_j = J\left(x\left(t_j\right)\right)$, где j — номер дискретного интервала. Для этого, следуя основной схеме метода конечного состояния, определим так называемую «критериальную функцию» в виде целевой функции критерия, где аргумент $x\left(t_j\right)$ заменен переменной конечного состояния $\bar{x}\left(t_j, t, x\left(t\right)\right)$. Переменная конечного состояния вместе с нелинейной переходной матрицей определяется

совместной системой

$$\frac{d\bar{x}\left(\vartheta,t,x\left(t\right)\right)}{d\vartheta}=\Phi_1\left(\vartheta,\bar{x}\left(\vartheta,t,x\left(t\right)\right)\right),$$

$$\frac{dW\left(\vartheta,t,x(t)\right)}{d\vartheta}=\left.\frac{\partial\Phi_1\left(\vartheta,x\right)}{\partial x}\right|_{x=\bar{x}(\vartheta,t,x(t))}\cdot W\left(\vartheta,t,x(t)\right),$$

$$\vartheta\in\left[t_{j-1},t_j\right],\ W\left(t,t,(x(t)\right)=I,\ \bar{\mathrm{x}}\left(t_{j-1},t_{j-1},x\left(t_{j-1}\right)\right)=x\left(t_{j-1}\right),\ t\in\left[t_{j-1},t_j\right), \tag{2}$$

где I — единичная матрица.

Опираясь на непрерывный аналог определения переменной конечного состояния из (2) как решение неуправляемой системы, следующей из (1) при $u_1(t)=0$, $u_2(t_j)=0$, определим переменную конечного состояния для гибридной системы (1) как функцию первого аргумента:

$$\begin{aligned}&\frac{d\bar{x}\left(\vartheta,t,x\left(t\right)\right)}{d\vartheta}=\Phi_1\left(\vartheta,\bar{x}\left(\vartheta-0,t,x\left(t\right)\right)\right),\\&\bar{x}\left(t_j,t,x(t)\right)=\Phi_2\left(t_j-0,\bar{x}\left(t_j-0,t,x\left(t\right)\right)\right),\\&\vartheta\in\left[t,t_f\right],\ \bar{x}\left(t,t,x(t)\right)=x(t),\ \ j=1,2,\ldots,N,\\&t_1<t_2<\ldots<t_N,\ \ t_N\leqslant t_f,\ \ t\in\left[t_0,t_f\right].\end{aligned} \tag{3}$$

Определим желаемые значения критериальной функции в дискретных точках как решение конечно-разностного уравнения с некоторой правой частью f_{J2}:

$$\bar{J}_j=f_{J2}\left(\bar{J}_{j-1}\right). \tag{4}$$

Получим конечно-разностное уравнение для дискретной части задачи (1), введя для краткости записей обозначения:
$t_j-0\equiv j-0$, $\Phi_2\left(t_j-0,x\right)\equiv\Phi_2\left(j-0,x\right)$, $\bar{x}\left(t_j,t_k,x\left(t_k\right)\right)\equiv\bar{x}_{j,k}\left(x_k\right)$, $B_2\left(t_j\right)\equiv B_{2j}$, $u_2\left(t_j\right)\equiv u_{2j}$. Отсюда получаем:

$$\bar{x}_{j,j}\left(x_j\right)-\bar{x}_{j,j-0}\left(x_{j-0}\right)=B_{2j}u_{2j},\quad j=1,2,\ldots,N. \tag{5}$$

В полученном соотношении первый и второй индексы зависимы, управление определяется через переменные конечного состояния как функции второго аргумента (индекса).

В результате имеем в сокращенных обозначениях с учетом (1):

$$\bar{x}_{j+1,j}\left(x_j\right)\equiv\bar{x}\left(t_{j+1},t_j,x\left(t_j\right)\right)=$$
$$=\Phi_2\left(t_{j+1-0},\bar{x}\left(t_{j+1-0},t_j,x\left(t_j\right)\right)\right)=\Phi_2\left(j+1-0,\bar{x}_{j+1-0,j}\left(x_j\right)\right).$$

Переменная конечного состояния $\bar{x}_{j+1-0,j}\left(x_j\right)$ вычисляется по непрерывной части системы (3) при начальном условии

$$\bar{x}_{j,j}\left(x_j\right)\equiv x_j=\Phi_2\left(j-0,x_{j-0}\right)+B_{2j}u_{2j}\ \text{ и }\ \vartheta\in\left[t_j,t_{j+1}\right).$$

Получаем:

$$\bar{x}_{j+1,j}\left(x_j\right) - \bar{x}_{j+1,j-0}(x_{j-0}) = \\ = \Phi_2\left(j+1-0, \Phi_{21}\left(j-0, x_{j-0}\right) + B_{2j}u_{2j}\right) - \Phi_2\left(j+1-0, \Phi_{21}\left(j-0, x_{j-0}\right)\right). \tag{6}$$

Для сокращения последующих записей введем обозначение:

$$\Phi_{2_{[j]}}^{[k]}(x) \equiv \Phi_2\left(j, \Phi_{21}\left(j-1, \Phi_{21}\left(j-2, \ldots \Phi_{21}\left(j-k+1, x\right)\right)\right)\right), \tag{7}$$

где Φ_2 имеет k рекурсивных вхождений, дополненных операциями интегрирования непрерывной части системы (3). Связь между глубиной рекурсии k и индексом j, как и в дискретном случае, задается условием $k \leqslant j$. Начальным условием рекурсии является $\Phi_{2_{[j]}}^{[1]}(x) \equiv \Phi_2(j, x)$. В новых обозначениях вместо (6) запишем:

$$\bar{x}_{j+1,j}\left(x_j\right) - \bar{x}_{j+1,j-0}(x_{j-0}) = \\ = \Phi_{2_{[j+1-0]}}^{[1]}\left(\Phi_{21}\left(j-0, x_{j-0}\right) + B_{2j}u_{2j}\right) - \Phi_{2_{[j+1-0]}}^{[1]}\left(\Phi_{21}\left(j-0, x_{j-0}\right)\right).$$

После преобразований получаем:

$$\begin{aligned} & f_{J2}\left(\bar{J}_{j-1}\right) = J\big(\bar{x}_{N,j-1}\left(x_{j-1}\right) + \\ & + \Phi_{2_{[N-0]}}^{[N-j]}\left(\Phi_{21}\left(j-0, x_{j-0}\right) + B_{2j}u_{2j}\right) - \Phi_{2_{[N-0]}}^{[N-j]}\left(\Phi_{21}\left(j-0, x_{j-0}\right)\right)\big), \end{aligned} \tag{8}$$

$$\bar{J}_{j-1} \equiv J\left(\bar{x}_{N,j-1}\left(x_{j-1}\right)\right). \quad f_{j2}\left(\bar{J}_{j-1}\right) = \bar{J}_{j-1} + \tfrac{1}{T_{u2}}\left(J^* - \bar{J}_{j-1}\right).$$

Нелинейное конечное уравнение относительно управления u_{2j} уравнение (8) и является тем соотношением, из которого определяется искомое управление в дискретные моменты времени методом конечного состояния для определения управления в каждый дискретный момент j необходимо решать скалярное нелинейное уравнение с r_2 неизвестными (по числу компонент вектора u_2), т.е. фактически — r_2-мерную задачу нелинейного программирования.

Таким образом, расчет непрерывного и дискретного управлений для задачи (1) состоит из следующих шагов:

1) задаются исходные данные в виде переменных во времени (в общем случае) вектор-функций Φ_1, B_1, Φ_2, B_2, начальное состояние x^0, время $t_1 < t_2 < \ldots < t_{N-1} < t_N$, время функционирования системы $t_f \geqslant t_N$; полагается $j = 1$;

2) проверяется условие $j \leqslant N$; если условие выполнено, переход к шагу 3, в противном случае производится расчет непрерывного управления на оставшемся интервале $(t_N, t_f]$;

3) производится расчет непрерывного управления на интервале $[t_{j-1}, t_j]$;

4) производится расчет дискретного управления по алгоритму (8); в процессе расчета используется процедура, реализующая рекурсивное вложение правых частей Φ_2 дискретной части (3) и интегрирование непрерывной части (3) на интервале $[t_{j-1}, t_j]$; после формирования всех данных для уравнения (8) производится его численное решение относительно u_{2j}; полагается $j = j + 1$ и осуществляется переход к шагу 2.

Выводы.

1. Разработано обобщение метода конечных состояний для синтеза управлений нелинейными дискретными по времени терминальными системами вида (1) — дискретное МКС-управление.
2. Получена модель конечного состояния для систем с разрывами решений вида (1).

Литература

1. *Барабанов А.Т., Катковник В.Я., Нелепин Р.А., Хлыпало Е.И., Якубович В.А.* Методы исследования нелинейных систем автоматического управления / Под ред. Р.А. Нелепина. — М.: Наука, 1975. — 448 с.
2. *Шушляпин Е.А., Подольская О.Г.* Управление нелинейными непрерывно-дискретными системами методом конечного состояния // Труды IV Международной конференция «Идентификация систем и задачи управления SICPRO'05», г. Москва, 25–28 января 2005 г. — М.: ИПУ им. В.А. Трапезникова РАН, С. 1495–1513.
3. *Барабанов А.Т., Агранович Г.А.* Линейные модели и оптимизация непрерывно-дискретных динамических систем // Динамические системы: Респ. междувед. науч. сб. — Киев: Вища школа, 1983. — №2. — С. 17–24.

Podolskaya O.G., Bezuglaya A.E.
Kerch State Marine Technological University, Kerch;
Sevastopol State University, Sevastopol.

Terminal management the nonlinear systems with the breaks of decisions based on discrete terminal state method

Generalization of method of the terminal states offered for the synthesis of managements multidimensional nonlinear discrete terminal systems. The model of the terminal state, and algorithm of continuous and discrete management, is described for the systems with the breaks of decisions.

Keywords: *a terminal management, nonlinear systems with the breaks of decisions, discrete terminal state method.*

УДК 372.853

Лимарєва Ю.М., Цимбал М.В.

[1] *кандидат педагогічних наук, доцент кафедри фізики, ДВНЗ «ДДПУ»*

[2] *студентка 3 курсу фізико-математичного факультету, ДВНЗ «ДДПУ»*

e-mail: zet.80@bk.ru

ПРОБЛЕМА НАСТУПНОСТІ СУЧАСНОЇ ФІЗИКО-МАТЕМАТИЧНОЇ ОСВІТИ

Стаття присвячена дослідженню основних проблем реалізації принципу наступності у вивченні фізики. Розглянуто можливості їх подолання на сучасному етапі розвитку суспільства. Виділено основні вимоги до організації дистанційної освіти та постановки проблем.

Ключові слова: *дистанційна освіта, навчальний процес, свідомість, особистість, розвиток, наступність, розумова діяльність.*

Вступ

Аналіз результатів зовнішнього незалежного оцінювання з фізики та загальна відсоткова кількість бажаючих розглядати фізику як вступний іспит свідчить про низький рівень фізичної освіти випускників шкіл. Більше того, низький рівень активності першокурсників на заняттях з фізики свідчить про необхідність докорінних змін у підходах до отримання знань із зазначеної дисципліни. Середній абітурієнт, який не отримав додаткової підготовки на курсах або у приватних викладачів, демонструє не лише невміння вирішувати фізичні завдання на вступних іспитах, а й, вступивши до вищого навчального закладу, демонструє невміння вчитися на першому курсі. Це змушує викладачів багатьох дисциплін, включаючи і фізику, або знижувати вимоги і сприяти подальшій деградації процесу навчання зі спеціальних дисциплін, або, проявляючи жорсткість, ставити низькі оцінки і сприяти масовому відрахуванню вже після першого семестру навчання. Тому, на **меті** статті є встановлення основних причин зниження рівня знань з фізики та розкриття основних шляхів їх подолання.

Основна частина

Проблема наступності «школа – ВНЗ» завжди мала місце та нажаль завжди перебувала не на першому місці. З огляду на неї перш за все доцільно звернути увагу на невідповідність випускних шкільних програм з предмету та програм вступних іспитів до вишів. Таким чином маємо справу із подвійним навантаженням на школяра: *по-перше* — необхідність вивчати шкільну

© Лимарєва Ю.М., Цимбал М.В., 2016

програму, аби відповідати її вимогам, *по-друге* — готуватися до вступних випробувань (ЗНО) — намагатися комплексно свідомо відтворити систему знань з предмету. Додаткове навантаження, нажаль, має невеликий коефіцієнт результативності.

Зважаючи на це, профільність старшої школи виступає екстреною необхідністю. Вона забезпечить можливість вільного вибору особистості у напрямку подальшого навчання. Нажаль, на сучасному етапі профілювання старших класів ЗОШ відбувається лише вибірково та не вирішує зазначеної проблеми.

Одним із варіантів у вирішенні зазначеної проблеми також може стати дистанційна освіта. Перевагами дистанційного навчання на сучасному етапі освіти виступають:

— індивідуалізація навчального процесу,

— диференціація підходів до навчання,

— особистісно-орієнтований підхід,

— практика (досвід),

— підвищення рівня свідомості,

— розширення можливостей спілкування з фахівцями,

— самовдосконалення студентів і педагогів на основі індивідуально-диференційованого підходу.

Дистанційна освіта з фізики є новою формою організації навчання. Поряд із її перевагами маємо відзначити певні недоліки, які слід брати до уваги фахівцям, аби не втратити цінності науки фізики у формуванні цілісної особистості школяра.

Перспективи розвитку дистанційної фізичної освіти пов'язані:

— з доопрацюванням існуючого і створенням нового програмного забезпечення,

— адаптацією методичного забезпечення до умов експлуатації в електронній мережі,

— поступовим створенням курсів фізики для різних спеціальностей,

— забезпеченням наочності, простоти та змістовності віртуального фізичного експерименту,

— чіткою поетапністю у навчанні вирішенню фізичних задач,

— системою варіативного контролю та самооцінки знань,

— варіативністю організації дистанційного навчання,

— виваженим підходом до нормування навантаження особистості,

— оптимізація режиму «праця – відпочинок».

Нове програмне забезпечення для самостійного навчання в тому числі і в домашніх умовах має задовольняти цілком певним вимогам, що враховує

всі особливості самостійного дистанційного навчання. Відзначимо найбільш важливі:

∗ Епізодичність контакту з викладачем, хоча періодичність контактів не настільки мала, як при заочному навчанні, і може регулюватися учнем самостійно;

∗ Коротка тривалість контакту з викладачем, оскільки вона вимагає наявності певних зовнішніх умов, зокрема, наявності доступу до Інтернет або іншої мережі, матеріальних ресурсів на її експлуатацію, наявності ресурсів часу у викладача-консультанта і т. ін.;

∗ Необхідність додаткової і постійної мотивації процесу самостійної роботи учня над навчальним матеріалом (сам учень часто не може змусити себе вчитися з максимальною інтенсивністю протягом досить довгого часу);

∗ Необхідність постійного самоконтролю учня над процесом засвоєння матеріалу.

Програмне забезпечення повинно створювати в студента, що працює в автономному режимі, ілюзію постійної присутності кваліфікованого викладача. Відомо, що протягом багатьох років (навіть сотень років) традиційна форма навчання (вчитель в прямому контакті з учнем) демонструвала найбільшу ефективність. При роботі ж із «віртуальним» викладачем програма має забезпечувати інтенсивний і максимально близький (на скільки це можливо) до природного режиму спілкування комп'ютера і учня.

На сьогодні дистанційне навчання не є настільки масовою і всепроникною, як того вимагає сучасність. Не так давно дистанційному навчанню пророкували світле майбутнє, говорили, що воно пошириться мало не на всі школи та виші. Реальність, як завжди, внесла корективи і визначила місце дистанційного навчання там, де воно дійсно доречно і ефективно.

Довузівська підготовка навіть протягом одного року істотно компенсує зазначені вище негативні тенденції, бо часто обдаровані діти навчаються в дуже віддалених куточках країни і не можуть отримати таку підготовку в очній формі. До того ж багато вишів приймають на навчання студентів із зарубіжних країн, для яких мають місце і додаткові мовні труднощі.

Отже, для довузівської підготовки саме дистанційна форма навчання несе найбільший позитивний ефект.

Наступним аспектом зазначеної проблеми виступає підтримка активності школяра при вивченні фізики. Тут у нагоді стає організація навчання на основі постановки проблеми: створенням проблемної ситуації та постановкою проблемних задач. Можна виокремити кілька основних способів створення **проблемної ситуації:**

1. Опора на життєвий досвід.
2. Самостійні дослідження.
3. Вирішення проблемного питання.
4. Створення помилки (навмисно).

Таким чином, відбувається активізація розумової активності та пошукової діяльності особистості.

За такої організації навчальної діяльності **новизна** матеріалу забезпечує привертання уваги та зацікавлення, його **змістовність** — збуджує інтерес завдяки розкриттю наукової ємності, а **значущість** — переконує у необхідності його вивчення виходячи з його професійної цінності та доцільності практичного використання.

Висновки

Проблема наступності фізичної освіти на сьогодні має такі основні напрямки подолання: профільність навчання, дистанційна освіта та проблемне навчання. З урахуванням специфіки організації навчального процесу в області фізичної освіти має бути розроблена структура системи дистанційного фізичної освіти, що здатна максимально використати досвід, накопичений у відомих традиційних формах навчання. На основі проблемного навчання мають бути організовані самоосвіта особистості та її самоконтроль досягнень. Організація профільного навчання вимагає більш детального вивчення з метою зміни підходів до його організації та підвищення ефективності, що є метою подальших досліджень.

Література

1. *Атаманчук П. С.* Элементы интерактивных технологий обучения физике : учеб. пособ. / П.С. Атаманчук, П.И. Самойленко, Н.Л. Сосницкая. — М. : АПК и ППРО, 2007. — 148 с.
2. *Богданов І. Т.* Дистанційне навчання електротехнічних дисциплін / І. Т. Богданов // Педагогіка і психологія формування творчої особистості: проблеми і пошуки: зб. наук. пр. / редкол.: Т. І. Сущенко (голов. ред.) та ін. — Запоріжжя. — 2008. — Вип. 50. — С. 29–37.
3. *Горбачева А. В.* Дистанционное образование — технология обучения XXI века. / А. В. Горбачева // Nastoleni moderni vedy – 2007 // Materialy VI mezinarodni vedecko-prakticka conference “Nastoleni moderni vedy – 2007” (1 – 15 zari 2007 roku) – Dil 4. Pedagogika. Filologicke vedy. Psychologie a sociologie / Publishing House Education and Science s.r.o – Praha. : 2007. — С. 3–5.

4. *Іванова Л. В.* Сучасні методичні форми підготовки фахівців із застосуванням комп'ютерних технологій. / Л. В. Іванова // Nastoleni moderni vedy – 2007 // Materialy VI mezinarodni vedecko-prakticka conference "Nastoleni moderni vedy – 2007" (1 – 15 zari 2007 roku) – Dil 4. Pedagogika. Filologicke vedy. Psychologie a sociologie / Publishing House Education and Science s.r.o – Praha. : 2007. — С. 40–41.
5. *Лимарєва Ю. М.* Дистанційна підготовка спеціалістів у вищих педагогічних закладах. / Ю. М. Лимарєва // Найновите научи постижения – 2013 // Материали за 9-а международна научна практична конференция, «Найновите научи постижения – 2013» (17 – 25 март 2013 година) — Том 11. Педагогически науки / «Бял ГРАД-БГ» ООД – София : 2013. — С. 5–7.
6. *Лимарєва Ю. М.* Дистанційне навчання як форма організації свідомої самоосвіти в сучасній вищій школі / Ю. М. Лимарєва // Сучасна наука в мережі Internet: Матеріали дев'ятої Міжнародної науково-практичної інтернет-конференції (25 – 27 лютого 2013 р.) частина 2 / ТОВ «ТК Меганом» – Київ. : 2013. — С. 37–40.

Lymareva Yuliya M., Tsymbal Maria V.
Donbas State Teachers' Training University, Slovians'k, Ukraine.

The problem of continuity of modern physics and mathematics education

The article investigates the basic problems of the principle of continuity in the study of physics. The possibilities to overcome the current development of society. The basic requirements of distance education and production problems.

Keywords: *distance education, educational process, consciousness, identity, development, continuity, mental activity.*

ІНФОРМАТИКА ТА МЕТОДИКА ЇЇ ВИКЛАДАННЯ

УДК 512.624.95

Рябухо О.М., Турка Т.В.

[1] *кандидат фізико-математичних наук, доцент, КДМТУ*

[2] *кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри алгебри, ДВНЗ «ДДПУ»*

e-mail: ren_elena@mail.ru, tvturka@gmail.com

ЗАСТОСУВАННЯ ПЕРЕСТАНОВОЧНИХ ПОЛІНОМІВ В КРИПТОГРАФІЇ

В роботі подано огляд результатів про перестановочні многочлени, тобто про такі многочлени, для яких відповідні поліноміальні функції є перестановками множини елементів скінченного поля F_q. Побудовані приклади перестановочних многочленів, описані перспективи застосування перестановочних двучленів в криптографії.

Ключові слова: *перестановочні многочлени, скінченні поля, криптографічні протоколи.*

Вступ

В сучасному інформаційному суспільстві засоби захисту інформації та способи його зламу розвиваються постійно. Цей розвиток навряд чи буде колись завершено у зв'язку з постійним збільшенням обчислювальної можливості сучасних комп'ютерів.

Однією з основних задач, розв'язуваних в криптографії, є задача посилки повідомлення по незахищеному каналу зв'язку. Традиційний спосіб розв'язання даної задачі полягає у використанні схеми шифрування з відкритим ключем, ідея якої ґрунтується на використанні публічної функції для шифрування повідомлень, що пересилаються, та секретної функції для розшифровки повідомлень. Криптостійкість таких схем заснована на припущенні про велику обчислювальну складність задачі обернення функції шифрування без знання секрету, на основі якого дана функція була побудована.

При побудові криптографічних систем широке застосування одержали так звані перестановочні многочлени скінченних полів F_q, які індукують перестановки елементів скінченного поля F_q і, відтак, відповідають елементам симетричної группи S_q, тобто групи всіх підстановок на множині з q елементів.

© Рябухо О.М., Турка Т.В., 2016

Перестановочними многочленами називаються многочлени, функції яких є бієкцією над аналізованим кільцем (полем). Перспектива використання перестановочних многочленів у криптографічних схемах з відкритим ключем, як кандидатів на роль функції шифрування, є одним із головних стимулів розвитку теорії таких многочленів. Математичні елементи теорії перестановочних многочленів над скінченними полями і індукованими ними групами підстановок знаходить застосування при побудові блочних криптосистем для перестановки інформаційних блоків повідомлень, які передаються.

В даний момент у самому поширеному криптографічному протоколі RSA з відкритим ключем в якості шифруючих функцій використовуються одночлени. Використання більш складних перестановочних многочленів може підвищити криптостійкість такого протоколу. Тому задача дослідження питання про властивості перестановочних многочленів над скінченими полями, і питання можливості їх застосування в криптографії є надзвичайно важливою і актуальною.

Перестановочні многочлени над скінченними полями

Означення 1. *Многочлен $f \in F_q[x]$ називається перестановочним многочленом поля F_q, якщо відповідна йому поліноміальна функція $f : F_q \to F_q$, яка відображає елементи $c \in F_q$ в елементи $f(c) \in F_q$ є перестановкою елементів поля F_q.*

Вперше перестановочні многочлени згадуються в роботах Ерміта і Діксона [1], [2], де розглядалися прості скінченні поля.

Теорема 1. *(Критерій Ерміта). Нехай p — характеристика поля F_q. Тоді многочлен $f \in F_q[x]$ є перестановочним многочленом поля F_q тоді і тільки тоді, коли виконуються наступні дві умови:*

1) *многочлен f має рівно один корінь в F_q;*

2) *для кожного цілого t такого, що $1 \leqslant t \leqslant q-2$ і $t \not\equiv 0 (\mathrm{mod}\ p)$, результат зведення многочлена $f(x)^t$ за модулем $x^q - x$ має степінь $d \leqslant q-2$.*

Очевидно, що якщо многочлен $f \in F_q[x]$ є перестановочним многочленом поля F_q, то умова 2) теореми1. виконується і без обмеження $t \not\equiv 0 (\mathrm{mod}\ p)$. Умова ж 1) може бути замінена іншою, наприклад, як в наступній теоремі.

Теорема 2. *Нехай поле F_q має характеристику p. Тоді многочлен $f \in F_q[x]$ є перестановочним многочленом поля F_q тоді і тільки тоді, коли виконуються наступні умови:*

1) *многочлен* $f(x)^{q-1}(\mathrm{mod}\ (x^q - x))$ *має степінь* $q-1$*;*

2) *для довільного цілого* t*, де* $1 \leqslant t \leqslant q-2$ *і* $t \not\equiv 0(\mathrm{mod}\ p)$*, многочлен* $f(x)^t(\mathrm{mod}\ (x^q - x))$ *має степінь* $d \leqslant q-2$*.*

Декілька простих прикладів перестановочних многочленів можна отримати за допомогою наступних елементарних результатів. Спочатку вкажемо приклади перестановочних многочленів над будь-якими полями F_q.

Теорема 3.

1) *Кожний лінійний многочлен над полем* F_q *є перестановочним многочленом поля* F_q*;*

2) *одночлен* x^n *є перестрановочним многочленом поля* F_q *тоді і тільки тоді, коли* НСД$(n, q-1) = 1$*.*

Доведення.

1) Лінійний многочлен має вид $ax + b$. За критерієм Ерміта він є перестановочним.

2) Одночлен x^n є перестановочним многочленом поля F_q тоді і тільки тоді, коли відображення $f : c \to c^n$, де $c \in F_q$ є відображення «на», а це має місце тоді і тільки тоді, коли НСД$(n, q-1) = 1$. □

Теорема 4. *Нехай* F_q *— поле характеристики* p*. Тоді* p*-многочлен*

$$L(x) = \sum_{i=0}^{m} a_i x^{p^i} \in F_q[x]$$

є перестановочним многочленом поля F_q *тоді і тільки тоді, коли многочлен* $L(x)$ *має в полі* F_q *єдиний корінь, рівний 0.*

Доведення. Функція $L : c \to L(c)$, де $c \in F_q$ є лінійним оператором в F_q (який розглядається як векторний простір над полем F_p). Тоді відображення L є взаємно однозначним тоді і тільки тоді, коли многочлен $L(x)$ має в полі F_q єдиний корінь, який дорівнює 0. □

Інші приклади перестановочних многочленів можна отримати, якщо скористатися тим, що множина перестановочних многочленів замкнена відносно операції композиції (тобто, якщо $f(x)$ і $g(x)$ — перестановочні многочлени поля F_q, то $f(g(x))$ також є перестановочним многочленом поля F_q.) Клас перестановочних многочленів, який одержуємо при цьому описується наступною теоремою.

Теорема 5. *Нехай* F_q *— скінченне поле,* $r \in N$, НСД$(r, q-1) = 1$ *і нехай* s *— додатній дільник числа* $q-1$*. Нехай далі,* $g(x) \in F_q[x]$ *— такий*

многочлен над полем F_q, *що многочлен* $g(x^s)$ *не має ненульових коренів в полі* F_q. *Тоді многочлен* $f(x) = x^r(g(x^s))^{(q-1)/s}$ *є перестановочним многочленом поля* F_q.

Доведення. Покажемо, що многочлен задовольняє умовам теореми 1. Умова 1) виконується очевидно. Щоб довести умову 2) покладемо $t \in Z$, $1 \leqslant t \leqslant q-2$ і припустимо спочатку, що t не ділиться на s. Відмітимо, що $f(x)^t$ представляє собою суму членів, показники степенів яких мають вид $rt + ms$, де $m \in Z$ і $m \geqslant 0$. Так як НСД$(r, s) = 1$, ці показники степеня не діляться на s і, значить не діляться на $q-1$. Тоді степінь многочлена $f(x)^t(\mathrm{mod}\ (x^q - x))$ не перевищує $q-2$. Якщо t ділиться на s, наприклад $t = ks$, де $k \in N$, то

$$f(x)^t = x^{rt}(g(x^s))^{(q-1)k}$$

Якщо припустити $h(x) = x^{rt}$, то так як $g(c^s) \neq 0$ для всіх $c \in F_q$, ми отримуємо, що $f(c)^t = h(c)$; крім того, $f(0)^t = h(0)$. Тоді

$$f(x)^t \equiv x^{rt}(\mathrm{mod}\ (x^q - x))$$

і так як rt не ділиться на $q-1$, многочлен $f(x)^t(\mathrm{mod}\ (x^q - x))$ є многочленом степеня не більшого ніж $q-2$. □

Із зауваження зробленого після теореми 4, зокрема, випливає, що якщо $f \in F_q[x]$ — перестановочний многочлен поля F_q і $b, c, d \in F_q$, $c \neq 0$, то $f_1(x) = cf(x+b) + d$ також є перестановочним многочленом поля F_q. Вибираючи відповідним чином константи b, c, d можна отримати многочлен $f_1(x)$ в нормованій формі. Останнє означає, що $f_1(x)$ є нормованим многочленом і при цьому $f_1(0) = 0$, і якщо степінь n многочлена $f_1(x)$ не ділиться на характеристику поля F_q, то коефіцієнт при x^{n-1} дорівнює 0. Таким чином, можна обмежитися вивченням нормованих перестановочних многочленов. Користуючись критерієм Ерміта, можна отримати всі нормовані перестановочні многочлени довільного фіксованого степеня.

Скористаємося другим критерієм для перевірки перестановочності многочленів. Візьмемо конкретні приклади: чи є перестановочними многочлени $x^4 + 1$, $x^3 - 2x$ над полем F_3?

Для доведення скористаємося критерієм перестановочності, який був сформульований у теоремі 2.. Розглянемо степені многочленів:

$$deg((x^4+1)^2(\mathrm{mod}\ (x^3 - x))) = deg(3x^2 + 1) = 2,$$

$$deg((x^3 - 2x)^2(\mathrm{mod}\ (x^3 - x))) = deg(x^2) = 2,$$

Умова 1) теореми 2 виконуються.

Перевіримо другу умову: $t = 1$

$$deg((x^4+1)(\mathrm{mod}\ (x^3-x))) = deg(x^2+1) = 2,$$

$$deg((x^3-2x)^2(\mathrm{mod}\ (x^3-x))) = deg(-x) = 1,$$

Умова 2) виконується тільки для многочлена x^3-2x. Значить многочлен x^3-2x над полем F_3 є перестановочним. Многочлен x^4+1 над полем F_3 — неперестановочний.

Отже, множина перестановочних многочленів F_q, степінь яких менше q, утворюють групу відносно операції композиції. Ця група ізоморфна симметричній групі S_q, тобто групі всіх перестановок на множині з q елементів.

Таким чином, симетричну групу S_q, перестановок і її підгрупи можна подати у вигляді груп перестановочних многочленів.

Одержаний результат сформулюємо:

Теорема 6. *Якщо $q > 2$, то многочлен x^{q-2} разом з лінійними многочленами над полем F_q породжує симетричну групу підстановок S_q.*

Застосування перестановочних двучленів в криптографії

В сучасних криптосистемах, а саме у самому поширеному криптографічному протоколі RSA з відкритим ключем в якості шифруючих функцій використовуються одночлени. Використання більш складних перестановочних многочленів може підвищити криптостійкість такого протоколу. На сьогодні задача дослідження питання про властивості перестановачних многочленів над скінченими полями, і питання можливості їх застосування в криптографії є надзвичайно важливою і актуальною.

Перестановочні двучлени є одними з простих за формою многочленів, але при цьому їх властивості погано вивчені. На сьогодняшний день не існує критерію, який дозволяв би будувати випадкові перестановочні двучлени, немає достатньо великих серій таких двучленів, а також відсутні точні оцінки кількості перестановочних двучленів.

В роботі [4] досліджуються перестановочні многочлени у формі $x^r h(x^{(q-1)/d})$ над скінченними полями F_q, де $d|(q-1)$, і був отриманий критерій перестановочного многочлена у такій формі. Цей критерій був згодом спрощено у роботах [6], [7] до приведеного нижче.

Теорема 7. *Нехай $d,\ r > 0$, $d|(q-1)$ та $h(x) \in F_q x$.*

Тоді $f(x) = x^r h(x^{(q-1)/d})$ є перестановачним многочленом в F_q тоді і тільки тоді, коли виконуються дві умови:

1) $\gcd(r, (q-1)/d) = 1$;

2) $x^r h(x^{(q-1)/d})$ *є бієкцією над* μ_d, *де* μ_d *— множина коренів степеня* d *із одиниці в скінченому полі* F_q.

У разі малих значень d, критерій теореми 1 є ефективним, так як може бути перевірений за час $O(d^2 \log\ p)$.

У роботі [4] також було доведено, що вся множина таких многочленів у скінченому полі F_q утворює групу, порядок якої приведений нижче:

$$N_{d,q} = d!\left(\frac{q-1}{d}\right)^d \phi\left(\frac{q-1}{d}\right)$$

де $\phi(n)$ — функція Ейлера.

Будь-який перестановочний двучлен $\alpha x^n + \beta x^m$, де $n < m$ можна подати у вигляді $x^n h(x^{(q-1)/d})$, де $d = \gcd(q-1,\ m-n)$ та $h(x) = \alpha + \beta x^{d(m-n)/(q-1)}$. Це значить, що теорема 1 також може бути застосована і до двучлена, і, у випадку малих значень d, така перевірка являється ефективною.

У роботі [5] доведено, що, якщо двучлен $\alpha x^n + \beta x^m$ є перестановачним над простим полем F_q, то $\gcd(m-n,\ p-1) > \sqrt{p} - 1$ і із цього слід, що $d < \sqrt{p} + 1$.

Теорема 8. *Якщо* $x^n + \alpha x^m$ *— перестановачний двучлен над простим полем* F_q, *тоді* $\gcd(m-n,\ p-1) > \sqrt{p} - 1$.

У роботі [5] висувається гіпотеза, що $d < 2\log p$, перевірено експериментально для усіх значень p до 10000. Перераховані в данній роботі перестановочні двучлени для усіх простих скінчених полів F_q, де $p < 15000$, також узгоджуються з цією гіпотезою. У випадку виконання гіпотези, задача перевірки перестановочності для будь-якого двучлена може бути розв'язання ефективно за час $O(\log^3 p)$, якщо реалізувати критерій теореми 7.

Многочлени у формі $x^r f(x^{(q-1)/d})$ замкнуті відносно операції композиції для фіксованого d. Із цього слідує, що многочлен обернений до перестановочного многочлена у формі $x^r f(x^{(q-1)/d})$ також можна подати у такій формі, так як обернений многочлен циклічної групи, породженої даної перестановочним многочленом відносно операції композиції. На основі цього можна зробити висновок, що кількість членів у зворотному многочлені не перевищує числа d. Ефективний спосіб обчислення коефіцієнтів зворотного многочлена отриманий в роботі [8] і складність його складає $O(d^2 \log p)$.

В роботі [9] був запропонований спосіб побудови перестановочних двучленів над скінченними полями, що дає можливість побудувати модельний криптографічний протокол з використанням двучленів в якості шифруючих

функцій, аналогічний криптографічному протоколу RSA. Для перестановочних двучленів $ax^n + bx^m$ в [9] було доведено, що такий протокол буде ненадійним, тому що сам вид функції шифрування дозволяє факторизувати модуль, за яким виконується обчислення, і через це протокол стає ненадійним. Що стосується використання в якости функциї шифрування більш складних многочленів, залишається відкритим. В [10] описаний алгоритм переліку, досліджені властивості перестановочних многочленів малої довжини над простими скінченними полями, сформульовані гіпотези про класифікацію перестановочних многочленів, які містять не більше п'яти членів.

Висновки

Перестановочні многочлени над скінченними полями и кільцями Z/nZ залишаються кандидатами на застосування їх в якості функцій шифрування тому, що обчислення коефіцієнтів зворотного перестановочного многочлена є обчислювально складною задачею. Перестановочні двучлени є одними з простих за формою многочленів, але їх використання в якості функції шифрування в протоколі RSA робить його ненадійним. Можливо підійдуть для використання перестановочні трьохчлени, але для випадку сильних простих чисел клас перестановочних трьохчленів сильно обмежений. Крім того поки що не існує критерію, який дозволяв би будувати випадкові перестановочні многочлени, немає достатньо великих серій таких многочленів, а також відсутні точні оцінки кількості таких многочленів.

Література

1. *Hermite Ch.* Sur les Fonctions de Sept Lettres // C.R. Acad. Sci. Paris. 1905. P. 750–757.
2. *Dickson L. E.* The Analytic Representation of Substitutions on a Power of a Prime Number of Letters with a Finite Field Permute the Elements of the Field? // The American Mathematical Monthly. 1988. Vol. 95. P. 243–246.
3. *Lidl R., Mullen G. L.* When does a polynomial over a finite field permute the elemenls of the field? — The American Mathematical Monthly. 1988, Vol. 95. P. 243–246.
4. *Wan D., Lidl R.* Permutation polynomials of the form $x^n f(x^{(q-1)/d})$ and their group structure? // Monatshefte fur Mathematik. 1991. Vol. 112 N 2. P. 149–163.
5. *Masuda A. M., Zieve M. E.* Permutation Binomials over Finite Fields // Transactions of the American Mathematical Sosiety. 2009. Vol. 361. N 8. P. 4169–4180.

6. *Akbary A., Wang Q.* On polynomials of the form $x^n f(x^{(q-1)/d})$ // Internationnal Journal of Mathematics and Mathematical Scienes. 2007. Vol. 1. 7 pp.
7. *Zieve M. E.* On some permutation polynomials over F_q of the form $x^n f(x^{(q-1)/d})$ // Proc. of the American Mathematical Sosiety. 2009. Vol. 137. N 7. P. 2209–2216.
8. *Wang Q.* On Inverse Permutation Polinomials // Finite Fields and Their Applications. 2009. Vol. 15 N 2. P. 207–213.
9. *Васильев Н. Н., Рыбалкин М. А.* Перестановачные двучлены и группы, порождение ими // Записки научных семинаров ПОМИ. 2011. № 387. С. 83–101.
10. *Рыбалкин М. А.* Перестановочные многочлены малой длины над простыми конечными полями // Информационно-управляющие системы. 2014. № 5(72). С. 103–109.
11. *Лидл Р., Нидеррайтер Г.* Конечные поля: В 2-х т. Т.1. Пер. с англ. — М.: Мир, 1988. — 430 с.

Ryabukho Olena M., Turka Tetiana V.
FSBEI HE, «Kerch State Marine Technological University», Kerch;
Donbas State Teachers' Training University, Slovians'k, Ukraine.

Application permutation polynomials in cryptography

This paper provides an overview of the results of permutation polynomials over finite fields, ie these polynomials for which corresponding polynomial functions are permutations of the set of elements of finite fields F_q. An example of permutation polynomials described prospects of permutation polynomials in cryptography.

Keywords: *permutation polynomials, finite fields, cryptographic protocols.*

УДК 004.424.36

Стьопкін А.В., Пластун Д.А.

[1] *старший викладач кафедри алгебри, ДВНЗ «ДДПУ»*

[2] *студент 4 курсу фізико-математичного факультету, ДВНЗ «ДДПУ»*

e-mail: stepkin.andrey@rambler.ru

АЛГОРИТМ ФОРДА-ФАЛКЕРСОНА

В роботі наведено реалізацію методу Форда-Фалкерсона для знаходження максимального потоку у транспортній мережі засобами мови програмування Pascal. Для реалізації методу Форда-Фалкерсона використовується метод обходу графа в глибину, що реалізований в мові програмування Pascal рекурсією.

Ключові слова: *рекурсія, обхід в глибину, метод Форда-Фалкерсона*

Вступ

В наш час інформаційні технології займають одне з найважливіших місць у всіх сферах нашого життя. Комп'ютери застосовуються скрізь: в навчанні, в менеджменті, в торгівлі, на виробництві та в інших видах діяльності людини. Але функціонування будь-якого комп'ютера неможливе без необхідних програм, а отже і алгоритмів, на основі яких пишуться програми. Таким чином, різноманітні алгоритми щодня допомагають людині у різних сферах діяльності. І деякі з них відіграють дуже важливу роль в розвитку людства. Отже, питання алгоритмізації є дуже актуальними й потребують багато уваги для подальшої розробки алгоритмів та вдосконалення вже існуючих. Поряд із цим, не може залишатися осторонь, також й процес програмування, як один з фундаментальних розділів інформатики.

Однією за важливих задач, вирішення якої допомагає оптимізувати транспортування вантажів, побудову нафто-, водо- та газопроводів, проектування електромереж є задача пошуку максимального потоку мережі. Для вирішення якої часто використовується метод Форда-Фалкерсона. Алгоритм реалізації якого, за допомогою методу обходу в глибину, ми і розглянемо більш детально.

Об'єктом дослідження є потоки в транспортних мережах.

Предметом дослідження є процес знаходження максимального потоку у транспортній мережі за допомогою алгоритму Форда-Фалкерсона.

© Стьопкін А.В., Пластун Д.А., 2016

Метою дослідження є реалізація алгоритму Форда-Фалкерсона, за допомогою методу обходу графа в глибину, мовою програмування Pascal.

Основна частина

Вперше проблеми пов'язані з транспортуванням потоків у мережах були розглянуті Канторовичем в 1933 році. Більше того — він розглядав більш загальну задачу з рухом потоку рідин різних типів. Основи теорії потоків були закладені в період з листопада 1954 по грудень 1955 дослідниками корпорації RAND (Санта-Моніка, Каліфорнія).

Перший звіт «Максимальний потік в мережі» датується 19 листопада 1954. Автори звіту — Форд і Фалкерсон, довели теорему про максимальний потік і мінімальний розріз для неорієнтованих графів: значення максимального потоку в мережі дорівнює мінімальній пропускній здатності розрізу. (Розрізом в мережі називається розбиття множини її вершин на два непересічних класи, таких що джерело і стік лежать у різних класах. Пропускною здатністю розрізу називається сума пропускних спроможностей ребер, кінці яких лежать в різних класах). Робота Форда і Фалкерсона про потоки і розрізи [5] була мотивована вивченням транспортних мереж залізниць. У тому ж звіті вони також описали простий алгоритм знаходження максимального потоку для планарних графів, що володіють такими додатковим властивостями: після додавання дуги з джерела в стік граф залишається планарним.

У своєму першому звіті про максимальні потоки, Форд і Фалкерсон згадали, що задача про максимальний потік була сформульована Харрісом наступним чином: "Розглянемо транспортну мережу залізних доріг, що з'єднують два міста через деяке число проміжних міст. Нехай також кожна дорога, що сполучає два міста, має деяку пропускну здатність. Знайти максимальний потік в даній мережі, враховуючи умову консервативності (тобто для будь-якого проміжного міста величина потоку, що прийшла в місто дорівнює величині потоку що вийшла з міста)". Пізніше у своїй книзі «Потоки в мережах» (1962), Форд і Фалкерсон дали більш точне посилання: в 1955 році Гарріс, у співавторстві з Россом, сформулювали просту модель для трафіку в транспортних мережах, і розглядали цю задачу (про мінімальний розріз). Мова йде про секретний звіт Харріса і Росса «Фундаментальний метод оцінки пропускних спроможностей транспортних мереж», датованому 24 жовтня 1955, і призначеному для ВПС США. На відміну від Форда і Фалкерсона, центральним завданням для Харріса і Росса було завдання про мінімальний розріз. А її застосуванням: знаходження слабких місць у системі залізниць СРСР.

(А саме, мінімальному розрізу тут відповідає мінімальний набір транспортних шляхів, знищення якого завдасть критичні пошкодження транспортному сполученню СРСР).

Основні поняття

Графом $G := (V, E)$ називається об'єкт, який заданий парою множин (V, E), де V — множина **вершин**, $E \subseteq V \times V$ — множина **ребер**. Граф називається скінченним, якщо множини його вершин і ребер є скінченними. Множину вершин графу G позначають $V(G)$, а множину ребер — $E(G)$.

Розглядають також орієнтовані графи.

Орієнтованим графом (орграфом) називається граф $G = (V, A)$, в якому (v_i, v_j) — впорядкована пара, де V — множина вершин , а елементи A називають *дугами* або **орієнтованими ребрами**.
Якщо $(v_i, v_j) = (v_j, v_i)$ то граф — **неорієнтований**, а елементи E називаються **ребрами**.

При зображенні орієнтованих графів напрямки ребер позначаються стрілками. Кожному неорієнтованому графу можна поставити у відповідність орієнтований граф з тією самою множиною вершин, в якій кожне ребро замінено двома орієнтованими ребрами, що є інцидентними тим самим вершинам і мають зворотні напрямки.

Граф $G = (V, E)$ називається **зваженим**, якщо його ребра (дуги) або вершини мають додаткові характеристичні ознаки (вагу).

Мережу можна представити як систему, яка транспортує деякий продукт з однієї точки в іншу. Цим продуктом можуть бути люди, електроенергія, природній газ, нафта та багато іншого. Використовуючи таке представлення розглянемо мережу як орієнтований граф, де кожному ребру $e = (v, u)$ відповідає додатне дійсне число $c(e)$, яке називається **пропускною спроможністю** ребра e. Якщо між вершинами немає ребра, то пропускна спроможність дорівнює нулю. Такий граф не може мати петель, адже розглядаються задачі для транспортування продукту тільки між різними вершинами. Необхідна умова: орієнтований граф повинен бути зв'язним, адже якщо є шлях з s в t, то нас будуть цікавити тільки компоненти, які містять s та t. Розглянемо також особливу вершину s, яка називається **джерелом**, — степінь заходу в неї дорівнює **0** $(d^+(S) = 0)$, а також вершину t, яка називається **стоком**, — степінь виходу з неї дорівнює також **0** $(d^-(T) = 0)$.

Мережа — це орієнтований граф $G = (V, E)$ разом з ваговою функцією $c : E \to R^+$ та виділеними вершинами s та t, такими що $d^+(s) = 0$ та $d^-(t) = 0$.

Для кожного ребра e розглянемо значення функції $f(e)$, яке визначає **потік** через це ребро. Зрозуміло, що величина потоку в ребрі не може перевищувати пропускну спроможність цього ребра. Також будемо вимагати, щоб потік, який заходить у вершину дорівнював потоку, який виходить з вершини.

Нехай S — підмножина множини вершин V та $T = V \setminus S$. Тоді множина $P = \{e : e \in (S, T)\}$ називається **розрізом**. Якщо $s \in S$ та $t \in T$, то розріз називається $s - t$ розрізом [1,2,4].

Знаходження максимального потоку у транспортній мережі за допомогою алгоритму Форда-Фалкерсона.

Ідея алгоритму [3] полягає в наступному. Ми вибираємо такий шлях від джерела до стоку, щоб для кожного ребра залишкова пропускна здатність була строго більше нуля. При цьому ребра на даному шляху можуть проходитися як у прямому, так і в зворотному напрямку. Вибираємо мінімальне значення серед залишкових пропускних спроможностей ребер даного шляху. Збільшуємо потік на кожному з ребер даного шляху на обране мінімальне значення. Далі шукаємо наступний аналогічний шлях. Робота алгоритму продовжується до тих пір, поки вдається знаходити дані шляхи. Відразу відзначимо, що даний алгоритм відноситься до класу недетермінованих, тобто кожен наступний крок алгоритму визначено неоднозначно. І час роботи (кількість кроків) алгоритму залежить від того, як будуть вибиратися кроки.

Алгоритм Форда-фалкерсона:

1. Прирівнюємо до нуля всі потоки. $\forall e(v_i, v_j) \in E \quad f(e) = 0$. Залишкова мережа спочатку збігається з вихідною мережею;
2. У залишкової мережі знаходимо будь-який шлях з джерела s у стік t. Дуги якого задовольняють умові $f(v_i, v_j) \leqslant c(v_i, v_j)$. Якщо такого шляху немає, то потік у мережі максимальний;
3. Пускаємо через знайдений шлях (він називається збільшувальним шляхом) максимально можливий потік;
4. На знайденому шляху в залишковій мережі шукаємо ребро з мінімальною пропускною здатністю C_{min};
5. Для кожного ребра на знайденому шляху збільшуємо потік на C_{min}, а в протилежному йому — зменшуємо на C_{min};
6. Модифікуємо залишкову мережу. Для всіх ребер на знайденому шляху, а також для протилежних їм ребер, обчислюємо нову пропускну здатність. Якщо нова пропускна здатність не дорівнює нулю, додаємо ребро до залишкової мережі, а якщо дорівнює нулю, стираємо його;
7. Повертаємося на крок 2.

Важливо те, що алгоритм не конкретизує, який саме шлях ми шукаємо на кроці 2 або як ми це робимо. З цієї причини алгоритм гарантовано сходиться тільки для цілих пропускних спроможностей, але навіть для них при великих значеннях пропускних спроможностей він може працювати дуже довго або зовсім не привести до оптимального рішення.

Реалізація алгоритму Форда-Фалкерсона мовою програмування Pascal.

Алгоритм Форда-Фалкерсона в паскалі можна реалізувати через пошук в глибину або через пошук в ширину. Ми реалізуємо цей алгоритм через пошук в глибину.

Вхідними даними буде масив який визначає пропускну здатність кожної дуги, якщо дуги не існує її пропускна здатність дорівнює нулю. Оскільки в транспортній мережі не може бути петель і дуги не можуть вести назад в джерело, та назад зі стоку то програма не вимагає їх вводу.

Результатом цієї програми буде число яке буде дорівнювати максимальному потоку в мережі.

```
program FordFulkerson;
    uses crt;
    const maxv=10; //кількість вершин графу
    var k,Cmin,Fmax,i,j:integer;
    graph: array [1..maxv, 1..maxv] of integer; //граф заданий масивом
    visited: array [1..maxv] of integer; //масив відвіданих вершин
    pathv: array[1..maxv] of integer; //масив вершин, що входять у
                                        збільшуваний шлях
    pathe: array[1..maxv-1] of integer; //масив пропускної спроможності ребер,
                                        що входять у збільшуваний шлях
procedure aff(v: integer);
    var i: integer;
    begin
      visited[v]:=1;
      pathv[k]:=v;
      for i := 1 to maxv do if (graph[v,i]>0) and (visited[i]=0) then //шукаємо
                                        вершини для збільшуваного шляху
      begin
        k:=k+1;
        aff(i);
      end;
    if v=1 then exit;
```

```
if (v>1) and (v<maxv) then
  begin
    for i:=1 to k-1 do visited[pathv[i]]:=0;
    visited[v]:=1;
    for i:= 1 to maxv do pathv[i]:=0;
    for i:=1 to maxv-1 do pathe[i]:=0;
    k:=1;
    v:=1;
    aff(1);
  end;
if v=maxv then
  begin
    for i:=1 to k-1 do pathe[i]:=graph[pathv[i],pathv[i+1]];
    Cmin:=pathe[1];
    for i:=1 to k-1 do if Cmin>pathe[i] then Cmin:=pathe[i];
    if Cmin=0 then exit;
    Fmax:=Fmax+Cmin;
    for i:=1 to k-1 do
      begin
        graph[pathv[i],pathv[i+1]]:=graph[pathv[i],pathv[i+1]]-Cmin;
        graph[pathv[i+1],pathv[i]]:=graph[pathv[i+1],pathv[i]]+Cmin;
      end;
    writeln;
    write('Відвідані вершини: ');
    for i:=1 to k do write(pathv[i],' ');
    writeln('Максимальний потік в даному шляху - ',Cmin);
    for i:=1 to maxv do
      begin
        graph[i,1]:=0;
        graph[maxv,i]:=0;
      end;
    writeln('Модифікований граф');
    for i:=1 to maxv do
      begin
        for j:=1 to maxv do write(graph[i,j], ' ');
        writeln;
      end;
    for i:=1 to maxv-1 do pathe[i]:=0;
```

```
      for i:=1 to maxv do pathv[i]:=0;
      k:=1;
      for i:=1 to maxv do visited[i]:=0;
      aff(1);
    end;
  end;
  procedure vvod;
    var i,j:integer;
    begin
      for i:=1 to maxv do for j:=1 to maxv do graph[i,j]:=0;
      for i:=1 to maxv-1 do
      for j:=2 to maxv do
      if i<>j then
        begin
          write('Введіть пропускну здатність дуги, 0 - якщо дуги немає
          (',i,',',j,') = ');
          readln(graph[i,j]);
        end;
      writeln('Початковий граф');
      for i:=1 to maxv do
        begin
          for j:=1 to maxv do write(graph[i,j], ' ');
          writeln;
        end;
    end;
  begin
    clrscr;
    k:=1;
    vvod;
    aff(1);
    writeln;
    writeln('Максимальний потік в мережі - ',Fmax);
    readln();
    end.
```

Висновки

В представленій роботі розглядався алгоритмом Форда-Фалкерсона та його використання на практиці. На основі цього алгоритму було складено програму пошуку максимального потоку в мережі. Отримані результати дослідження, зокрема розроблену програму можна використовувати для вивчення теорії алгоритмів, побудови програм з використанням рекурсії, також можна застосовувати програми для розрахунку максимального потоку в мережах. Робота буде корисна студентам при вивченні дискретної математики, або інформатики.

Література

1. *Вирт Н.* Алгоритмы и структуры данных. — М.: Мир, 1989. — 360 с.
2. *Касьянов В. Н., Евстигнеев В. А.* Графы в программировании: обработка, визуализация и применение. — СПб.: БХВ-Петербург, 2003. — 1104 с.
3. *Кормен Т., Лейзерсон Ч., Ривест Р.* Алгоритмы: Построение и анализ. — М.: МЦНМО, 2001. — 960 с.
4. *Редькин Н.П.* Дискретная математика. / Учебное пособие. — СПБ.: Лань, 2003. — 96 с.
5. *Форд Л.Р., Фалкерсон Д.Р.* Потоки в сетях. / Пер. с англ.. — М.: Мир, 1966. — 277 с.

Stepkin Andrey V., Plastun Dmytro A.
Donbas State Teachers' Training University, Slovians'k, Ukraine.

Ford–Fulkerson algorithm

Realization of Ford-Fulkerson method for finding maximum flow in transportational network by means of Pascal programming language is considered in the work. Depth-first search method, which is realized in Pascal programming language by a recursion is used for implementation of Ford-Fulkerson method.

Keywords: *recursion, depth-first search method, Ford-Fulkerson method.*

УДК 004.451.9

Кайдан Н.В., Панюхно В.Д.

[1] *кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри алгебри, ДВНЗ «ДДПУ»*

[2] *студентка 4 курсу фізико-математичного факультету, ДВНЗ «ДДПУ»*

e-mail: kaydannv@gmail.com, viktoriia.paniukhno@mail.ru

АНАЛІЗ СУЧАСНИХ ОПЕРАЦІЙНИХ СИСТЕМ НА ПРИКЛАДІ ОСТАННІХ ВЕРСІЙ WINDOWS ТА LINUX.

У статті висвітлено функціонування та ефективність найновіших на даний час операційних систем, а саме останніх версій Windows та Linux. Розглянуто доцільність використання операційних систем Linux Mint 17.2 «Rafaela» Cinnamon та Windows 10, вказано переваги та недоліки кожної.

Ключові слова: *операційна система, Windows, Linux.*

Вступ

В сучасному суспільстві однією з найбільш актуальних проблем є ефективне використання інформаційних технологій. Це зумовлено швидким розвитком інформаційних технологій, що характеризується зміною технічних засобів, методів та сфер їх застосування. Використання комп'ютерної техніки в усіх сферах життя суспільства призводить до висновку, що культура спілкування з обчислювальною технікою стає одним із основних елементів загальної культури людини. В свою чергу знання та уміння працювати з операційною системою є обов'язковим елементом спілкування з комп'ютером, що забезпечує успішність користування сучасною комп'ютерною технікою.[5]

Метою статті є дослідження та порівняння характеристик операційних систем Linux Mint 17.2 «Rafaela» Cinnamon та Windows 10.

Різні аспекти роботи операційних систем Linux та Windows досліджували Н. Петрели «Windows и Linux: что безопаснее?», S. Quandt «Linux and Windows security compared». Зокрема безпосередньо порівнювали у своїх роботах дані операційні системи М. Демидов «Меняем Windows на Linux», І. Сухов «Что лучше, Linux или Windows?»

© Кайдан Н.В., Панюхно В.Д., 2016

Основна частина.

Сучасна операційна система являє собою складний комплекс програмних засобів, що забезпечують користувача не тільки стандартизованою системою введення-виведення інформації та системою управління, але й спрощує роботу з комп'ютером. В нашій роботі ми розглянемо та порівняємо характеристики найбільш популярних на сьогодні версій операційних систем Linux та Windows – *Linux Mint 17.2 «Rafaela» Cinnamon* та *Windows 10.*

Доступність

Linux Mint 17.2 «Rafaela» Cinnamon – практично безкоштовна система. Ліцензія дозволяє не тільки копіювати і поширювати soft, а й надаються вихідні тексти.

Розробники *Windows 10* наголошують, що остання версія абсолютно безкоштовна, але ж щоб обновити свій комп'ютер до Windows 10 необхідно спочатку встановити найновіші версії Windows 7 або Windows 8 (ціна в Україні приблизно 3788 грн.).

Системні вимоги

Linux Mint 17.2 «Rafaela» Cinnamon:

- DVD-привод или USB-порт;
- Оперативна пам'ять: 512MB (рекомендується 1GB);
- Дисковий простір: 9GB (рекомендується 20GB);
- Екран: 800×600.

Windows 10:

- Процесор або система на чипі з мінімальною тактовою частотою 1 ГГц;
- Оперативна пам'ять: 1 ГБ (для 32-розрядної версії) або 2 ГБ (для 64-розрядної версії);
- Дисковий простір: 16 ГБ (для 32-розрядної версії) або 20 ГБ (для 64-розрядної версії);
- Екран: 800×600.

Інсталяція ОС

Установка *Linux Mint 17.2 «Rafaela» Cinnamon* не викликає великої складності. Її можна встановити, як повністю замінивши будь-яку версію Windows, так і паралельно з Windows. Також Linux Mint 17.2 «Rafaela» Cinnamon дуже просто встановити на USB-накопичувач або переносний жорсткий диск. [1]

Оновитись до *Windows 10* можна безпосередньо з головного сайту Microsoft, але при умові попередньо встановленої на комп'ютер останньої версії Windows 7 або Windows 8. Крім того, жодна версія Windows не передбачає установку на USB-накопичувач або переносний жорсткий диск.

Безпека

Для *Linux Mint 17.2 «Rafaela» Cinnamon* практично не існує вірусів. До того ж завжди можна обмежитися установкою програм із Software center, де вони перевірені і стовідсотково «чисті».

Користуючись *Windows 10* можна підхопити велику кількість вірусів, тому треба багато уваги приділяти наявності та ефективності антивірусних програм.[4]

Графічна оболонка

В *Linux Mint 17.2 «Rafaela» Cinnamon* діє графічна оболонка Cinnamon, яка заснована на середовищі GNOME. Вона активно розвивається розробниками Linux Mint. Підтримує тайлінг вікон (чого немає в Windows) та віртуальні робочі столи. Тайлінг вікон – ґрунтується на ідеї, що і консольна утиліта screen або двохпанельні тайлові менеджери – розщеплюванні екрану на ряд незалежних областей, в кожній з яких локалізується вікно із запущеним у ньому додатку. У Cinnamon можливості тайлінга більш ширші, вікна можна розміщувати, як на півекрану, так і на чверть. [2]

Графічна оболонка *Windows 10* - це щось середнє між графічною оболонкою Windows 7 і Windows 8. Нарешті були реалізовані у Windows 10 віртуальні робочі столи (в Linux вони з'явились вже давно). Завдяки цій функції розробники повноцінно використовують всі можливості багатоядерних процесорів та захищають нас від так званих «зависань». Якщо якась програма показала помилку, а Windows перестав відповідати на запити – просто переключіться на інший робочий стіл спеціальною кнопкою, яка знаходиться біля кнопки «Пуск». У Windows 10 повернули славнозвісне меню «Пуск», якого так не вистачало практично всім, хто щойно встановив собі Windows 8 після багаторічного користування Windows 7. Тепер воно в собі об'єднує, окрім стандартних функцій, які були в нього у Windows 7, ще й деякі функції із Windows 8.

Універсальність

Linux Mint 17.2 «Rafaela» Cinnamon призначена лише для ПК.

Windows 10 встановлюється на більш ширший спектр пристроїв, на відміну від попередніх версій цієї ОС. У число цих пристроїв входять не тільки ПК, ноутбуки, планшети, але й смартфони та телевізори.

Наведемо ще деякі відмінності між *Linux Mint 17.2 «Rafaela» Cinnamon* та *Windows 10*:

Linux Mint 17.2 «Rafaela» Cinnamon пристойно працює одразу після установки. У *Windows 10* також одразу, автоматично, встановлюються абсолютно всі драйвера для ПК (порівняно із попередніми версіями).

Windows 10 потребує значну кількість ресурсів, порівняно з *Linux Mint 17.2 «Rafaela» Cinnamon*, що є менш вимогливою до ресурсів вашого ПК.

Для прихильників комп'ютерних іграшок, безумовно, більш бажано використання *Windows 10*. Стандартні ігри Windows 10 вражають різноманітністю, на відміну від *Linux Mint 17.2 «Rafaela» Cinnamon*.

Дуже яскрава та незвичайна відмінність – це поява у *Windows 10* таких функцій як Cortana та Windows Hello.

Windows Hello – це більш персоналізований спосіб входу до ваших пристроїв із Windows 10 за допомогою одного погляду або дотику. Пристрої Surface Pro 4, Surface Book і більшість комп'ютерів із сканерами відбитків пальців уже готові до використання Windows Hello, а незабаром буде випущено інші пристрої, які зможуть розпізнавати ваше обличчя та райдужну оболонку. У розділі Windows Hello відображатимуться параметри розпізнавання обличчя, відбитків пальців або райдужної оболонки, якщо комп'ютер оснащений сканером відбитків пальців або камерою, яка підтримує цю функцію. Після налаштування функції ви зможете увійти за допомогою швидкого проведення пальцем або погляду.

Cortana – це особистий помічник на ПК. Спочатку було запропоновано користувачам Windows Phone а тепер і Windows 10. І це не просто особистий помічник. У довгостроковій перспективі це можливість створити першу контекстну операційну систему, яка знає вас так добре, що може спрогнозувати вашу поведінку і допомогти виконати потрібні завдання. Вивчаючи ваші уподобання, Cortana надає корисні рекомендації, швидкий доступ до інформації і важливі нагадування.

Найбільш унікальний аспект Cortana – особистість. Так у вашого помічника буде голос реальної особистості. У нього буде свій характер і поведінка, які ретельно пропрацьовано. Cortana розумна, впевнена в собі і вірна - і саме ці якості виявляються при спілкуванні голосом, у друкованих фразах і в манері поведінки анімованого помічника. З урахуванням цього був створений реальний сценарій взаємодії, озвучений професійною актрисою. Він включає тисячі відповідей на різні питання, і завдяки їх варіабельності, Cortana сприймається як звичайна людина, а не просто робот з запрограмованими відповідями. Cortana зараз доступна у Windows 10 лише в США, Сполученому Королівстві, Китаї, Франції, Італії, Німеччині та Іспанії. Але розробники прогнозують її появу і в Україні. [3]

В *Linux Mint 17.2 «Rafaela» Cinnamon* таких функцій немає і в найближчий час не передбачається.

Висновки

Для визначення ефективності використання користувачем сучасних операційних систем було порівняно Linux Mint 17.2 «Rafaela» Cinnamon та Windows 10. У процесі порівняння було визначено, що Windows 10 – більш сподобається людям, яким потрібен мультимедійний центр (музика, кіно, інтернет, ігри) і тим, кому цікаві сучасні технології.

Linux Mint 17.2 «Rafaela» Cinnamon, - найкращий варіант для навчання та серверів. Професіонали (програмісти, хакери, системні адміністратори) люблять цю систему за високу гнучкість і надійність.

Таким чином, у кожної з представлених систем є як свої сильні, так і слабкі сторони, і на питання, що вибрати: Linux Mint 17.2 «Rafaela» Cinnamon чи Windows 10, однозначної відповіді немає і бути не може – все визначається потребами конкретної людини. Ці системи дуже різні і підходять під різні потреби.

Література

1. *Водолазкий В.* Путь к Linux /В. Водолазкий, А. Колядов. — М.: «Нолидж», 2001. — 560 с. — (2).
2. *Курячий Г. В.* Операционная система Linux. Курс лекций /Г.В.Курячий, К.А.Маслинский. — ДМК Пресс, 2016. — 348 с. — (2).
3. *Леонтьев В.* Windows 10. Новейший самоучитель /В. Леонтьев. — М.: «Эксмо», 2015. — 528 с.
4. *Петрели Н.* Windows и Linux: что безопаснее? [Електронний ресурс] / Николас Петрели // Информационный бюллетень Jet Info, 2005. — Режим доступу: http://citforum.ru/security/articles/win_lin/.
5. *Танненбаум Э.* Современные операционные системы / Э. Танненбаум. — СПб.: Питер, 2010. — 1120 с. — (3).

Kaydan Nataliya V., Paniukhno Viktoriya D.

Donbas State Teachers' Training University, Slovians'k, Ukraine.

Analysis on current operating systems based on recent versions of Windows and Linux.

In the article the functioning and efficiency of the latest currently operating systems, such as the latest versions of Windows and Linux is reported. The feasibility of using operating systems Linux Mint 17.2 «Rafaela» Cinnamon and Windows 10 is considered, the advantages and disadvantages of each are stated.

Keywords: *operating systems, Windows, Linux*

УДК 378.14+004

Федоренко О.Г., Величко К.В.

[1] *асистент кафедри алгебри, ДВНЗ «ДДПУ»*

[2] *студентка 3 курсу фізико-математичного факультету, ДВНЗ «ДДПУ»*

e-mail: bestbest@ukr.net

ВИКОРИСТАННЯ ХМАРНИХ ТЕХНОЛОГІЙ В ФОРМУВАННІ САМООСВІТНЬОЇ КОМПЕТЕНТНОСТІ МАЙБУТНІХ УЧИТЕЛІВ

Сучасний вчитель відповідно до концепції інформаційного суспільства повинен володіти самоосвітньою компетентністю, яка дозволяє бути фахівцем протягом всієї професійної діяльності. Формування самоосвітньої компетентні є складний і багатогранний процес який необхідно упорядкувати та прискорити шляхом застосування хмарних технологій.

Ключові слова: *самоосвітня компетентність, хмарні технології*

Вступ

Інформатизація суспільства безпосередньо впливає й на інформатизацію освіти, успішність якої визначається багатьма чинниками, одним з яких є готовність суб'єктів освітньої діяльності до використання інформаційно-комунікаційних технологій (ІКТ). Інформаційні технології, як одна з найдинамічних галузей людської діяльності сьогодення потребує постійного оновлення знань та набуття нових через появу нових технологій. Останнє можливе тільки при наявності сформованої самоосвітньої компетентності, яка, в свою чергу, повинна бути тісно пов'язана з широким використанням інформаційно-комунікаційних технологій.

Сучасні інформаційні технології спираються, в більшості випадків, на використання комп'ютерних мережевих технологій, зокрема набули популярності хмарні технології через низку своїх переваг як то: постійна доступність, уніфікований інтерфейс, відкриті формати файлів, невимогливість до клієнтської частини. Ці переваги виявились корисними при використанні хмарних технологій в освітній діяльності, а отже, й в електронному навчанні. Тим не менш, залишається проблема методичного наповнення механізмів використання хмарних технологій в самоосвітній діяльності майбутніх учителів, розгляд різних аспектів формування самоосвітньої компетентності засобами ІКТ та проблема взаємодії хмарних технологій і класичних освітніх технологій в змішаній формі навчання.

© Федоренко О.Г., Величко К.В., 2016

Проблема інформатизації освіти в сучасних дослідженнях представлена досить широко, але основи інформатизації освіти були закладені в працях В. Бикова, Б. Гершунського, А. Єршова, М. Жалдака, В. Ізвозчикова, Ч. Кларка, К. Коліна, М. Лапчика, Ю. Машбиця, В. Монахова, І. Підласого, Є. Полат, Ю. Рамського, І. Роберт, Г. Селевка, О. Спіріна, Н. Тализіної та ін. Питанням теорії використання хмарних технологій в освітній діяльності займались такі вчені, як В. Биков, Н. Морзе, З. Сейдаметова, С. Семеріков, О. Спірін, М. Шишкіна, R. Griffith та ін. Питання формування самоосвітньої компетентності розглядали А. Громцева, Г. Коджаспірова, І. Лернер, І. Наумченко, Б. Райський, М. Скаткін, Г. Сухобська та ін. Однак, залишається не вивченою проблема використання хмарних технологій в організації та проведенні самоосвітньої діяльності майбутніх учителів.

Метою дослідження є вивчення можливостей застосування хмарних технологій в самоосвітній діяльності майбутніх учителів.

Основна частина

Хмарні технології — це технології обробки даних, в яких комп'ютерні ресурси надаються Інтернет-користувачеві як онлайн-сервіс. Слово «хмара» в даному випадку присутня як метафора, що уособлює складну інфраструктуру, яка приховує за собою всі технічні деталі. Згідно документації IEEE (Institute of Electrical and Electronics Engineer), хмарні технології — це «парадигма, яка постійно зберігає для користувача інформацію на інтернет-серверах і лише тимчасово кешується на стороні користувача». Це можуть бути не тільки стаціонарні комп'ютерні системи, а й ноутбуки, планшети, смартфони і т.ін.

З.Сейдаметова, Е. Аблялимова та ін. до переваг використання хмарних технологій в освітній діяльності відносять [2, с. 84]:

- мінімальні вимоги до апаратного забезпечення;
- відсутнє спеціальне програмне забезпечення;
- реалізація на всіх без винятку платформах;
- можливість використання мобільних пристроїв;
- зменшення витрат на апаратне та програмне забезпечення

З появою хмарних технологій змінюється й напрямок інформатизації освіти. Так, наприклад, В. Биков зазначає, що з появою хмарних технологій повинно набути відповідного розвитку законодавчо-правове та нормативно-інструктивне забезпечення інформатизації освіти і науки, необхідно виконати наукові дослідження, результати яких утворять необхідний психолого-педагогічний фундамент сучасного етапу інформатизації освіти на засадах

концепції хмарних технологій [1]. Такий напрямок подальшої інформатизації освіти пов'язаний також зі зміною пріоритетів підготовки майбутніх учителів. Через постійне оновлення технологій неможливо підготувати фахівця який має лише знання, необхідно підготувати фахівця який має вміння вчитись, що, в свою чергу, є прямим наслідком самоосвітньої компетентності.

З точки зору часової локалізації самоосвіта здійснюється в робочий і вільний час; за спрямованістю виділяється професійна та загальнорозвиваюча самоосвіта; за цільовим критерієм самоосвітня діяльність може бути орієнтована на професійне та загальнокультурне зростання. Змістовним критерієм класифікації самоосвітньої діяльності можуть бути мотиви, інтереси, потреби, ціннісні орієнтації, установки, позиції тощо.

Прогнозуючи перехід від знання про самоосвітню діяльність до вмінь самоосвітньої діяльності можна говорити про самоосвітню компетентність. Формування самоосвітньої компетентності є складним і багатогранним процесом який визначається структурою самоосвітньої компетенції [3]:

- мотиваційно-ціннісний;
- організаційний;
- процесуально-інформаційний;
- контрольно-рефлексивний.

Формування кожного з компонентів самоосвітньої компетентності передбачає певний набір методів його формування. Отже, говорячи про мотиваційно-ціннісний компонент, в рамках нашого дослідження, слід говорити про широке та виправдане використання хмарних технологій в поєднанні з традиційними методами навчання. Використання хмарних технологій в аудиторному навчанні стимулює майбутніх учителів до активного його використання й в самоосвітній діяльності, а якісне використання хмарних технологій – до створення певного рівня цінностей якісних електронних освітніх ресурсів.

Організаційний компонент самоосвітньої діяльності може бути сформованим не тільки чіткістю та однозначністю результатів роботи інформаційно-комунікаційних технологій, а й спеціальними додатками організації та планування робочого, в нашому випадку, навчального часу.

Процесуально-інформаційний компонент від самого початку побудований на інформаційно-комунікаційних технологіях, як створених людством засобах прискорення й спрощення інформаційної діяльності, та хмарних технологіях як уніфікованих засобах сучасних інформаційних технологій. А отже, прямим наслідком їх використання є сформований процесуально-інформаційний компонент.

Контрольно-рефлексивний компонент самоосвітньої компетентності слід формувати через хмарні технології он-лайн тестування, розробки підсумкових робіт, аналізу отриманих даних.

Оскільки, в кожному з компонентів самоосвітньої компетентності не тільки можна, а навіть необхідно використовувати інформаційно-комунікаційні технології, то можна говорити про інформатизацію самоосвітньої діяльності майбутніх учителів.

Суть інформатизації самоосвітньої діяльності майбутніх учителів слід визначити як створення повноцінних умов для вільного доступу до великих об'ємів актуальної інформації в базах даних, базах знань, електронних архівах, довідниках, енциклопедіях тощо; організацію самоосвітньої діяльності та контролю якості засобами інформаційно-комунікаційних технологій. У відповідності до обраних завдань інформатизації самоосвітньої діяльності можна навести хмарні технології, які можуть бути використані на означених етапах (Табл.1).

Етапи самоосвітньої діяльності	Використання хмарних технологій
пошук та накопичення інформаційного матеріалу	пошукові системи, тематичні групи, фахові сайти, форуми, блоги, файлові сховища, відеосховища, бази даних та знань
опрацювання та засвоєння навчальної інформації	хмарні офісні додатки, хмарні лабораторії та тренажери, хмарні обчислювальні ресурси
поточний та граничний контроль засвоєння нових знань, умінь та навичок, виконання підсумкових робіт	системи он-лайн тестування, хмарні офісні додатки

Табл. 1: Можливість використання хмарних технологій в самоосвітній діяльності

Висновки

Розглянувши взаємозв'язок формування самоосвітньої компетентності з використанням інформаційно-комунікаційних технологій, приходимо висновку, що зважене використання хмарних технологій дозволяє не тільки отримати інструмент самоосвітньої діяльності майбутніх учителів, а й сформувати самоосвітню компетентність майбутніх учителів, що в свою чергу є одним з основних умінь сучасного вчителя.

Література

1. *Биков В.Ю.* Технології хмарних обчислень–провідні інформаційні технології подальшого розвитку інформатизації системи освіти України / В. Ю. Биков // Комп'ютер у школі та сім'ї. — 2011. — № 6. — С. 3–11.
2. *Сейдаметова З.С.* Облачные технологии в образовании / З. С. Сейдаметова, Э. И. Аблялимова, Л. М. Меджитова, С. Н. Сейтвелиева, В. А. Темненко. — Симферополь : «ДИАЙПИ», 2012. — 204 с.
3. *Федоренко О.Г.* Сутність і структура самоосвітньої компетентності майбутнього вчителя технологій / О.Г. Федоренко // Вісник Харківської державної академії культури : зб. наук. пр. — Вип. 43 / [відп. ред. В. М. Шейко]. — Х. : ХДАК, 2014. — С. 276–281.

Fedorenko Olena G., Velychko Kristina V.
Donbas State Teachers' Training University, Slovians'k, Ukraine.

The use of cloud technology in formation the self-educational competence of future teachers

The modern teacher under the concept of the information society must have self-educational competence that allows you to be an expert throughout the profession. Formation of competent self-education is a complex and multifaceted process that needs to streamline and accelerate with cloud technology.

Keywords: *self-educational competence, cloud technology.*

УДК 373.018.43:004

Глазова В.В., Жидкова О.Б.

[1] *кандидат педагогічних наук, доцент кафедри геометрії та МВМ, ДВНЗ «ДДПУ»*

[2] *студентка 5 курсу фізико-математичного факультету, ДВНЗ «ДДПУ»*

e-mail: veraglazova@ukr.net, lelya.zhidkova.94@gmail.com

ЗАСТОСУВАННЯ ДИСТАНЦІЙНИХ ОСВІТНІХ ТЕХНОЛОГІЙ ПІД ЧАС ВИВЧЕННЯ ІНФОРМАТИКИ В ШКОЛІ

У статті розглянуто інноваційні педагогічні проблеми дистанційного навчання, зокрема введення елементів дистанційного навчання в освітній процес загальноосвітніх навчальних закладів. Проаналізовано систему дистанційного навчання MOODLE й можливість її застосування під час вивчення інформатики в школі.

Ключові слова: *дистанційне навчання, загальноосвітній навчальний заклад, інформатика.*

Вступ

Дистанційне навчання впевнено впроваджується в освітній процес шкіл та вищих навчальних закладів. Такі можливості надають сучасні телекомунікаційні технології і, зокрема, мережа Інтернет. Дистанційне навчання, що базується на використанні нових інформаційних технологій і засобів навчання, стає актуальним, тому що може найбільш гнучко й адекватно реагувати на потреби суспільства і є високотехнологічною формою отримання якісної освіти незалежно від місця проживання, часу й громадянства.

У сучасному світі спілкування все частіше набуває віртуального змісту, учні стрімко використовують мобільні пристрої, електронну пошту, чати, форуми з метою комунікації й спілкування. Важливим завданням вважається підготовка учнів за короткий період набувати, перетворювати, сприймати й застосовувати в житті величезну кількість інформації. Одним із варіантів розв'язання цієї проблеми є застосування дистанційних освітніх технологій для реалізації навчання інформатики.

Останнім часом з'явилася низка робіт, присвячених дистанційному навчанню, що розглядають різні його аспекти. Вивченню проблем організації та реалізації дистанційного навчання значну увагу приділяли вітчизняні та

© Глазова В.В., Жидкова О.Б., 2016

зарубіжні вчені А. Андрєєв, В. Биков, Ю. Богачков, Д. Іванченко, В. Кухаренко, Н. Морзе, П. Стефаненко А. Хуторський та ін. Методичним та дидактичним проблемам і перспективам використання сучасних інформаційно-комунікаційних технологій у навчальному процесі з інформатики присвячені роботи Ю. Горошко, Л. Грамбовскої, М. Жалдака, Т. Крамаренко, В. Монахова, С. Ракова, Ю. Рамського, Ю. Триуса, С. Шокалюк та ін.

Метою статті є розкриття можливостей застосування дистанційних освітніх технологій під час вивчення інформатики в школі.

Основна частина

Через різні підходи до осмислення визначення «дистанційне навчання» науковці наводять велику кількість його визначень. Згідно одного з них, дистанційне навчання означає форму організації й реалізації освітнього процесу, за якою його учасники здійснюють навчальну взаємодію переважно екстериторіально (тобто, на відстані, яка не дозволяє й не передбачає безпосередню навчальну взаємодію учасників віч-на-віч, інакше, коли учасники територіально знаходяться поза межами можливої безпосередньої навчальної взаємодії й коли в процесі навчання їх особиста присутність у певних приміщеннях навчального закладу не є обов'язковою) [5, с. 9].

Дистанційна форма навчання успішно впроваджується у вишах, під час професійної підготовки та підвищення кваліфікації кадрів, під час самоосвіти. У загальноосвітніх навчальних закладах дистанційна форма навчання явище нове та її впровадження є необхідною умовою для досягнення сучасного рівня якості освіти. Дистанційне навчання в Україні регулюється «Положенням про дистанційне навчання» [4].

Під час застосування дистанційних освітніх технологій педагогічна взаємодія, технологія викладання, організація процесу навчання набувають значних змін.

Існують дві основні моделі дистанційного навчання учнів, які створені на основі комп'ютерних мережевих технологій:

— відсутність безпосереднього спілкування учня з учителем;
— передбачає безпосередню взаємодію вчителя й учнів.

Перша може бути використана в загальноосвітніх навчальних закладах, наприклад, під час карантину або під час інших не передбачуваних ситуаціях [2, с. 45].

Для впровадження дистанційного навчання школярів необхідно, щоб були розв'язані такі проблеми:

— необхідно, щоб учні мали належну комп'ютерну підготовку, в учня повинен бути домашній комп'ютер з виходом в Інтернет;
— для організації дистанційного навчання необхідна спеціальна програмно-апаратна платформа (середовище навчання);
— підготовка педагогічних кадрів, які будуть здатні створювати навчальні ресурси й кваліфіковано супроводжувати процес дистанційного навчання (підготовка тьюторів) [3, с. 37].

Основним елементом організації навчання з використанням інформаційно-комунікаційних технологій є дистанційний курс. Під дистанційним курсом розуміють комплекс навчально-методичних матеріалів та освітніх послуг, створених у віртуальному навчальному середовищі для організації дистанційного навчання на основі інформаційних і комунікаційних технологій для реалізації моделі дистанційного навчання [5]. Кожен курс повинен мати якісне інформаційне наповнення, структуру навчально-методичних матеріалів, логіку вивчення навчального курсу, чіткий графік виконання учнями навчального плану, критерії, засоби й системи контролю та оцінювання, налагоджену систему взаємодії учня й тьютора.

Здійснення дистанційного навчання інформатики може відбуватися у вигляді послідовностей технологічних циклів: підготовчого, навчального, підсумкового.

Під час підготовчого циклу учні отримують можливість попереднього вивчення і опанування знаннями в предметній галузі згідно з логікою традиційного навчального курсу, проектують особисті траєкторії освоєння навчального змісту. Навчальний цикл відображає структуру навчального предмету «Інформатика» та передбачає обов'язковий зв'язок учителя й учнів, засвоєння учнями змісту предмету, реалізовує контроль та діагностику з метою корекції подальшої траєкторії навчання. Підсумковий цикл націлений на перевірку досягнутого рівня засвоєння предмету.

Існує велика кількість систем дистанційного навчання, які уможливлюють створення дистанційних курсів для отримання освіти. До найбільш поширених систем дистанційного навчання можна віднести наступні: MOODLE, Lotus Learning, мережева освітня платформа e-University, Веб-клас тощо.

Ми зупинили свій вибір на системі управління навчанням MOODLE [1]. Ця система відноситься до класу вільно поширюваного програмного забезпечення, є безкоштовною, змінюється відповідно до потреб школи та інтегрується з іншими продуктами. Завдяки своїм функціональним можливостям система набула великої популярності й успішно конкурує з комерційними системами управління навчанням. Система управління навчанням MOODLE

дозволяє реалізувати освітнє середовище, що містить всі ті модулі, наявність яких у складі середовища вважаємо обов'язковим, а саме: освітній модуль, модуль організації та управління процесом навчання, модуль комунікації, модуль контролю результатів навчання й модуль управління освітніми ресурсами та технічною підтримки.

Система підтримки дистанційного навчання MOODLE є зручним програмним засобом для створення й підтримки навчального процесу в умовах дистанційного або змішаного навчання та надає користувачам такі можливості:

1. Через мережу учень отримує навчальні матеріали, для цього використовуються такі елементи: Ресурс, Урок, Глосарій, Семінар та ін.
2. Забезпечення і підтримка можливості взаємного спілкування як між учнями і вчителем, так і між учнями, які беруть участь у курсі. Використовується e-mail, форум, завдання та ін.
3. Документування й збереження роботи, результатів дискусій, заданих питань та отриманих відповідей.
4. Надання інструментів, які можуть здійснювати поточний контроль та оцінювати досягнення окремих учасників і доставку зворотних даних кожної теми, зокрема оцінки й відгуки на їх роботи. Для цього використовують Форум, Завдання, Журнал, Оцінки, Звіти тощо.
5. Уможливлює аналіз участі та активності окремих учасників курсу, аналіз часу, який учень витратив на роботу з навчальними матеріалами; оцінку труднощів, які виникли в учасника або групи під час вивчення тієї чи тієї теми навчального курсу; швидка реакція на проблеми, які виникли, наприклад, при пересиланні додаткових матеріалів.

На базі системи дистанційного навчання MOODLE був розроблений курс для учнів 10 класу «Комп'ютерні презентації та публікації».

Розробка предметного середовища складалася з наступних етапів: концептуалізації, формалізації, реалізації та тестування.

Зміст етапів адаптовано й уточнено з урахуванням того, що предметне середовище створюється за допомогою системи управління навчанням, яка дозволяє максимально реалізувати освітні цілі, використовувати готові цифрові ресурси, які легко впроваджуються в неї та значно скорочують час підготовки навчального контенту.

Для спілкування з учнями були використані елементи – «Чат», «Форум»; для отримання теоретичної інформації – «Глосарій», «Урок», «Файл», «Сторінка»; для контролю знань учнів – «Завдання», «Тест» та інші (рис. 1).

Рис. 1: Приклад дистанційного курсу в системі MOODLE.

При інтерактивному стилі спілкування та оперативному зв'язку в дистанційному навчанні відкривається можливість індивідуалізувати процес. Фактор часу стає обов'язковим, учень може вибрати свій темп вивчення матеріалу, працювати за індивідуальною освітньою програмою. У навчанні інформатики ця проблема займає особливе місце, що пояснюється специфікою цього навчального предмета. Необхідна така організація навчального процесу, яка дозволила б враховувати відмінності між учнями, їхні індивідуальні здібності та створювати оптимальні умови для ефективної навчальної діяльності всіх школярів.

На кожному уроці передбачено традиційні види діяльності (наприклад, пояснення нової теми, аналіз виконаних робіт), але із залученням елементів дистанційного навчання, самостійна (або групова) робота учнів (тестування, практична робота) здійснюється дистанційно. Всі інші види занять (домашні роботи, проекти, олімпіади та ін.) можуть бути реалізовані дистанційно як повністю, так і частково. Запропонований курс адаптується для різних груп школярів. Частка дистанційних і традиційних форм навчання може варіюватися в залежності від рівня самостійності учнів і їх мотивації до використання інформаційно-комунікаційних технологій під час навчання. Уміння працювати з дистанційним курсом допоможе учням самостійно готуватися до уроку, отримувати додаткову інформацію з предмету, організовувати самостійну роботу, удосконалювати навички роботи з інформацією, розвивати ІКТ-компетентність.

Для того щоб школярі почали активно використовувати можливості дистанційної форми навчання, необхідна адаптація цієї системи в загальноосвітній школі. При впровадженні дистанційної форми навчання треба враховувати такі проблеми, як психологічна непідготовленість учнів до роботи, що вимагає підвищеної уваги, чіткості виконання окремих дій і операцій, самостійного прийняття рішень. Дистанційне навчання вимагає від школярів точного дотримання інструкцій до завдань, організації їх індивідуальної або спільної з однокласниками діяльності. Тому найбільш оптимальний шлях впровадження дистанційної форми навчання в школі лежить через поетапний перехід від класно-урочної системи з використанням традиційних методів навчання до системи, в якій поєднуються елементи класно-урочної системи та елементи дистанційного навчанням. Ця система може бути реалізована в моделі інтеграції традиційної та дистанційної форм навчання.

Висновок

Введення елементів дистанційного навчання інформатики є актуальним завданням. Вирішення цього завдання уможливить самостійне вивчення учнями питань, які їх цікавлять у межах навчальної й позакласної діяльності з інформатики. Крім того, дистанційна форма навчання навчає школярів раціонально витрачати свій час, знаходити необхідну інформацію не тільки в бібліотеці навчального закладу, а й в наукових, культурних та інформаційних центрах. Система управління навчанням MOODLE дозволяє створювати курси, що забезпечують розвиток творчого мислення за рахунок включення завдань проектної та дослідницької діяльності, розвиток комунікативних навичок на основі виконання спільних мережевих проектів. Слід зазначити, що ефективне застосування дистанційної форми навчання інформатики в школі можливо тільки в тому випадку, коли відповідні технології не є надбудовою до існуючої системи навчання, а обґрунтовано й гармонійно інтегруються в навчальний процес, забезпечуючи нові можливості як вчителям, так і учням.

Література

1. Moodle – Official Site. — Режим доступу : www.moodle.org.
2. Організація середовища дистанційного навчання в середніх загальноосвітніх навчальних закладах : посіб. / [Богачков Ю. М., Биков В.Ю., Пінчук О. П. та ін.] ; наук. ред. Ю. М. Богачков. — К.: Педагогічна думка, 2012. — 160 с.
3. *Пасіхов Ю. Я.* Ресурс організації дистанційного навчання в загальноосвітніх навчальних закладах / Ю. Я. Пасіхов // Комп'ютер у школі та сім'ї. — 2011. — №2. — С. 37–39.

4. Положення про дистанційне навчання. Режим доступу : http://zakon2.rada.gov.ua/laws/show/z0703-13.
5. Технологія створення дистанційного курсу : [навч. посіб.] / За ред. В. Ю. Бикова та В. М. Кухаренко. — К. : Міленіум, 2008. — 324 с.

Hlazova Vira V., Zhydkova O. B.
Donbas State Teachers' Training University, Slovians'k, Ukraine.

Application of distance educational technologies while studying informatics at school

The article examines innovative pedagogical problems of distance education, including the introduction of elements of distance learning in the educational process of secondary schools. The system of distance learning MOODLE and the possibility of its application in the study of science in school is analyzed.

Keywords: *distance learning, school, informatics.*

УДК 378.016:51:37.018.43

Глазова В.В., Денисенко Н.О.

[1] *кандидат педагогічних наук, доцент кафедри геометрії та МВМ, ДВНЗ «ДДПУ»*

[2] *студентка 5 курсу фізико-математичного факультету, ДВНЗ «ДДПУ»*

e-mail: veraglazova@ukr.net, slavyanochka2015@gmail.com

ШЛЯХИ ВДОСКОНАЛЕННЯ ПІДГОТОВКИ МАЙБУТНЬОГО ВЧИТЕЛЯ МАТЕМАТИКИ ДО ДИСТАНЦІЙНОГО НАВЧАЛЬНОГО ПРОЦЕСУ

Статтю присвячено питанням, пов'язаним з підготовкою майбутніх учителів математики в умовах інформатизації освіти. Визначено специфічні особливості організації процесу професійної підготовки вчителів математики до дистанційного навчального процесу. Висунуто низку рекомендацій щодо підготовки здобувачів до реалізації дистанційного навчання.

Ключові слова: *дистанційне навчання, майбутній учитель математики, професійна підготовка.*

Вступ

Глобальна інформатизація, постійний розвиток інформаційно-комунікаційних технологій накладають відбиток на всі сфери людської діяльності, зокрема на систему освіти. Випускник школи чи вишу повинен відповідати вимогам, які пред'являє йому сучасне суспільство. Упровадження в освітній процесі новітніх інформаційно-комунікаційних технологій гостро ставить проблему переходу до нових моделей підготовки кваліфікованих педагогів. Одним з напрямків формування сучасного освітнього простору є розвиток і вдосконалення системи дистанційного навчання на всіх щаблях освіти, яке в останні роки набуває все більшого поширення. У зв'язку зі зростанням ролі та значущості дистанційних освітніх технологій підвищено актуальність завдань формувати в майбутніх учителів математики компетентності в цій галузі для досягнення якісних освітніх результатів. Учитель має бути підготовлений до розв'язання основних видів професійних завдань і вміти формувати інформаційно-освітнє середовище для забезпечення якості освіти.

© Глазова В.В., Денисенко Н.О., 2016

Проблемам професійної підготовки вчителя математики присвячено праці І. Акуленко, В. Бевз, Г. Бевза, М. Бурди, С. Гончаренка, О. Дубинчук, О. Скафи, З. Слєпкань, Н. Тарасенкової, О. Чашечнікової, В. Швеця та інших науковців. Питання упровадження інформаційно-комунікаційних технологій у навчання математики розглянуто в наукових доробках Є. Вінниченка, Ю. Горошка, Ю. Дорошенко, Т. Дубової, М. Жалдака, Ю. Жука, В. Клочка, Т. Крамаренко, Н. Морзе, С. Ракова, Ю. Рамського, С. Семерікова, О. Скафи, О. Співаковського, Ю. Триуса та ін. Науково-педагогічні засади дистанційного навчання досліджували О. Андрєєв, В. Биков, Д. Іванченко, В. Кухаренко, Є. Полат, П. Стефаненко, А. Хуторський та ін.

Метою статті є дослідження педагогічної проблеми підготовки майбутніх учителів математики до дистанційного навчального процесу.

Основна частина

Реалізація дистанційного навчання неможлива без наявності підготовлених до роботи з технологіями дистанційного навчання педагогів. Для розв'язання завдань освіти в умовах її інформатизації необхідно сформувати в учителя математики готовність до реалізації дистанційного навчання предмету, яка найближчим часом стане одним з елементів цілісної готовності педагога до професійної діяльності в умовах інформатизації суспільства й освіти.

Перш за все, необхідно оновлення змісту підготовки вчителя математики в контексті використання інформаційних технологій за такими напрямками:

— використання мультимедіа в процесі навчання (презентації, демонстрації, динамічні візуалізації, відеолекції, комп'ютерна підтримка окремих модулів і тем та ін);

— розробка й використання в процесі навчання електронних освітніх ресурсів (електронних підручників, хрестоматій та ін.);

— розробка й використання в процесі навчання спеціалізованих пакетів і програм (TeX, Maple, MathCAD, GeoGebra та ін.);

— створення й використання електронних бібліотек, медіатек з необхідними навчальними ресурсами із забезпеченням вільного доступу для всіх учасників освітнього процесу;

— використання систем комп'ютерної діагностики якостей та здібностей учнів.

У підготовці майбутніх вчителів математики до дистанційного навчання повинна бути систематичність. Вона може бути забезпечена впровадженням у навчальні програми підготовки здобувачів вищої освіти у педагогічних вишах таких етапів: реалізація системи спеціалізованих курсів у варіативній частині навчального плану, організація навчальної та науково-дослідної діяльності студентів з використанням дистанційного навчання, активна самостійна робота студентів із використанням дистанційних освітніх технологій, заохочення та залучення студентів до створення освітніх ресурсів безпосередньо на сайті дистанційного навчання університету [2].

Для підготовки вчителя до реалізації дистанційного навчання було розроблено дистанційний курс «Дистанційне навчання в сучасних навчальних закладах», одним із розділів якого є дистанційне навчання математичних дисциплін та його специфіка.

Під дистанційним навчанням математики розуміємо процес передачі й засвоєння математичних знань, організації діяльності з їх засвоєння, а також перетворення їх у надбання індивіда в умовах спеціально створеного технологічного інформаційно-освітнього середовища, за допомогою якого здійснюється взаємодія між учителем й учнями. А одним з визначальних чинників у реалізації дистанційного навчання математики є інформаційно-освітнє середовище дистанційного навчання [3].

Для дистанційної підтримки курсу використано вільно поширювану з відкритим кодом систему дистанційного навчання MOODLE [1].

За результатами вивчення дисципліни в здобувачів повинні бути сформовані такі компетентності:

— здатність до проведення аналізу стану, визначення потреб й оцінювання можливості інформатизації закладу освіти;

— здатність до розробки та організації проведення дистанційного навчання в навчальному заклад;

— здатність добирати інтерактивні методи та форми навчання;

— готовність здійснювати методичний супровід навчального процесу онлайн;

— готовність контролювати отримані знання (різного типу інтерактивні тести, тренажери і лабораторні практикуми, домашні завдання та ін.);

— готовність вільно використовувати та створювати інформаційні ресурси в системі дистанційного навчання, користуватися сервісами й ресурсами курсів у системі дистанційного навчання.

Висновок

Вищезазначені напрямки діяльності можуть бути використані при підготовці майбутнього вчителя математики для нової школи інформаційного суспільства. Їх реалізація під час підготовки вчителя уможливить досягнення бажаного результату — формування здатності й готовності випускника до раціонального й доцільного використання дистанційних та інформаційних технологій у професійній діяльності та продуктивній взаємодії з сучасним учнями.

Література

1. Moodle — Official Site. Режим доступу : www.moodle.org.
2. *Глазова В. В.* Етапи формування готовності майбутнього вчителя математики до дистанційного навчального процесу / В. В. Глазова // Гуманізація навчально-виховного процесу: зб. наук. праць / [За заг. ред. проф. В. І. Сипченка]. Вип. LXXIII. — Слов'янськ : ДДПУ, 2015. — С. 11–17.
3. *Снегурова В. И.* Методическая система дистанционного обучения математике учащихся общеобразовательных школ : автореф. дис. на соискание научн. степени докт. пед. наук : 13.00.02 / В. И. Снегурова. — Санкт-Петербург, 2010. — 46 с.

Hlazova Vira V., Denysenko N. O.

Donbas State Teachers' Training University, Slovians'k, Ukraine.

Ways to improve the preparation of future teacher of mathematics for distance learning process

The article is devoted to issues related to the preparation of future teachers of mathematics in the conditions of informatization of education. Specific features of the process of training teachers of mathematics to the distance learning process are defined. The ways to prepare candidates for the implementation of distance learning are advanced.

Keywords: *distance learning, professional training, future teacher of mathematics.*

МЕТОДИКА ВИКЛАДАННЯ МАТЕМАТИКИ В ЗОШ ТА ВНЗ

УДК 37.016:514.11

Плахотник М.В.

[1] *кандидат фізико-математичних наук, науковий дослідник (пост-док) Інституту математики та статистики університету Сан-Пауло, м. Сан-Пауло, Бразилія*

e-mail: makar_plakhotnyk@ukr.net

ПРО ДОЦІЛЬНІСТЬ ВИВЧЕННЯ ТЕОРЕМИ ФАЛЕСА У ШКІЛЬНОМУ КУРСІ ГЕОМЕТРІЇ

Ми звертаємо увагу на те, що належне використання методу координат дозволить набагато спростити розуміння як природності, так і деталей доведення важливих тверджень, для яких при діючому підході використовується теорема Фалеса – теореми Піфагора, введення тригонометричних функцій гострого кута та доведення ознак подібності трикутників.

Ключові слова: *теорема Піфагора, теорема Фалеса, метод координат, подібність трикутників*

Вступ

При роботі зі школярами в різних формах, враховуючи викладання в школі, керування шкільними та позашкільними гуртками математичного спрямування, читання лекцій в літніх школах ми звернули увагу на досить неприємне явище – учні, котрі закінчили 8-й клас, не усвідомлюють важливості теореми Фалеса як такої, що без перебільшення можна назвати ключовою теоремою курсу геометрії 8-го класу. Так, з "наслідку з теореми Фалеса" в діючих підручниках геометрії виводять:

1. Ознаки подібності трикутників;
2. Можливість введення тригонометричних функцій гострого кута;
3. Теорему Піфагора.

Будь-який з перерахованих трьох пунктів гідний того, щоб учень оцінив теорему Фалеса як дуже важливу. Втім, за нашими спостереженнями учні, котрі закінчили 8-й клас, цю теорему навіть не згадують у відповідь на прохання назвати 5 найважливіших фактів з геометрії, котрі вони вивчили у 8-му класі. Теорема Фалеса, за нашими спостереженнями, губиться, на думку учнів, між властивостями паралелограма та ромба, теоремою Піфагора, властивостями дотичних та хорд, тощо.

© Плахотник М.В., 2016

При цьому доведення теореми Фалеса в сучасних підручниках є або завідомо неповним, або одним з найскладніших серед тверджень, котрі доводяться в курсі геометрії. Наявні в підручниках доведення явно чи неявно використовують граничний перехід та щільність множини додатних раціональних чисел в множині дійсних додатних чисел, але при цьому не надають належних означень і, відповідно, не наводять строгих викладок, що, зрештою, навряд чи доцільно робити, орієнтуючись на учнів 8-х класів середньої школи.

Як викладачам геометрії, так і школярам, котрі геометрію лише починають вивчати, відомо, що поняття теорем та аксіом як структурних елементів курсу геометрії походить з праці "Початки геометрії" давньогрецького математика Евкліда. Серед досягнень більш пізніх геометрів, порівняльних за своєю значущістю з роботою Евкліда, варто виділити:

– працю Рене Декарта, де він запропонував координатний метод;

– неевклідову геометрію відкриту Лобачевським, Больяї, Гаусом і розвинуту більш пізніми математиками, та

– розвиток Уільямом Гамільтоном в першій половині 19-го століття методів використання векторів при розв'язанні геометричних задач.

Розуміння неевклідової геометрії потребує від учнів нетривіального абстрактного мислення і або не згадується в шкільних курсах геометрії (що природно), або згадується лише на рівні зауваження, що неевклідова геометрія може бути побудована. Водночас, як векторний метод, так і метод координат так чи інакше відображений у всіх шкільних курсах геометрії.

Ми переконані в тому, що усвідомлення математиками - авторами підручників існування неевклідової геометрії схилило їх такого викладу матеріалу, щоб не використовувати в якості очевидних ті твердження, котрі рівносильні 5-му постулату Еквліда (аксіомі паралельних).

Радянський математик Андрій Миколайович Колмогоров писав в [12], що метод координат повинен використовуватися лише як допоміжний - так, щоб виклад геометрії не ставав від використання цього методу менш "геометричним". Наводячи огляд сучасних (та, зрештою, і радянських) підручників геометрії ми покажемо, що всі вони відповідають наведеному побажанню А. Колмогорова.

Ми покажемо, що теорему Фалеса набагато природніше доводити з використанням методу координат і, взагалі, використовувати цей метод не "як допоміжний" і не як "засіб ілюстрації геометричних міркувань", а саме як метод доведення геометричних тверджень, доведення яких без використання методу координат стає суттєво складнішим.

Ми пропонуємо переглянути шкільну програму з геометрії таким чином, щоб важливі теореми, такі як теорема Піфагора, теорема про графік лінійної функції, подібність трикутників вивчалися як такі, що є простими і природними. Щоб простота і природність доведення відповідних тверджень слугувала легкому розумінню матеріалу учнями, а не ставала заручником структури підручника, невдало вибраної його автором.

Ми покажемо, що теорему Піфагора можна довести такими способами, що їх може легко зрозуміти середній учень як 7-го, так і 6-го класу звичайної школи. Використовуючи теорему Піфагора, можна довести, що графік рівняння $y = ax$, де a – деяка стала, є прямою. Використовуючи рівняння прямої, легко як довести ознаки подібності прямокутних трикутників, так і ввести тригонометричні функції гострих кутів. Лише після цього, використовуючи введені тригонометричні функції, варто доводити ознаки подібності трикутників "загального вигляду".

Мотивація

Альберт Ейнштейн [8, с. 134] з приводу вивчення геометрії писав:

У віці 12 років я пережив одне диво: його джерелом була книжечка з евклідової геометрії на площині, котра потрапила мені до рук на початку навчального року. Там були твердження, наприклад, про перетин трьох висот трикутника в одній точці, які хоч і не були самі по собі очевидними, але могли бути доведені з впевненістю, що відкидала будь-які сумніви. Ця ясність і впевненість справили на мене велике враження. Мене не турбувало те, що аксіоми повинні бути прийняті без доведення. Взагалі, мені було цілком достатньо, якщо я міг в своїх доказах спиратися на такі положення, котрі здавалися мені безспірними. Я пам'ятаю, наприклад, що теорему Піфагора мені довів мій дядько ще до того, як ця книжечка потрапила мені до рук. Великих зусиль мені вартувало "довести" цю теорему з допомогою подібних трикутників; при цьому мені здавалося "очевидним", що відношення сторін прямокутного трикутника повинно визначатися одним з його гострих кутів. Взагалі мені здавалося, що доводити потрібно лише те, що не "очевидно" саме в такому сенсі.

Звісно, наведена цитата при уважному її прочитанні викликає ряд неоднозначних питань. Не ясно, яким саме чином доводилася теорема Піфагора "з допомогою подібних трикутників", якщо Ейнштейну подібність прямокутних трикутників з однаковими кутами була очевидною, але при цьому довести

теорему "вартувало великих зусиль". Водночас, сама ідея всесвітньо відомого фізика про необхідність доведення лише тих тверджень, які не очевидні учневі, має бути, на нашу думку, якщо не прийнята беззаперечно, то, принаймні взята до уваги як така, що природна за своїм походженням.

В середині 1960-х років в Радянському Союзі відбувалася, говорячи сучасною мовою, модернізація шкільної системи математичної освіти, якою керував А.М. Колмогоров. В статті [12] він висловив таку програмну засаду побудови геометрії в старших класах: "Курс геометрії в старших класах будується на основі векторних уявлень (рос. - «векторных представлений»). При цьому є природним і звернення до координатного методу, однак в якості допоміжного, так, що виклад від цього не стає менш геометричним".

В 1960-х роках мала місце відображена в цитаті А. Колмогорова переконаність, що векторна побудова геометрії за Вейлем є більш простою за традиційну побудову геометрії [6]. Тому суть реформи, котрою займався Колмогоров, багато в чому зводилася до питання про використання векторів в шкільному курсі геометрії, в першу чергу – стереометрії.

На початку 1980-х років були написані підручники планіметрії О.Д. Александровим. В підручнику [1], написаному за його мотивами, теорема Піфагора доводиться з використанням площ прямокутних трикутників, шляхом вписування прямокутного трикутника в квадрат, сторони якого дорівнюють сумі довжин катетів трикутника. Так само, за допомогою площі трикутника вводиться поняття тригонометричних функцій гострого кута.

Обгрунтування коректності введення тригонометричних функцій у найпоширеніших в Україні підручниках з геометрії вводиться з допомогою узагальненої теореми Фалеса. Тому наведемо доведення коректності тригонометричних функцій за [1, с. 95].

Розглянемо прямокутний трикутник ABC (див. рис. 1) та візьмемо довільну точку M на катеті AC. Виразимо двома способами площу трикутника ABM. З одного боку, $S = \frac{1}{2}ma$, де $a = BC$ та $m = AM$. З іншого маємо, що $S = \frac{1}{2}ch$, де $h = MD$ – висота трикутника ABM, c – довжина гіпотенузи первісного прямокутного трикутника. Прирівнявши дві різні формули для площі трикутника ABM отримуємо рівність

$$\frac{a}{c} = \frac{h}{m}.$$

Водночас, ні рівняння прямої, ні, навіть метод координат, не вводиться і не використовується при доведенні головних теорем планіметрії.

Цікаво, що в підручнику [1] взагалі відсутній розділ, присвячений подібності трикутників. Це підтверджує думку про те, що детальне вивчення

подібності трикутників потрібне авторам діючих шкільних підручників лише з однією метою – введення тригонометричних функцій. Якщо тригонометричні функції ввести без використання подібності, то це поняття саме по собі не представляє інтересу.

Огляд шкільних підручників

Наведемо огляд шкільних підручників, протягом якого вивчимо такі питання:

1. Чи доводить автор підручника (і якими засобами) узагальнену теорему Фалеса (теорему «Про пропорційні відрізки» – про те, що якщо сторони кута перетнути паралельними прямими, то відрізки на сторонах кута виявляться пропорційними).

2. Яким чином (з використанням узагальненої теореми Фалеса чи ні) автор підручника вводить тригонометричні функції гострого кута.

3. Яким чином (з використанням узагальненої теореми Фалеса чи ні) автор підручника доводить ознаки подібності трикутників.

4. Яким чином (чи використовує подібність трикутників або теорему Фалеса і чи використовує поняття площі трикутника) автор підручника доводить теорему Піфагора.

5. Яким чином (на скільки формально і аксіоматизовано) автор підручника вводить поняття площі «взагалі», площі прямокутника та площі трикутника.

6. Яким чином в підручнику алгебри доводиться той факт, що графік рівняння $y = ax$ для фіксованого a є прямою.

Огляд шкільних підручників геометрії для 8-го класу

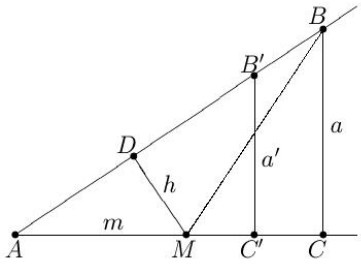
Відповіді на описані питання щодо підручника [15] авторів А.Г. Мерзляк, В.Б. Пололонський, М.С. Якір виглядають так. Спершу автор доводить теорему Фалеса (стор. 99). Відразу після неї (стор. 100) дуже акуратно доводить теорему «Про пропорційні відрізки», фактично користуючись граничним переходом, тобто спершу доводить теорему для випадку, коли відношення відрізків є раціональним числом, а потім – у загальному вигляді, правда не використовує явно поняття ірраціонального числа та граничного переходу.

Аналогічним є виклад цими ж авторами питань, котрі нас цікавлять, в їх підручнику [16]. Так само, як і в [15], наведено ідею доведення, котре використовує граничний перехід. Відмінність між викладом в підручнику для загальноосвітніх шкіл зводиться лише до того, що доведення узагальненої теореми Фалеса обмежується випадком, коли відношення відрізків є цілим числом і пропонується розглянути “на математичному гуртку” повне доведе-

ння теореми (стор. 78).

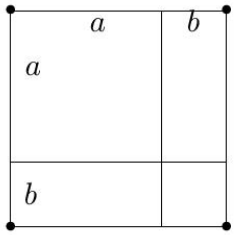
Ознаки подібності трикутників введено з використанням доведеної теореми про пропорційні відрізки. Теорема Піфагора доводиться з використанням подібності трикутників – того, що частини прямокутного трикутника, які утворюються при проведенні його висоти, подібні «великому» прямокутному трикутнику.

Поняття площі в підручнику [15] вводиться аксіоматично (стор. 173) як число, котре ставлять у відповідність кожному многокутнику. Площа многокутника – це додатна величина, яка має перераховані в підручнику властивості (рівні многокутники мають рівні площі, вона адитивна та площа квадрату зі стороною 1 дорівнює 1). Після цього вводиться поняття числове значення площі як результат порівняння того, у скільки разів площа даного многокутника відрізняється від площі одиничного квадрату. Формули для площі квадрату (зі стороною, відмінною від 1) та площі прямокутнику перетворюються в теореми та доводяться з використанням, фактично, граничного переходу.



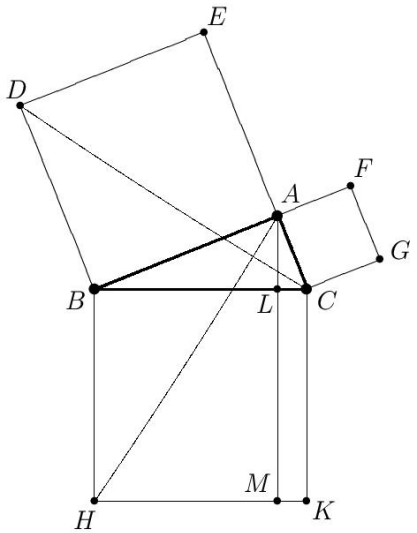
До обгрунтування коректності тригонометричних функцій за Александровим

Рис. 1:



До доведення формули площі прямокутника

Рис. 2:



До доведення теореми Піфагора “за Евклідом”

Рис. 3:

В підручнику [5] авторів М.І. Бурда та Н.А. Тарасенкова, узагальнена теорема Фалеса не доводиться (стор. 88), точніше наводиться схема доведення, котра використовує граничний перехід, і ця схема віднесена до рубрики “Дізнайся більше”, тобто знання доведення від учнів фактично не вимагається. Ознаки подібності трикутників (стор. 96-97) автор доводить з використання теореми про пропорційні відрізки. Доведення теореми Піфагора (стор.

164) автор робить шляхом проведення з прямого кута висоти прямокутного трикутника та використанням подібності утворених трикутників. Дивно те, що відразу після доведення теореми Піфагора автор згадує те, що первинно ця теорема була сформульована як рівність суми площ двох квадратів площі третього квадрату та згадує про словосполучення "піфагорові штани" як ілюстрацію доведення теореми Піфагора, втім не наводить доведення цієї теореми з використанням площі. Щодо площі, то спершу постулюється (з припискою "з попередніх класів відомо"), що площа квадрата зі стороною a дорівнює a^2. Після цього доводиться теорема про площу прямокутника з використанням креслення, зображеного на малюнку 2 – прямокутник зі сторонами a та b добудовується до квадрату зі сторонами $a+b$, після цього виходить, що площа прямокутника може бути виражена формулою $S = \frac{(a+b)^2-a^2-b^2}{2}$.

В підручнику [2] автора Г.В. Апостолова, узагальнена теорема Фалеса доводиться, використовуючи граничний перехід – сторони кута, перетнутого паралельними прямими, щільно розбиваються великою кількістю паралельних прямих, а потім з аналізу цієї конструкції робляться потрібні висновки. Ознаки подібності трикутників в [2] вводяться з допомогою узагальненої теореми Фалеса (стор. 120). Теорема Піфагора доводиться з допомогою подібності трикутників (стор. 139). Тригонометричні функції гострих кутів вводяться з допомогою подібності трикутників (стор. 161).

В означенні площі фігури в підручнику [2] площа – це число, котре ставиться у відповідність кожній обмеженій фігурі та має властивості (невід'ємна, адитивна, площа квадрату зі стороною 1 дорівнює 1). Написано, що "можна довести", що площа квадрату зі стороною a дорівнює a^2 (стор. 47). Теорема про площу прямокутника доводиться, використовуючи граничний перехід – спершу доводиться формула для квадрата з натуральними сторонами, потім – з раціональними, а потім – з ірраціональними.

В підручнику [3] авторів Г.П. Бевз, В.Г. Бевз, Н.Г. Владімірова, узагальнена теорема Фалеса доводиться лише для випадку, коли відношення відрізків на сторонах кута раціональне число (стор. 73). Далі написано, що "загальніше доведення можна здійснити лише методами вищої математики". Подібність трикутників вводиться з допомогою узагальненої теореми Фалеса (стор. 80). Цікаво, що подібність прямокутних трикутників в [3] виділено в окремий параграф, але цей параграф іде після вивчення подібності трикутників в загальному випадку, а тому, фактично, параграф присвячений вивченню часткового випадку – підготовці до доведення теореми Піфагора через подібність трикутників, що далі (стор. 177) і робиться. Після доведе-

ння теореми Піфагора в підрозділі "для допитливих" (стор. 118) наводиться її доведення з використанням площі – те, яке ми для прикладу наведемо в цій статті. Тригонометричні функції гострих кутів вводяться з допомогою подібності прямокутних трикутників (стор. 190). Площа в підручнику [3] вводиться через площу одиничного квадрату та формула для площі прямокутника доводиться з використанням граничного переходу.

В підручнику [9] авторів А.П. Єршова, В.В. Голобородько, О.Ф. Крижановський та С.В. Єршов, як узагальнена теорема Фалеса, так і площа прямокутника доводиться в "додатках" (стор. 235-238), причому цікаво, що обидві теореми, котрі нас цікавлять, доводяться в одному додатку. Всього додатків два і другий з них – відомості про Золотий переріз. Подібні трикутники вивчаються з допомогою узагальненої теореми Фалеса (стор. 111). В підручнику [9] наявний окремий розділ, присвячений подібності прямокутних трикутників, в якому доводяться "метричні співвідношення в прямокутному трикутнику", котрі стосуються відрізків трикутника, утворених після проведення висоти з прямого кута. Ці властивості є наслідком теорем про подібність трикутників "загального вигляду". Виходячи з цих "метричних співвідношень" доводиться теорема Піфагора (стор. 128). Тригонометричні функції гострих кутів вводяться в останньому розділі підручника, використовуючи подібність трикутників.

В підручнику [9] площа вводиться практично без пояснень (не рахуючи додаток). Спершу дається формула для площі прямокутника, а потім — лише як наслідок з неї, формула для площі квадрата (стор. 166).

Підручник [17] автора О.В. Погорєлов виглядає як прототип всіх підручників з геометрії, розглянутих нами в цьому розділі. Зрештою, це і не дивно, адже, навідміну від авторів розглянутих підручників, Олексій Погорєлов — видатний харківський математик, чиї досягнення в геометрії були визнані на найвищому рівні в той час, коли він почав займатися шкільним підручником геометрії.

Для прикладу, підручник [11] автора А.П. Кисельов, за своєю структурою суттєво відрізняється від підручника за редакцією О.В. Погорєлова, втім, так само метод координат не використовується в ньому для доведення важливих теорем. Більше того – в розділі під назвою "Застосування алгебри до розв'язання геометричних задач" розглядаються побудови з циркулем і лінійкою та використання подібності трикутників чи інших методів для того, щоб будувати відрізки, чиї довжини задані формулами через довжини даних відрізків, заданих на малюнку безпосередньо (тобто побудови вигляду $\frac{ab}{c}$, $\sqrt{ab}, \sqrt{a^2 \pm b^2}$).

Першим нетривіальним розділом підручника [11] є подібність трикутників. Цей розділ починається з леми про те, що трикутник, котрий відсікається від трикутника прямою, паралельною до його сторони, подібний до вихідного. Така теорема є у підручниках [2, 3, 5, 9, 16], Втім там вона доводиться з допомогою наслідку з теореми Фалеса, котра, в свою чергу, доводиться з допомогою або граничного переходу, або чиє доведення не є повним. Ця Лема в підручнику [11] доводиться шляхом розбиття трикутника на велику кількість "маленьких" трикутників, проведенням багатьох прямих, паралельних "основі" та одній з "бокових сторін" трикутника.

Тригонометричні функції гострого кута вводяться в [11], використовуючи подібність трикутників і розділ, присвячений введенню тригонометричних функцій, є останнім в главі, присвяченій подібним фігурам.

Теорема про формулу площі прямокутника доводиться (стор. 97-100) з використанням, фактично, граничного переходу та означення площі через площу одиничного квадрату.

Теорема Піфагора доводиться в підручнику [11] двічі. Один раз – відразу після введення подібності трикутників (стор. 44-45) і доводиться приблизно так, як в [2, 3, 5, 9, 16]. Втім, після введення поняття площі, зокрема, площі трикутника, теорема Піфагора доводиться вдруге (стор. 106-107) – з допомогою площ і методом, названим "Доведення Евкліда", оскільки саме в такий спосіб теорема Піфагора доводиться в першій книзі його Начал [7, стор. 58] (книга 1, твердження 47). Наведемо це доведення.

Нехай маємо довільний трикутник ABC з прямим кутом A. Розглянемо квадрати $BDEA$, $AFGC$ та $BCKH$, побудовані як на малюнку 3. Проведемо пряму AM перпендикулярну до BC. Тоді квадрат $BCKH$ поділиться на два прямокутники. Доведемо, що площа прямокутника $BLMH$ та квадрату $BDEA$ збігаються, а площа прямокутника $LCKM$ дорівнює площі квадрату $AFGC$.

Проведемо допоміжні відрізки DC та AH. Розглянемо трикутники DCB та ABH. Площа трикутника DCB дорівнює половині площі квадрату $BDEA$, оскільки площу цього трикутника можна записати як півдобуток відрізка BD (як основи трикутника) та AB (як висоти трикутника, проведеної до основи BD). Аналогічно, площа трикутника DCB дорівнює половині площі прямокутника $BLMH$.

З іншого боку, трикутники ABH та BDC рівні, оскільки $BD = DA$ та $BC = BH$ і $\angle DBC = \angle BDC$, оскільки кожен з цих кутів отримується додаванням прямого кута до кута $\angle CBA$. Таким чином, з рівності зазначених трикутників та міркувань про їх площу маємо, що площа квадрата $BDEA$

дорівнює площі прямокутника $BLMH$.

Рівність площ квадрату $AFGC$ та прямокутника $LCKM$ доводиться аналогічно.

Огляд шкільних підручників алгебри для 7-го класу

Наведемо огляд останнього - шостого з поставлених нами питань з приводу підручників, котрі зараз використовуються в навчальному процесі в Україні – про те, яким чином в підручнику алгебри доводиться той факт, що графік рівняння $y = ax$ для фіксованого a є прямою.

Розмаїття підходів в підручниках алгебри, які нам довелося опрацювати, набагато вужча, ніж підручників геометрії для 8-го класу.

Так, в усіх чотирьох підручниках [4, 10, 13, 14] є розділ, присвячений функціям, підрозділ, присвячений графікам функцій та, після нього – розділ, що стосується лінійних функцій та їх графіків. Означення лінійної функції майже дослівно однакове і виглядає приблизно так : Функцію, яку можна задати формулою виду $y = kx + b$, де k і b — деякі числа, а x — незалежна змінна, називають лінійною.

В підручнику [14] колективу авторів А.Г. Мерзляк, Б.В. Полонський та М.С. Якір, на стор. 179 написано: “у старших класах ви доведете, що графік лінійної функції, область визначення якої – всі дійсні числа, є пряма”. Після цього, фактично на прикладах, показано, як нахил прямої, що є графіком функції вигляду $y = ax$, залежить від a.

В підручнику [10] написано (стор. 145): “У старших класах ви переконаєтеся, що графіком лінійної функції є пряма”.

У підручнику [4] авторів Бевз Г.П. та Бевз В.Г. відразу після означення лінійної функції накреслено графіки двох лінійних функцій і написано, що ці приклади можна узагальнити, сформулювавши правило: “Графік кожної лінійної функції – пряма. І кожна пряма на координатній площині, не перпендикулярна до осі абсцис, – графік деякої лінійної функції”.

В підручнику [13] авторів В. Кравчук та Г. Янченко твердження про те, що графік лінійної функції є прямою, не формулюється явним чином в жодній формі – розглядається деяка кількість прикладів, на кожному з яких будується пряма. Потім вводиться поняття кутового коефіцієнту прямої (лінійної функції), окремим випадком розглядається функція $y = kx$ та без доведення “отримується” залежність чвертей координатної площини, в яких знаходиться графік, від знаку k (стор. 147).

Теорема Піфагора

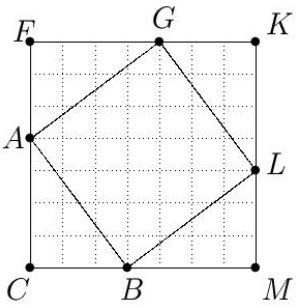
Як ми бачили, доведення теореми Піфагора з допомогою площ трикутників відоме з часів давньої Греції і один з варіантів доведення наведено навіть в “Началах” Евкліда. По-при те, що в багатьох сучасних підручниках геометрії поняття площі вводиться складно, і навіть формула площі квадрата на думку деяких авторів потребує, фактично, використання граничного переходу. Втім, навіть в підручниках, виданих в 20-му столітті (наприкл. [1, 3, 11]), можна знайти доведення теореми Піфагора з допомогою площі трикутників.

Таким чином, можливість доведення теореми Піфагора з використанням поняття площі, чи відмова від цього доведення – справа традиції та уподобань конкретних авторів підручників, а зовсім не справа припустимості такого доведення самого по собі.

Наведемо один з варіантів доведення теореми Піфагора, котре використовує поняття площі прямокутника трикутника і взяте з [3, стор. 118]. Цей спосіб доведення теореми Піфагора кращий за метод доведення, поданий в Началах Евкліда.

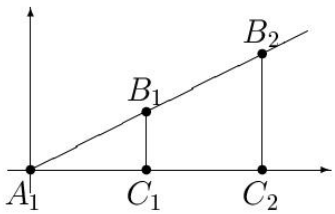
Розглянемо прямокутний трикутник ABC з прямим кутом C (див. рис. 4). На променях CA та CB відкладемо точки F та M так, щоб відрізки CF та CM дорівнювали сумі катетів трикутника ABC.

Розглянемо квадрат $CFKM$, та на його сторонах візьмемо точки G та L так, щоб $FG = KL = AB$. Тоді утворені чотири трикутники будуть рівними, а чотирикутник $AGLB$ буде квадратом.



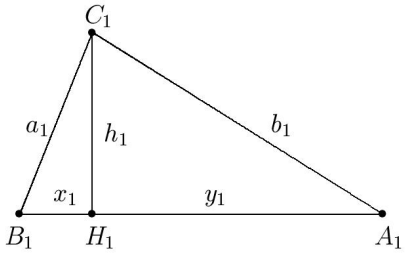
До доведення теореми Піфагора “через площі”

Рис. 4:



До введення тригонометричних функцій

Рис. 5:



До обгрунтування подібності трикутників

Рис. 6:

Теорему Піфагора отримаємо, якщо віднімемо від площі “великого” квадрата площі чотирьох прямокутних трикутників.

Легко бачити, що наведене доведення теореми Піфагора набагато простіше за те, що є в “Началах” Евкліда. Це, найімовірніше, пояснюється тим, що

давні Греки не вважали коректними операції з довжинами відрізків так, як це робимо ми, сучасні європейці, користуючись не лише Грецькою традицією, але і традицією середньовічних арабів, розвинутою пізніше Франсуа Вієтом на його послідовниками.

Поняття площі

По-при те, що доведення теореми Піфагора відоме ще з "Начал" Евкліда, уявлення про математичну строгість суттєво змінилися після відкриття диференціального числення та, головне – пізніше, після відкриття геометрії Лобачевського.

Ця зміна уявлень про математичну строгість полягає в тому, що деякі з тверджень, котрі вважалися очевидними для Евкліда, в 20-му – 21-му століттях вже вважаються такими, що потребують або обгрунтування, або аксіоматизації, або зауваження на зразок того, що "це твердження ми не будемо доводити, а воно буде доведено в більш старших класах, на гуртках, і т.д.". Тобто в будь-якому разі, навіть в разі, коли автор підручника в 20-21 столітті формулює деяке очевидне для давнього грека (Евкліда) твердження, він повинен робити зауваження про неочевидність цього твердження, а потім "викручуватися" на власний розсуд.

Для доведення теореми Піфагора нам потрібне не стільки поняття площі многокутника, як поняття про площу прямокутного трикутника. З формули для площі прямокутного трикутника легко можна отримати формулу для площі непрямокутного трикутника як півдобуток сторони на висоту, проведену до неї. В такому разі, для трикутника зі сторонами a, b, c та проведеними до них висотами h_a, h_b, h_c маємо рівності

$$ah_a = bh_b = ch_c.$$

Фактично, наявність поняття площі дозволяє зробити висновок, що перераховані рівності відношення відрізків правильні, оскільки кожне з них відношень дорівнює подвоєній площі трикутника.

Якщо стати на позицію, що відсилання до поняття площі при доведенні таких рівностей є неприпустимим, тобто "не переконливим", то це означає, що дещо, стосовне поняття площі, має бути доведеним. Цим "дечим" може бути лише формула для площі прямокутника як така, якою обгрунтовується формула для площі трикутника.

Якщо акцентувати увагу на потребі доводити формулу для площі прямокутника, то пропонуємо взяти за аксіому те, що площа квадрата за стороною 1 дорівнює 1, після чого довести, що площа квадрата зі стороною a дорівнює a^2. Після цього довести формулу для площі прямокутника так, як це

зроблено в підручнику [5] (див вище мал.2). Звісно, ми вважаємо недоцільним доведення з використанням граничного переходу формули для площі прямокутника після того, як граничний перехід вже було використано для доведення формули для площі квадрата.

Додатково зауважимо, що доведення площі прямокутника як таке, потреба якого виникає з нетривіальних формул, що мають бути правильні для будь-якого трикутника, може бути ілюстрацією геометричних міркувань, коли, на перший погляд, неочевидний факт (з рівностями добутків відрізків у трикутнику) доводиться простими міркуваннями як наслідок очевидних припущень (про те, що поняття площі може бути використане в математиці і про те, що площа квадрату дорівнює квадрату його сторони).

Рівняння прямої

За існуючими програмами з математики, з рівнянням прямої, так само як з прямокутною системою координат, учні знайомляться в 7-му класі – в той рік, коли починають вивчати геометрію, котра, в свою чергу починається з аксіоматики, яка в кінцевому рахунку, походить від Евкліда. Питання про те, чому множина точок декартової площини, які задовольняють рівняння $y = ax$, де $a = const$ є прямою не доводиться взагалі – на момент вивчення цього рівняння учні ще не готові розуміти доведення геометричних фактів та усвідомлювати доведеність, чи недоведеність конкретної, фактично, теореми.

Питання про те, чому графіком конкретного рівняння, наприклад, $y = 3x$ є пряма, більшість авторів українських підручників не доводять, а "пояснюють". При цьому "пояснення" виглядає приблизно так (див. огляд підручників 7 класу з алгебри, поданий вище): розглянемо точку з координатами $(0,\ 0)$. Вона належить графіку. Розглянемо, наприклад, точки з координатами $(1,\ 3)$, $(2,\ 6)$, $(-1,\ -3)$, $(-2,\ -6)$. Всі вони є точками шуканого графіку. Нанесемо ці точки на координатну площину, прикладемо лінійку та побачимо, що всі вони лежать на одній прямій. Так от, якщо взяти точку з координатами $(x,\ 3x)$ для довільного іншого числа, то вона опиниться на цій саме прямій.

Можливо, не всі вчителі усвідомлюють, що той факт, що графік функції $y = 3x$ є прямою – це теорема, і її потрібно не "пояснювати", а або оголошувати аксіомою (що доволі дивно), або формально доводити, або, принаймні самому собі пояснювати, чому цей факт не доводиться. Втім, те, що вказаний факт є саме теоремою, сподіваємося, добре розуміють автори підручників з алгебри та геометрії, рекомендованих в різні роки міністерством освіти (в різних варіантах його назви) для використання в навчальному процесі. Тому в підручниках геометрії в перші два роки (7-8 класи) вивчення геометрії ме-

тод координат не використовується, а в 9-му класі цьому методу присвячено рівно один параграф, після чого до нього автори не повертаються.

Для доведення того, що зазначений графік дійсно є прямою, потрібно формалізувати поняття прямої – зробити те, чого не робиться в діючих підручниках геометрії. Нам буде достатньо такого означення.

Різні точки A, B та C **лежать на прямій**, якщо виконується одна з трьох рівностей:

1. $AB + BC = AC$;
2. $AC + BC = AB$;
3. $BA + AC = BC$.

Після цього **пряма** – це нескінченна в обидва боки фігура без розривів, кожні три точки якої є такими, що лежать на одній прямій. Звісно, словосполучення "без розривів" в цьому "означенні" приховує в собі граничний перехід (бо якщо будемо за двома точками будувати середини відрізів та нові "краї" за кінцем відрізку і його серединою, то отримаємо лише зліченну, хоч і щільну, множину точок прямої). Втім, цей граничний перехід набагато зрозуміліший школярам, ніж доведення узагальненої теореми Фалеса в тих підручниках, де ця теорема строго доводиться.

Зауважимо, що наслідком теореми Піфагора є формула для довжини відрізка, кінці якого задані декартовими координатами. Візьмемо довільні три точки $A(x_1, ax_1)$, $B(x_2, ax_2)$ та $C(x_3, ax_3)$ графіку рівняння $y = ax$. Не обмежуючи загальності міркувань, можемо вважати, що $x_1 < x_2 < x_3$. Тоді рівність $AB + BC = AC$ є тривіальним наслідком формули довжини відрізку.

Тригонометричні функції гострих кутів

Нехай маємо два прямокутні трикутники $A_1B_1C_1$ та $A_2B_2C_2$ з прямими кутами $\angle C_1 = \angle C_2 = 90^0$ та такі, що $\angle A_1 = \angle A_2$.

Сумістимо точки A_1 та A_2 цих трикутників та зробимо так, щоб точки C_1 та C_2 лежали на одному промені. Введемо декартову систему координат з початком в точці $A = A_1$ віссю абсцис, направленою вздовж сторони A_1C_1 та такою, щоб точки B_1 та B_2 опинилися в першій чверті.

В цьому разі промені AB та A_1B_1 збігатимуться. Пряма, котра їх міститиме, матиме рівняння $y = ax$, де число a залежить від величини кута $\angle A = \angle A_1$.

Рисунок 5 виконано для випадку, коли $A_1C_1 < A_2C_2$. Нехай $A_1C_1 = x_1$ та $A_2C_2 = x_2$. Тоді можемо знайти координати точок наших двох трикутників, отримавши таке: $A_1(0, 0)$, $A_2(0, 0)$, $B_1(x_1, ax_1)$, $B_2(x_2, ax_2)$, $C_1(x_1, 0)$ та

$C_2(x_2,\, 0)$.

З формули для довжини відрізка отримуємо довжини сторін трикутників, а саме $A_1C_1 = x_1$, $A_2C_2 = x_2$, $B_1C_1 = ax_1$, $B_2C_2 = ax_2$, $A_1B_1 = x_1\sqrt{1+a^2}$ та $A_2B_2 = x_2\sqrt{1+a^2}$.

Враховуючи отримані формули для довжин сторін трикутників, рівності відношень, котрі необхідні для введення тригонометричних функцій, є очевидними.

Подібність прямокутних трикутників

Після введення системи координат та обгрунтувавши коректність використання рівняння прямої, ознаки подібності трикутників виявляються тривіальними твердженнями, котрі випливають з методу координат. Наведемо ці твердження.

Нагадаємо, що трикутники називаються подібними, якщо їх відповідні кути рівні, а відповідні сторони пропорційні.

Сформулюємо ознаки подібності прямокутних трикутників.

1. За двома кутами (якщо два відповідні кути прямокутних трикутників рівні, то ці трикутники подібні);
2. За двома відповідно пропорційними сторонами (якщо дві сторони одного прямокутного трикутника пропорційні двом відповідним сторонам іншого прямокутного трикутника, то ці прямокутні трикутними подібні).

Перша зі сформульованих ознак подібності прямокутних трикутників випливає з міркувань, цілком аналогічних до введення тригонометричних функцій. Потрібно ввести систему координат, сумістивши два рівні гострі кути в початку координат, розмістивши прямі кути на одній з осей координат та сумістивши гіпотенузи на одному промені, що виходить з початку координат. Після цього пропорційність відповідних сторін прямокутних трикутників буде випливати з формули довжини відрізка та рівняння прямої, яка проходить через початок координат.

Друга ознака подібності прямокутних трикутників доводиться аналогічно. Нехай у трикутників $A_1B_1C_1$ та $A_2B_2C_2$ сторони пропорційні та кути $\angle C_1$ та $\angle C_2$ прямі. Так само, як і раніше, сумістимо вершини A_1 та A_2, розмістимо вершини C_1 та C_2 на осі координат, а точки B_1 та B_2 розмістимо в першій чверті. Нехай рівняння прямої A_1B_1 буде $y = ax$, а рівняння прямої A_2B_2 буде $y = bx$. Втім,

$$a = \frac{B_1C_1}{A_1C_1} = \frac{B_2C_2}{A_2C_2} = b,$$

звідки маємо рівність всіх відповідних кутів наших трикутників.

Подібність трикутників загального вигляду

Питання про подібність трикутників "загального вигляду", тобто таких, про які не дано, що вони є прямокутними, пропонуємо зводити до подібності прямокутних трикутників.

Наведемо ідею доведення ознак подібності трикутників "загального вигляду".

Подібність за трьома кутами. Нехай про трикутники $A_1B_1C_1$ та $A_2B_2C_2$ відомо, що їх відповіді кути рівні. Доведемо пропорційність сторін цих трикутників.

Опустимо висоту найбільшого кута кожного з цих трикутників (див. рис. 6). Будемо вважати, що найбільший кут – це кут $\angle C_1 = \angle C_2$. Те, що кут є найбільшим означає, що основа висоти буде лежати на стороні трикутника, а не на її продовженні.

З подібності прямокутних трикутників за трьома кутами маємо, що $\triangle B_1C_1H_1 \sim \triangle B_2C_2H_2$ та $\triangle A_1C_1H_1 \sim \triangle A_2C_2H_2$, звідки

$$\underbrace{\frac{a_1}{a_2} = \frac{x_1}{x_2} = \frac{h_1}{h_2}}_{\triangle B_1C_1H_1 \sim \triangle B_2C_2H_2} = \frac{y_1}{y_2} = \frac{b_1}{b_2}.$$

Тому $x_1 = \frac{h_1x_2}{h_2}$ та $y_1 = \frac{h_1y_2}{h_2}$, звідки $\frac{x_1+y_1}{x_2+y_2} = \frac{h_1}{h_2}$, що означає, що відповідні сторони трикутників $A_1B_1C_1$ та $A_2B_2C_2$ пропорційні.

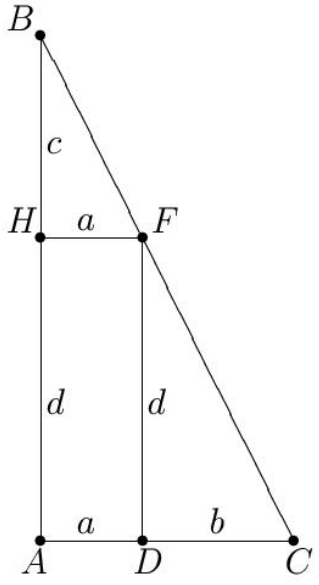
Подібність за кутом та двома пропорційними сторонами. Нехай про трикутники $A_1B_1C_1$ та $A_2B_2C_2$ відомо, що $\angle B_1 = \angle B_2$ та що сторони кута B_1 пропорційні відповідно сторонам кута B_2. Опустимо висоту з вершини C_1 та C_2 відповідних трикутників на протилежну сторону чи її продовження.

Трикутники $\triangle B_1C_1H_1 \sim \triangle B_2C_2H_2$ подібні за трьома кутами. Звідси, та з пропорційності сторін кутів B_1 та B_2 вихідних трикутників, отримуємо такі рівності:

$$\begin{cases} \dfrac{h_1}{h_2} = \dfrac{x_1}{x_2} = \dfrac{a_1}{a_2}, \\ \dfrac{a_1}{a_2} = \dfrac{x_1 + y_1}{x_2 + y_2}. \end{cases}$$

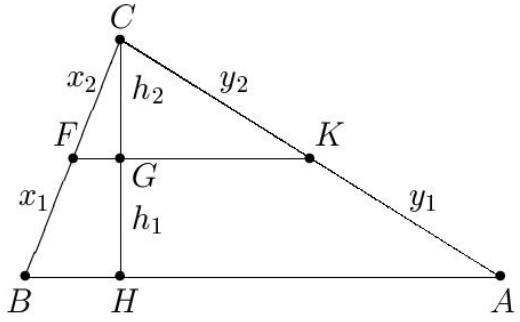
З цих рівностей маємо, що катети трикутників $C_1H_1A_1$ та $C_2H_2A_2$ пропорційні, що означає, що ці трикутники подібні.

З подібності відповідних пар прямокутних трикутників маємо, що відповідні кути трикутників $A_1B_1C_1$ та $A_2B_2C_2$ рівні і трикутники подібні за попередньою ознакою.



а) До доведення часткового випадку узагальненої теореми Фалеса

Рис. 7:



б) До доведення узагальненої теореми Фалеса для загального випадку

Рис. 8:

Подібність за пропорційними сторонами. Нехай у трикутників $A_1B_1C_1$ та $A_2B_2C_2$ відповідні сторони пропорційні. Доведемо, що відповідні кути цих трикутників рівні.

Побудуємо трикутник $\widetilde{A}_2\widetilde{B}_2\widetilde{C}_2$, який буде подібним до трикутника $A_1B_1C_1$ з одного боку подібним до трикутника $A_1B_1C_1$, а з іншого – рівним трикутнику $A_2B_2C_2$.

Для цього візьмемо довільні точки $\widetilde{A}_2$ та $\widetilde{B}_2$, такі щоб $\widetilde{A}_2\widetilde{B}_2 = A_2B_2$ та відкладемо в одні півплощину від прямої $\widetilde{A}_2\widetilde{B}_2$ промені під кутами $\angle A_1$ та $\angle B_1$. Отримаємо точку перетину, котру позначимо $\widetilde{C}_2$.

Трикутник $\widetilde{A}_2\widetilde{B}_2\widetilde{C}_2$ подібний трикутнику $A_1B_1C_1$ за трьома кутами, звідки маємо, що відповідні сторони цих трикутників пропорційні. З іншого боку, трикутники $\widetilde{A}_2\widetilde{B}_2\widetilde{C}_2$ та $A_2B_2C_2$ рівні за трьома сторонами, оскільки $\widetilde{A}_2\widetilde{B}_2 = A_2B_2$ за побудовою і відповідні сторони цих трикутників пропорційні сторонами трикутника $A_1B_1C_1$.

Доведення узагальненої теореми Фалеса

Покажемо як, користуючись лише теоремою Піфагора, можна довести узагальнену теорему Фалеса.

Використаємо рис. 7, де малими латинськими буквами a, b, c, d позначено, відповідно, відрізки $AD = HF$, DC, HB та $AH = DF$. Почнемо з випадку, коли прямі BA та FD, які перетинають сторони кута $\angle BCA$,

перпендикулярні до однієї з його сторін, на малюнку – до сторони AC.

Якщо, користуючись теоремою Піфагора, виразимо через катети FC з прямокутного трикутника DFC, FB з прямокутного трикутника HFB та BC з прямокутного трикутника ABC, то рівність

$$FC + FB = BC$$

може бути переписана як

$$\sqrt{d^2 + b^2} + \sqrt{a^2 + c^2} = \sqrt{(a + b)^2 + (d + c)^2}.$$

Після очевидних спрощень ця рівність набуває вигляду $(ad - bc)^2 = 0$.

Отримана рівність, очевидно, після повторного застосування теореми Піфагора, рівносильна узагальненій теоремі Фалеса:

$$\frac{\sqrt{a^2 + c^2}}{a} = \frac{\sqrt{b^2 + d^2}}{b}.$$

Доведення узагальненої теореми Фалеса без припущення про те, що паралельні прямі перетинають одну зі сторін кута під прямими кутами.

Скористаємося позначеннями, як на малюнку 8, котрий накреслений для випадку, коли перпендикуляр з вершини кута до прямих, що його перетинають, знаходиться всередині кута. Для випадку, коли не це так, доведення цілком аналогічне.

Застосувавши узагальнену теорему Фалеса до кута BCH та до кута HCA маємо рівності:

$$\frac{x_2}{x_1} = \frac{h_2}{h_1} = \frac{y_2}{y_1},$$

котрі і є формулюванням теореми узагальненої Фалеса.

Висновки

В огляді підручників математики за 7-8 класи загальноосвітніх шкіл ми дійшли до висновку, що виклад алгебри в 7-му класі та геометрії у 8-му містить ряд важливих теорем, котрі не доводяться. Так, в курсі алгебри за 7 клас відсутнє доведення того, що графіком лінійної функції є пряма, а в геометрії 8-го класу на належному рівні строгості на доводиться узагальнена теорема Фалеса при тому, що вона є основою для доведення теореми Піфагора, обгрунтування подібності трикутників та введення тригонометричних функцій гострих кутів.

Причиною такого стану речей, як ми побачили, є те, що автори шкільних підручників математики, включаючи таких «класиків» як А.М. Колмогоров,

П.С. Александров, О.В. Погорєлов з одного боку не могли замовчати метод координат як такий, що потягом століть отримав світове визнання, а з іншого — не вважали за потрібне використовувати цей метод у всій його повноті і на всю його потужність. Через це метод координат в радянських, а пізніше — сучасних українських підручниках використовують винятково як засіб ілюструвати «чисто геометричні» міркування.

Ми намагалися переконати читачів в тому, що використання методу координат для введення ключових фактів шкільної геометрії робить її на багато простішою для інтуїтивного розуміння. Втім, для цілковитого усвідомлення цього необхідна також цілковита переробка шкільного курсу алгебри та геометрії в частині послідовності тих понять і тверджень, яких стосується наша робота – площа, теорема Піфагора, рівняння прямої, подібність.

Література

1. *Александров А.Д., Вернер А.Л., Рыжкин В.И.*, Геометрия, уч. пособие для 8 кл. с углубл. изучением математики – Москва, Просвещение, 2002, 240 с.
2. *Апостолова Г.В.* Геометрія 8: дворівн. підручн. для загальноосвіт. навч. закл. — Київ, Генеза, 272 с., 2008 р.
3. *Бевз Г.П., Бевз В.Г., Владімірова Н.Г.*, Геометрія: Підручник для 8 кл. середніх загальноосвітніх закладів. — Київ, Вежа, 256 с., 2008 р.
4. *Бевз Г.П., Бевз В.Г.*, Алгебра: Підр. для 7 кл. загальноосвіт. навч. закл. — Київ, Зодіак-Еко, 301 с., 2007 р.
5. *Бурда М.І., Тарасенкова Н.А.*, Геометрія: Підруч. для 8 кл. загальноосвіт. навч. закл. — Київ, Освіта, 240 с., 2011 р.
6. *Вернер А.Л., Александров А.Д.* Школьный курс геометрии. // Математические структуры и моделирование. 2012. вып. 25., с. 18–38.
7. «Начала» Евклида, книги 1–4, — гос. изд.-во техн.-теорет. литер.-ры., Москва-Ленинград, 448с., 1950 г.
8. А. Ейнштейн, Творческая автобиография – в сборнике «Физика и реальность», — Москва, Наука, 1954 г., 360 с.
9. *Єршов С.В., Єршова А.П., Голобородько В.В., Крижановський О.Ф.*, Геометрія 8 клас, Підруч. для загальноосвіт. навч. закл. — Харків, Веста, 256 с., 2011 р.
10. *Істер О.С.*, Алгебра: Підруч. для 7 кл., загальноосвіт. навч. закл. — Київ, Освіта, 223 с., 2007 р.
11. *Киселёв А.П.*, Геометрия, Учебник для 9 класса, — Киев, Радянська школа, 196 с., 1963 р.

12. *Колмогоров А.Н.*, Новые программы и некоторые основные вопросы усовершенствования курса математики в средней школе // Математика в школе. 1967. № 2. С. 4–13.
13. *Кравчук В., Янченко Г.*, Алгебра. Підр. для 7 кл. — Тернопіль, ред. газети «Підручники та посібники» 240 с., 2007 р.
14. *Мерзляк А.Г., Пололонський В.Б., Якір М.С.*, Алгебра: Підруч. для 7 кл. загальноосвіт. навч. закладів. — Харків, Гімназія, 287 с., 2008 р.
15. *Мерзляк А.Г., Пололонський В.Б., Якір М.С.*, Геометрія: Підруч. для 8 кл. з поглибл. вивченням математики. — Харків, Гімназія, 208 с., 2008 р.
16. *Мерзляк А.Г., Пололонський В.Б., Якір М.С.*, Геометрія: Підруч. для 8 кл. загальноосвіт. навч. закладів. — Харків, Гімназія, 208 с., 2009 р.
17. *Погорєлов О.В.*, Геометрія. Підручник для 7-9 кл. серед. шк. — Київ, Освіта, 223 с., 1998 р.

Plakhotnyk Makar
Departamento de Matemática de Instituto de Matemática e Estatística
Universidade de São Paulo, São Paulo, Brasil.

On the expediency of studying of Thales' Theorem in the schol course of Geometry

We claim that the proper use of the Cartesian method admits to simplify a lot as understanding of the naturalness, as the details of the proof of the important statements, which in nowadays approach use the Thale's Theorem: Pythagorean rule, trigonometric functions of the acute angle, and similarity of triangles.

Keywords: *Pythagorean rule, Thale's Theorem, Cartesian method, similarity of triangles.*

УДК 37.016:51

Карпенко Л.Н.

[1] *преподаватель высшей математики, отделенное структурное подразделение Национального авиационного университета, Славянский колледж НАУ*

e-mail: larisa.karpenko@mail.ru

ПОВЫШЕНИЕ УРОВНЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ПОДГОТОВКИ СТУДЕНТОВ КОЛЛЕДЖА ПУТЕМ РЕАЛИЗАЦИИ ТЕХНОЛОГИИ «ЛЕКЦИЯ – ГИПЕРТЕКСТ»

В статье приведено описание опыта реализации технологии «лекция – гипертекст», доказана эффективность применения этой технологии в плане повышения уровня математической подготовки студентов колледжа.

Ключевые слова: *математическая подготовка, «лекция – гипертекст», эффективность обучения.*

Введение

Сфера профессионального образования находится в постоянном развитии, реагируя на изменения в экономике и обществе. Математические знания и методы используются при разрешении профессиональных проблем во всех областях наук и уровнях подготовки специалистов, поэтому курс математики введен в стандарты практически всех специальностей начального, среднего и высшего образования. При этом математическое образование, предполагающее развитие личности обучающейся средствами математики, должно иметь профессиональную направленность.

К сожалению, в настоящее время приходится констатировать тот факт, что уровень подготовки абитуриентов, поступающих в вузы разного профиля, а, соответственно, и уровень подготовки студентов, является очень низким. Это подтверждают как преподаватели вузов и колледжей, так и школьные учителя. Причинами этого является, по моему мнению, усложненное изложение математики в школе и отсутствие познавательного интереса школьников к изучению этой дисциплины.

Когда же абитуриент поступает в ВУЗ, особенно технический, он становится заложником ситуации: с одной стороны ему нужно владеть определенным математическим аппаратом для изучения специальных дисциплин, а с другой стороны, у него нет ни сил, ни желания для досконального изучения математики.

© Карпенко Л.Н., 2016

Возникает проблема: каким образом можно организовать обучение математике в колледже, чтобы студент за короткий промежуток времени смог овладеть нужным ему математическим аппаратом для дальнейшего изучения специальных дисциплин? Какие методические приемы, средства и технологии обучения могут заинтересовать студента в изучении этой сложной, но нужной для технического образования дисциплины?

В современной методической литературе предлагается довольно много способов решения указанной проблемы, однако многие из них далеки от практики, требуют закупки дорогостоящего оборудования (компьютерной техники) или затратные по временным параметрам. Поэтому основными критериями поиска эффективной технологии математической подготовки студентов колледжа стали:

— отсутствие требований к наличию дополнительного оборудования;

— реальные временные рамки, отвечающие времени изучения курса в колледже;

— возможность организации работы со студентами разного уровня начальной математической подготовки;

— максимальная активизация самостоятельной познавательной деятельности каждого студента в условиях аудиторной работы.

Подходящей под эти требования технологией является технология, которая называется «лекция – гипертекст». Данная технология была разработана специалистами Костромского областного института повышения квалификации работников образования под руководством Шереметовой Г.П. [1] и апробирована в школах Костромской области.

Проблему, стоящую во главе описываемого эксперимента можно конкретизировать следующим образом: является ли технология «лекция – гипертекст» эффективным методом работы со студентами, имеющими разный начальный уровень математической подготовки, способным максимально активизировать их самостоятельную познавательную деятельность в условиях аудиторной работы?

Решение обозначенной проблемы определило суть опыта работы по данной технологии.

Основная часть

Большинство текстов в учебниках являются для студента «сверх» текстами: они сложны, малопонятны и далеки от личных интересов. При таких обстоятельствах почти невозможно долгосрочное запоминание и осознанное понимание материала параграфа без специально организованной учебной деятельности.

Гипертекст — это текст, сжатый по объемам, который несет в себе огромный объем информации, включает научные понятия, сложен для самостоятельного изучения. Исследования показали, что технологию «лекция – гипертекст» эффективно можно использовать на занятиях по изучению нового материала и первичного закрепления в целях восприятия и осознания материала (формирование репродуктивных знаний).

Алгоритм работы с гипертекстом может быть следующим:

1. Организация деятельности. На первом этапе преподаватель ставит или формулирует вместе со студентами тему и цель изучения темы, предъявляет тексты для работы на занятии.

2. Озвучивание гипертекста. На этом этапе преподаватель озвучивает гипертекст, а студенты следят за его монологом по своим материалам, возможно, делают какие-то заметки. Важно, чтобы речь преподавателя максимально совпадала с текстом на столах студентов, содержала те же термины, формулировки и последовательность изложения, так как в этот момент на основе зрительного и слухового восприятия создаются условия для первичного запоминания информации.

3. Структурирование гипертекста. Преподаватель даёт задание разделить текст на части, найти границу между ними, выделить главные мысли и дать названия разделам. В результате многократного просмотра текста и проговора студенты продолжают механически запоминать текст и начинают понимать логику изложения.

4. Групповая работа над вопросами по тексту и простыми заданиями. Данный этап предполагает: подготовку вопросов и заданий для решения самими студентами; обмен вопросами в микрогруппах; коррекцию преподавателем.

5. Групповая работа над вопросами по тексту и усложненными заданиями: выполняются те же действия, что и в пункте 4. [1]

Положительными сторонами использования технологии являются:

1. Экономия учебного времени — новый материал изучается и закрепляется прямо на занятии.
2. Обеспечение долгосрочного запоминания материала, так как изложение опирается на различные типы памяти, многообразные приемы повторения, активную позицию студентов на занятии и учитывает логику процесса познания.
3. Создание условий для внутренней дифференциации: каждый студент достигает в усвоении темы собственной точки, которая фиксируется преподавателем во время индивидуального проверочного задания.

Результаты и их обсуждение

Эмпирическое исследование эффективности применения технологии «лекция – гипертекст» для обучения студентов высшей математике было организовано на базе двух групп 1М13 и 2М13 одного потока ОСП НАУ Славянского колледжа национального авиационного университета. Исследование проводилось в три этапа.

На первом — констатирующем этапе эксперимента были разработаны тестовые задания, позволяющие выявить начальный уровень математической подготовки студентов, проведен первичный мониторинг. Из двух групп потока, одна группа была выбрана в качестве экспериментальной, а вторая — контрольной.

На втором этапе — формирующем этапе эксперимента — была разработана система работы по технологии «лекция – гипертекст» по разделу «Линейная алгебра и аналитическая геометрия».

Разработанная система была внедрена в учебный процесс экспериментальной группы.

На третьем этапе — контрольном этапе эксперимента — был проведен повторный мониторинг математической подготовки, сделаны выводы об эффективности проведенной работы.

С целью диагностики уровня математической подготовки были разработаны разноуровневые тесты, предполагающие дифференциацию содержания учебных заданий:

— по уровню объема;

— по уровню трудности;

— по уровню творчества

В тесте используются задания трех типов:

— с выбором ответа (часть A),

— с кратким ответом (часть B),

— с развернутым ответом (часть C).

В каждом задании типа A (задания $A1-A10$) предлагается 3 ответа, из которых только один верный. Задание считается решенным, если тестируемый указал верный ответ.

В заданиях типа B (задания $B1-B7$) требуется записать полученный в ходе решения ответ. При этом ответом может быть только число. Задание считается решенным, если тестируемый записал верный ответ.

В заданиях типа C требуется написать текст решения.

По уровню сложности задания теста разделены на три группы (части).

За каждую верно решенную задачу типов A и B студент получает 1 балл.

Часть C содержит три наиболее сложные задачи. Именно эти задания дают возможность продемонстрировать высокий уровень математической подготовки, умение логически мыслить и применять знания в нестандартных ситуациях.

За решение заданий C тестируемый может получить от 0 до 4 баллов в зависимости от полноты и правильности решения.

Таким образом, максимальное число баллов, которое можно получить за верное решение всех заданий, равно 29 ($1 \times 10 + 1 \times 7 + 3 \times 4 = 29$)

Тестирование каждого студента оценивается по уровням:
— высокий уровень — выполнено 95%-100% заданий (27,5-29 б.);
— средний уровень — выполнено 60%-94% заданий (17,5-27 б);
— низкий уровень — выполнено до 60% заданий (менее 17,5 б.)

Статистическая обработка полученных результатов проводилась с помощью пакетов Statistica 6.0 и StatPlus 5.9.0.

Результаты диагностики на констатирующем этапе эксперимента показали, что студенты обоих групп продемонстрировали довольно низкие результаты: в группе 1М13 средний балл равен: $14,52 \pm 1,62$, а в группе 2М13 средний балл равен: $11,70 \pm 1,72$.

Чтобы подтвердить отсутствие различий в начальном уровне математических знаний, была проведена проверка гипотезы о равенстве средних. Алгоритм проведения статистического анализа был следующим:

1. С помощью опции «Проверка на нормальность» вкладки «статистика» проверялась нормальность распределений в выборках по критериям: Колмогорова-Смирнова/Лиллифорса, Шапиро-Уилка, Д'Агостино Асимметрия, Д'Агостино Эксцесс, Д'Агостино общее.

2. С помощью опции F-тест для дисперсии проводилась проверка гипотезы о равенстве дисперсий.

3. Если нормальность подтверждалась по всем параметрам и подтверждалась гипотеза о равенстве дисперсий, то для проверки гипотезы о равенстве средних применялся t-критерий Стюдента, в противном случае были использованы критерии Колмогорова-Смирнова и Мана-Уитни.

Результаты проверки на нормальность отражены в таблице 1 (ниже).

Поскольку по критерию Шапиро-Уилка нормальность была отклонена, то дальнейший анализ проводился с помощью непараметрических критериев.

Результаты проверок по критериям приведены в таблице 2 (ниже).

Табл. 1: Результаты проверки на нормальность на констатирующем этапе исследования

Критерий проверки	**Контрольная группа**	**Экспериментальная группа**
Критерий Колмогорова-Смирнова/Лиллифорса	Никаких подтверждений против нормальности	Никаких подтверждений против нормальности
Критерий Шапиро-Уилка	Нормальность отклонена	Нормальность отклонена
Д'Агостино Асимметрия	Нормальность принята	Нормальность отклонена
Д'Агостино Эксцесс	Нормальность принята	Нормальность принята
Д'Агостино общее	Нормальность принята	Нормальность принята

Табл. 2: Результаты проверки гипотезы о равенстве средних

Тесты	**Уровень значимости различий**
Тест Мана-Уитни	$0,10$
Тест Колмогорова-Смирнова	$0,44$

Поскольку уровень значимости превышает 0,05 (5%), допустимый в педагогических исследованиях для принятия альтернативной гипотезы о различии средних, то в данном случае средние следует признать одинаковыми. В результате был сделан вывод, что на констатирующем этапе достоверной разницы средних при уровне значимости менее 5% в контрольной и экспериментальной группах получено не было. Это позволило перейти к формирующему этапу эксперимента.

По результатам эксперимента группа 1М13 была выбрана в качестве экспериментальной, а группа 2М13 – контрольной.

На формирующем этапе в учебный процесс экспериментальной группы 1М13 была внедрена технология «лекция – гипертекст». Всего было подготовлено 20 гипертекстов с использованием материалов пособий [3], [4] и соответственно, проведено 20 занятий по линейной алгебре и аналитической геометрии. При этом контрольная группа 2М13 изучала этот же раздел, но по традиционной методике.

С целью выявления эффективности проведенной работы, был организован контрольный эксперимент по той же методике, что и на этапе констатирующего эксперимента. Статистическая обработка результатов контрольного эксперимента проводилась по описанному выше алгоритму.

В результате получено: средний балл в контрольной группе равен $16,00 \pm 1,45$, а в экспериментальной $22,77 \pm 1,37$. Значимость полученной разницы на уровне менее $0,05$ подтверждена с помощью критериев Мана-Уитни ($p = 0,0054$) и Колмогорова-Смирнова ($p = 0,0013$).

Таким образом, можно сказать, что предлагаемая технология является эффективным средством повышения качества математического образования, и может быть рекомендована к внедрению по другим разделам курса.

Рекомендации

В результате проведенной работы по апробации технологии «лекция – гипертекст» на занятиях по высшей математике в колледже, можно сформулировать ряд рекомендаций методического характера:

1. Предпочтительно в качестве гипертекстов использовать не готовые тексты учебника, а некоторый составленный преподавателем текст, объемом не более 1,5 страницы.
2. Гипертекст обязательно должен оставаться у студентов.
3. Работать по данной технологии следует в системе, регулярно.
4. Озвучивание гипертекста преподавателем является обязательным условием в реализации данной технологии. При озвучивании гипертекста необходимо придавать ему эмоциональную окраску, давать дополнительные пояснения, вывод формул, примеры решения задач, что позволит вписать данный способ проведения в традиционную систему работы преподавателя.

Литература

1. *Шереметова Г.П.* Педагогическое обеспечение социального самоопределения сельских школьников в процессе предпрофильной подготовки : автореф. дис.. . . канд. пед. наук : 13.00.02 / Шереметова Г.П. — М., 2006.
2. *Лапач С.М.* Статистичні методи в медико-біологічних дослідженнях із застосуванням Exel / С.М. Лапач, А.В. Чубенко, П.М. Бабіч. — К.:МОРІОН, 2001. — 408 с.
3. *Письменный Д.Т.* Конспект лекций по высшей математике / Дмитрий Трофомофич Письменный. — М.: Айрис-прес, 2006. — 288 с.
4. *Данко П.Е.* Высшая математика в упражнениях и задачах. В 2-х ч. Ч.2 / П.Е. Данко, А.Г. Попов, Т.Я. Кожевникова. – М.: Высш.шк., 2000. – 416 с.

Karpenko Larysa N.
Slavyansk College of National aviation university, Slavyansk, Ukraine.

The increase of the mathematical training level of collegians by realization of the technology "Lecture – hypertext".

The article describes the experience in implementing technology «lecture – hypertext», proved the effectiveness of this technology in the terms of the increase of the mathematical training level of collegians.

Keywords: *mathematical training, «lecture – hypertext», the effectiveness of training.*

УДК 37.091.26

Кадубовський О.А., Беседін Б.Б., Сторожилова Н.В.

[1] *кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри геометрії та МВМ, ДВНЗ «ДДПУ»*

[2] *кандидат педагогічних наук, доцент кафедри геометрії та МВМ, ДВНЗ «ДДПУ»*

[3] *учитель математики та інформатики, Артемівська загальноосвітня школа №12*

e-mail: kadubovs@ukr.net, besedin_boris@ukr.net, inmylifes@mail.ru

ДО ПИТАННЯ ПРО ЗАСТОСУВАННЯ АЛГОРИТМІЧНОГО ПІДХОДУ ПРИ РОЗВ'ЯЗУВАННІ РАЦІОНАЛЬНИХ НЕРІВНОСТЕЙ МЕТОДОМ ІНТЕРВАЛІВ

В статті висвітлюється авторський досвід навчання способам розв'язування дробово-раціональних нерівностей на уроках математики в ЗОШ та під час формування необхідних компетентностей в процесі підготовки студентів фізико-математичних спеціальностей педагогічних ВНЗ та підвищення кваліфікації вчителів математики. Наведено по-кроковий алгоритм, ілюстративний приклад з деталізованими поясненнями та методичні поради щодо дидактичного забезпечення в процесі оволодіння запропонованим підходом.

Ключові слова: *дробово-раціональні нерівності, методи розв'язання, алгоритмічний підхід, метод інтервалів.*

Вступ

Змістова лінія «Нерівності» є невід'ємною складовою шкільного курсу алгебри та початків аналізу. Традиційно, «легко засвоюваними» для учнів нерівностями є *раціональні нерівності*, зокрема лінійні та квадратні, розв'язування яких **методом інтервалів** в достатній мірі висвітлено як в діючих підручниках (напр., [1]–[3]), так і численних навчально-методичних статтях (напр., [4, 5], [12]–[14], [21]) й посібниках (напр., [6]–[11], [15]–[19], [22]–[26]).

Однак, власний досвід роботи з учнями та студентами свідчить про те, що останнім часом певна частина учнів (та й студентів) припускає багато помилок під час розв'язування нерівностей, зокрема при застосуванні методу інтервалів. Останнє підтверджує й сумна статистика (останніх років) щодо результатів виконання учнями відповідних завдань під час ДПА та ЗНО.

Крім того, непоодинокими є випадки, коли навіть сумлінний учень (студент), розв'язуючи квадратну нерівність у графічний спосіб («за допомогою параболи»), усвідомлює його як єдиний можливий.

Звісно ж, що такий стан справ не може не викликати занепокоєння.

© Кадубовський О.А., Беседін Б.Б., Сторожилова Н.В., 2016

На нашу думку, причини сумної статистики (щодо розв'язування раціональних нерівностей методом інтервалів) можуть бути пов'язані з наступним:

по-перше — зі *значними обсягами роботи при виконанні підготовчих необхідних кроків та традиційними помилками через неуважність під час визначення і відбору шуканих проміжків розв'язку нерівності.*

по-друге — *за лаштунками традиційного алгоритму до методу інтервалів залишаються перетворення над самою нерівністю.* І як наслідок — неусвідомлення учнями (студентами) суті та змісту (необхідних) виконуваних перетворень. Зокрема, виконуючи послідовність перетворень над нерівністю, далеко не завжди очевидним для багатьох є момент втрати розв'язку чи, навпаки, виникнення зайвого.

по-третє — *незнання та/або ж нерозуміння теоретичних основ* «методу інтервалів» розв'язування нерівностей, з якими можна ознайомитися, наприклад, в [18]. (Маємо на увазі властивість неперервної функції зберігати знак на проміжку між сусідніми її нулями).

Оскільки при атестації та тестуванні важливим фактором є час, витрачений учнем на виконання завдань, то природно й доцільно було би опанувати ті прийоми, які б дозволили цей час заощадити. При розв'язуванні нерівностей методом інтервалів й з'являється можливість значно скоротити час за рахунок того, що знаходження-визначення знаків функції на кожному з одержаних інтервалів можна здійснити майже автоматично.

Ще одним аргументом (на нашу думку — найбільш значущим з усіх)
√ на користь особливого статусу теми «дробово-раціональні нерівності» та
√ на користь вибору саме методу інтервалів при їх розв'язуванні
є, так званий, *узагальнений метод інтервалів розв'язування нерівностей*, який дозволяє за допомогою *методу заміни множників* «звести» майже будь-яку нерівність зі шкільного курсу математики (за винятком, можливо, тригонометричних) до розв'язування відповідної дробово-раціональної нерівності.

Маємо своїм приємним обов'язком відзначити та повідомити, що зазначений *метод заміни множників*, як один з ефективних способів розв'язування цілого класу нерівностей (шкільного курсу математики), було фундаментально і достатньо детально описано В.І. Голубєвим та В.І. Тарасовим ще у 1992 р. в роботі [9], та пізніше у 2007 р. в роботах [10], [18], [27] та інших. Проте мусимо визнати й прикро констатувати, що для більшості учнів та вчителів цей метод залишається невідомим.

Метою ж самої статті є виклад основних методичних рекомендацій щодо опанування методом інтервалів розв'язання раціональних нерівностей.

Вирішенню, принаймні частково, зазначених проблем й присвячено дану статтю, яку можна вважати логічним продовженням матеріалу (самого деталізованого алгоритму), наведеного в [20] (С. 38–41).

Маючи на меті саме цілісний виклад матеріалу, який допоможе при комплексній підготовці випускників до ДПА та ЗНО, в першій та другій частині статті авторами цілком свідомо наведено «загальновідомий теоретичний мінімум», засвоєння та розуміння суті якого є необхідною складовою при формуванні не лише відповідних навичок, а й компетенцій взагалі.

1. Основні поняття та визначення

1. Якщо два раціональні вирази зі змінною сполучити одним із знаків «$>$», «$<$», «$\geqslant$», «$\leqslant$», то одержуємо нерівність зі змінною. У загальному вигляді нерівність з однією змінною x (наприклад, для випадку «більше») записують так: $f(x) > g(x)$.

2. Розв'язком нерівності з однією змінною називають таке значення змінної, яке перетворює її в правильну числову нерівність. Усі розв'язки нерівності утворюють множину розв'язків нерівності.

3. Розв'язати нерівність означає знайти всі її розв'язки, або ж довести, що їх не існує. Якщо нерівність розв'язків не має, то прийнято говорити, що множиною її розв'язків є порожня множина ($\emptyset$). Тому розв'язати нерівність означає знайти множину її розв'язків.

4. Областю допустимих значень (або ж коротко, ОДЗ) змінної нерівності називають спільну область визначення для всіх функцій, що стоять у лівій і правій частинах нерівності.

5. Нерівності називають рівносильними (або ж *еквівалентними*), якщо множини їх розв'язків рівні (співпадають).

6. Якщо множина розв'язків першої нерівності є підмножиною множини розв'язків другої нерівності, то другу називають наслідком першої нерівності.

7. Нехай $\vee$ — один зі знаків нерівності: «$<$», «$\leqslant$», «$>$», «$\geqslant$», а $\wedge$ — (суть) обернений до $\vee$ знак (тобто, «$>$», «$\geqslant$», «$<$», «$\leqslant$» відповідно), а $c = const$. Тоді мають місце наступні рівносильні перетворення

1. $f(x) \vee g(x) \Leftrightarrow f(x) - g(x) \vee 0$;
2. $f(x) \vee g(x) \Leftrightarrow (f(x))^{2n-1} \vee (g(x))^{2n-1}$ для будь-якого натурального n;
3. $f(x) \vee g(x) \Leftrightarrow f(x) + c \vee g(x) + c$;
4. $f(x) \vee g(x) \Leftrightarrow c \cdot f(x) \vee c \cdot g(x)$, якщо $c > 0$;
5. $f(x) \vee g(x) \Leftrightarrow c \cdot f(x) \wedge c \cdot g(x)$, якщо $c < 0$.

8. У практичному застосуванні найбільш дієвими при виконанні перетворень є наступні теореми

Теорема 1. *Якщо обидві частини нерівності помножити або поділити на один і той самий вираз, що визначений і є додатним на ОДЗ змінної (для заданої нерівності), не змінюючи знака нерівності, то одержимо нерівність, рівносильну заданій (на ОДЗ заданої нерівності).*

Теорема 2. *Якщо обидві частини нерівності помножити або поділити на один і той самий вираз, що визначений і є від'ємним на ОДЗ змінної (для заданої нерівності) і змінити знак нерівності на протилежний, то одержимо нерівність, рівносильну заданій (на ОДЗ заданої нерівності).*

9. Якщо крім змінної та числових коефіцієнтів до запису нерівності входять також буквені коефіцієнти — **параметри**, то при розв'язуванні можна користуватися таким орієнтиром.

«Будь-яку нерівність з параметрами можна розв'язувати як звичайну нерівність до тих пір, поки всі перетворення або міркування, необхідні для розв'язування, можна виконати однозначно. Якщо якесь перетворення не можна виконати однозначно, то розв'язування необхідно розбити на кілька випадків, щоб у кожному з них відповідь через параметри записувалася однозначно.» Причому слід пам'ятати, що відповідь треба записати для всіх можливих значень параметра.

10. Нагадаємо, що дробово-раціональною (або ж, коротко, раціональною) нерівністю називають нерівність, яку можна привести до нерівності виду

$$\frac{P(x)}{Q(x)} \vee 0, \tag{1}$$

де $P(x)$ і $Q(x)$ — многочлени з дійсними коефіцієнтами.

11. Многочлен виду

$$P_n(x) = a_n \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + ... + a_1 \cdot x^1 + a_0, \tag{2}$$

де $a_i \in R$, $a_n \neq 0$, $n \in N$ називають многочленом n-го степеня, а числовий множник a_n — коефіцієнтом при старшому члені x^n многочлена $P_n(x)$.

12. Многочлен з дійсними коефіцієнтами називають незвідним, якщо його не можна розкласти у добуток многочленів менших степенів з дійсними коефіцієнтами.

Добре відомо (див., напр., [333]), що **незвідними многочленами з дійсними коефіцієнтами** можуть бути лише:

1) **лінійні** (1-го степеня) **двочлени** $ax + b$ та

2) **квадратичні** (2-го степеня) **тричлени** $ax^2 + bx + c$ **з від'ємним дискримінантом** $D = b^2 - 4ac$, зокрема виду $ax^2 + c$, для яких $a \cdot c > 0$.

2. Основна частина

Традиційний підхід до розв'язування нерівностей виду (1) полягає у розгляді рівносильної конструкції, а саме

$$\frac{P(x)}{Q(x)} < 0 \Leftrightarrow P(x)\cdot Q(x) < 0; \qquad \frac{P(x)}{Q(x)} \leqslant 0 \Leftrightarrow \begin{cases} P(x)\cdot Q(x) \leqslant 0 \\ Q(x) \neq 0; \end{cases} \tag{3}$$

$$\frac{P(x)}{Q(x)} > 0 \Leftrightarrow P(x)\cdot Q(x) > 0; \qquad \frac{P(x)}{Q(x)} \geqslant 0 \Leftrightarrow \begin{cases} P(x)\cdot Q(x) \geqslant 0 \\ Q(x) \neq 0. \end{cases} \tag{4}$$

Слід зазначити, що при розв'язуванні нерівностей виду $P(x)\cdot Q(x) \vee 0$ можна використовувати рівносильні конструкції

$$P(x)\cdot Q(x) > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} P(x) > 0 \\ Q(x) > 0 \end{cases} \\ \begin{cases} P(x) < 0 \\ Q(x) < 0; \end{cases} \end{array}\right. \qquad P(x)\cdot Q(x) \geqslant 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} P(x) \geqslant 0 \\ Q(x) \geqslant 0 \end{cases} \\ \begin{cases} P(x) \leqslant 0 \\ Q(x) \leqslant 0; \end{cases} \end{array}\right. \tag{5}$$

$$P(x)\cdot Q(x) < 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} P(x) > 0 \\ Q(x) < 0 \end{cases} \\ \begin{cases} P(x) < 0 \\ Q(x) > 0; \end{cases} \end{array}\right. \qquad P(x)\cdot Q(x) \leqslant 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} P(x) \geqslant 0 \\ Q(x) \leqslant 0 \end{cases} \\ \begin{cases} P(x) \leqslant 0 \\ Q(x) \geqslant 0. \end{cases} \end{array}\right. \tag{6}$$

Для розв'язування нерівностей виду $P(x) \vee 0$ доцільно використовувати метод інтервалів, традиційний алгоритм якого пропонують в більшості підручниках та навчально-методичних посібниках у наступному вигляді:

1. Знайти ОДЗ змінної нерівності.
2. Знайти нулі $P(x)$ (розв'язати рівняння $P(x) = 0$)
3. Позначити нулі на ОДЗ і знайти знак функції (многочлену) $P(x)$ в кожному з проміжків, на які розбивається ОДЗ.
4. Записати відповідь, ураховуючи знак нерівності.

Проте, як вже зазначалося авторами у вступі, цей алгоритм є занадто *формалізований*. І в першу чергу, маємо на увазі формалізм, пов'язаний із знаходженням знаків функції на кожному з одержаних проміжків.

Тому авторами нижче пропонується більш деталізований по-кроковий алгоритм методу інтервалів розв'язування дробово-раціональних нерівностей, основна мета якого — спрямувати не на сам деталізований алгоритм, а саме на:

— процес розв'язування нерівностей з акцентом на рівносильність необхідних виконуваних перетворень;

— принципову можливість швидкого знаходження знаків функції на всіх одержаних проміжках.

2.1. Алгоритмічний підхід до розв'язування дробово-раціональних нерівностей методом «інтервалів»

1 етап. **Знайти «ОДЗ» дробово-раціональної нерівності**.
По суті — вилучити із множини дійсних чисел R (з інтервалу $(-\infty;+\infty)$) усі «нулі знаменників», тобто всі ті значення $h_1, h_2, ..., h_t$ змінної x, при яких обертається в нуль хоча б один із знаменників.

Зауваження 1. *Пріоритетність саме цього етапу є більш ніж виправданою. Для переконання в останньому достатньо розглянути приклад нерівності* $\dfrac{1}{x-1}+x \leqslant 2-\dfrac{1}{1-x}$, *розв'язком якої є* $x \in (-\infty;1)\cup(1;2]$.

2 етап. **Звести вихідну нерівність до її «канонічно-рівносильного» виду**.
2.1. «Перенести» (з дотриманням відповідного правила) всі члени з правої частини нерівності у ліву її частину. Тобто, привести нерівність до виду

$$\frac{P_1(x)}{Q_1(x)}+...+\frac{P_k(x)}{Q_k(x)} \vee 0. \tag{7}$$

2.2. Звести всі доданки у лівій частині нерівності до спільного знаменника. Тобто, привести нерівність до нерівності виду

$$\frac{P(x)}{Q(x)} \vee 0. \tag{8}$$

2.3. Розкласти чисельник $P(x)$ на незвідні множники (подати $P(x)$ у вигляді добутку незвідних многочленів).
2.4. Розкласти знаменник $Q(x)$ на незвідні множники.
2.5. Шляхом множення на число (-1)

або обох частин нерівності (не забуваючи при цьому знак нерівності змінювати на протилежний)

або ж чисельника і знаменника лівої частини нерівності
`досягнути того, щоб коефіцієнт при старшому члені в кожному з незвідних множників-многочленів був додатнім`.

Зауваження 2. *Слід взяти до уваги, що, наприклад:*
незвідні множники виду $(\alpha-x)^{2n}=(x-\alpha)^{2n}$, $(-3+2x)=(2x-3)$, $(2x^2-x+3)$ *не вимагають застосування до них зазначених процедур,*

тоді як
незвідні множники виду $(\alpha-x)^{2n+1}=-(x-\alpha)^{2n+1}$, $(-2x+3)=-(2x-3)$, $(-2x^2+x-3)=-(2x^2-x+3)$ *вимагають обов'язкове застосування до них зазначених процедур.*

2.6. Кожен з незвідних множників виду $(ax+b)^n$ (після кроку 2.5. $a>0$) привести до стандартного виду $a^n \cdot (x+\frac{b}{a})^n$.

Зауваження 3. *Слід взяти до уваги, що остаточний розклад на незвідні множники передбачає добуток степенів двочленів саме з різними основами.*

2.7. «Позбутися» (від додатних та від'ємних) числових множників в чисельнику і знаменнику лівої частини нерівності (наприклад, шляхом ділення або множення обох частин нерівності на такі числові множники).

Таким чином, результатом виконання кроків 2.1.–2.7. буде зведення вихідної нерівності до нерівності виду

$$\frac{(x-\alpha_1)^{m_1}\cdot(x-\alpha_2)^{m_2}\cdot\ldots\cdot(x-\alpha_k)^{m_k}\cdot\widetilde{P}(x)}{(x-\beta_1)^{n_1}\cdot(x-\beta_2)^{n_2}\cdot\ldots\cdot(x-\beta_l)^{n_l}\cdot\widetilde{Q}(x)}\vee 0, \tag{9}$$

де $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_k$ — (різні) нулі чисельника; $\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_l$ — нулі знаменника; $\widetilde{P}(x)$ ($\widetilde{Q}(x)$) — позначення для добутку (зокрема однократного) незвідних множників 2-го степеня (за умов наявності таких в розкладах $P(x)$ і $Q(x)$).

2.8. Більше того, завдяки виконанню кроку 2.5., кожен з добутків $\widetilde{P}(x)$ і $\widetilde{Q}(x)$ при будь-яких дійсних x (зокрема з ОДЗ вихідної нерівності) приймає виключно додатні значення (а тому взагалі не впливає на знак лівої частини нерівності). Таким чином нерівність (9) є рівносильною нерівності

$$f(x)\vee 0, \quad \text{де} \tag{10}$$

$$f(x)=\frac{(x-\alpha_1)^{m_1}\cdot(x-\alpha_2)^{m_2}\cdot\ldots\cdot(x-\alpha_k)^{m_k}}{(x-\beta_1)^{n_1}\cdot(x-\beta_2)^{n_2}\cdot\ldots\cdot(x-\beta_l)^{n_l}}, \tag{11}$$

яку і будемо називати «**канонічним**» видом вихідної нерівності.

Зауваження 4. *В загальному випадку множина $B=\{\beta_1,\ldots,\beta_l\}$ є підмножиною множини $H=\{h_1,\ldots,h_t\}$. Якщо ж множини B і H співпадають, то нерівність (10) є рівносильною вихідній нерівності. Таким чином, у випадку $B\subsetneq H$ вихідна нерівність є рівносильною системі*

$$\begin{cases} f(x)\vee 0, \\ x\notin H\setminus B. \end{cases}$$

3 етап. **Виокремлення «подвійних точок»**.

Під «**подвійною точкою**» слід розуміти таке значення змінної x, для якого виконується одна з трьох умов:

3.1) воно є нулем лише чисельника або лише знаменника, а показник степеня відповідного двочлена є парним числом — *подвійна точка «першого» типу*;

3.2) воно є нулем і чисельника і знаменника, а сума показників степенів відповідних двочленів є парним числом — *подвійна точка «другого» типу*;
3.3) воно належить множині H, але не належить множині B — *подвійна точка «третього» типу.*

Зауваження 5. *Кожна «подвійна точка» p_0 характеризується тим, що вона є одночасно кінцевою та початковою точкою двох «сусідніх» інтервалів знакосталості функції $f(x)$.*

4 етап. **Визначення знаків $f(x)$ на інтервалах координатної осі**.
4.1. На координатній прямій незалежно від знаку нерівності «виколюємо» точки з координатами $h_1, h_2, ..., h_t$ — нулі знаменників вихідної нерівності.
4.2. На тій самій координатній прямій залежно від знаку нерівності «виколюємо» (якщо знак нерівності строгий) або «замальовуємо» (у випадку не строгого знаку нерівності) точки з координатами $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_k$ — нулі чисельника. Причому, якщо нуль чисельника співпадає із вже виколотим на кроці 4.1. нулем, то такий нуль не може бути замальованим.
4.3. Серед точок, відмічених на координатній прямій, помітити ті, які є «подвійними точками».
4.4. Завдяки крокам 2.5.–2.7. функція $f(x)$ на крайньому правому проміжку координатної осі (OX) завжди приймає додатні значення. Тому цей інтервал завжди помічаємо позначкою «$+$».

На інших інтервалах координатної осі розстановку позначок «$+$» або «$-$» доцільно здійснити рухаючись від правого крайнього інтервалу ліворуч (до $-\infty$) змінюючи позначки на альтернативні за винятком випадків переходу через подвійні точки. При переході через кожну з подвійних точок (рухаючись справа-наліво) позначка не змінюється.

5 етап. **Запис шуканого розв'язку вихідної нерівності**.

Якщо знак нерівності (10) «$>$», то у відповідь слід записати об'єднання відкритих інтервалів, на яких стоїть позначка «$+$»;

якщо знак нерівності (10) «$\geqslant$», то у відповідь слід записати об'єднання інтервалів, на яких стоїть позначка «$+$» включивши кінці, яким відповідають замальовані точки та замальовані точки, що не увійшли у відмічені проміжки;

якщо знак нерівності (10) «$<$», то у відповідь слід записати об'єднання відкритих інтервалів, на яких стоїть позначка «$-$»;

якщо знак нерівності (10) «$\leqslant$», то у відповідь слід записати об'єднання інтервалів, на яких стоїть позначка «$-$» включивши кінці, яким відповідають замальовані точки та замальовані точки, що не увійшли у відмічені проміжки.

2.2. Ілюстративний приклад

Розв'язати нерівність

$$\frac{1}{x-3}+\frac{(x-3)x^7(x-2)^4(10+2x)^3(-x^2+6x-10)(2x-3)^4}{(x^4-4x^2+5)(x+5)^5(6-3x)(4-x)^6(x^4-1)} \geqslant -\frac{1}{3-x}. \quad (12)$$

1 етап. Знайдемо ОДЗ:

$$\begin{cases} x-3\neq 0 \\ x^4-4x^2+5\neq 0 \\ x+5\neq 0 \\ 6-3x\neq 0 \\ 4-x\neq 0 \\ x^4-1\neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x\neq 3 \\ (x^2-2)^2\neq -1 \\ x\neq -5 \\ x\neq 2 \\ x\neq 4 \\ (x^2+1)(x-1)(x+1)\neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x\neq 3 \\ x\neq -5 \\ x\neq 2 \\ x\neq 4 \\ x\neq 1 \\ x\neq -1 \end{cases}$$

Звідки $x\in R\backslash\{-5;-1;1;2;3;4\}$.

2 етап. Приведемо дану нерівність до її «канонічного» виду:

2.1. Після перенесення членів нерівності з правої у ліву її частину одержимо

$$\frac{1}{x-3}+\frac{(x-3)x^7(x-2)^4(10+2x)^3(-x^2+6x-10)(2x-3)^4}{(x^4-4x^2+5)(x+5)^5(6-3x)(4-x)^6(x^4-1)}+\frac{1}{3-x}\geqslant 0;$$

2.2. У зведенні доданків лівої частини нерівності

$$\frac{(x-3)x^7(x-2)^4(10+2x)^3(-x^2+6x-10)(2x-3)^4}{(x^4-4x^2+5)(x+5)^5(6-3x)(4-x)^6(x^4-1)}\geqslant 0 \quad (13)$$

до спільного знаменника *не має потреби*;

2.3. Розкладемо чисельник у добуток незвідних множників:

2.3.1. Оскільки дискримінант квадратичного тричлена $-x^2+6x-10$ становить $D=6^2-4\cdot(-1)\cdot(-10)=36-40=-4$ і є від'ємним, то квадратичний тричлен є незвідним. І тому чисельник лівої частини нерівності (13) *вже розкладено у добуток незвідних множників.*

2.4. Розкладемо знаменник у добуток незвідних множників:

2.4.1. $(x^4-1)=(x^2-1)(x^2+1)=(x^2+1)(x-1)(x+1)$;

2.4.2. $(x^4-4x^2+5)=(x^2-\sqrt{2\sqrt{5}+4}\cdot x+\sqrt{5})(x^2+\sqrt{2\sqrt{5}+4}\cdot x+\sqrt{5})$

Не важко перевірити, що кожен із одержаних квадратичних тричленів має від'ємний дискримінант, і тому вони є незвідними. А наведений розклад можна одержати, наприклад, за допомогою методу невизначених коефіцієнтів.

Зауваження 6. *Крок 2.4.2 далеко не завжди є доречним. Більш доцільним є розгляд* (x^4-4x^2+5) *як многочлена* $P_1(x)=x^4-4x^2+5$, *який при всіх дійсних* x *набуває додатних значень. Пояснимо останнє: якщо ввести заміну* $x^2=t$ *і розглянути квадратичну функцію* $f(t)=t^2-4t+5$, *то через від'ємність дискримінанта та додатність коефіцієнта при старшому її*

члені ця функція набуває додатних значень при всіх дійсних t*, зокрема при невід'ємних* $t = x^2$ *.*

2.5.–2.6. Досягнемо того, щоб коефіцієнт при старшому члені в кожному з незвідних множників-многочленів був додатнім:

2.5-6.1. $(10+2x)^3 = 8(x+5)^3$;

2.5-6.2. $(-x^2+6x-10) = -(x^2-6x+10)$;

2.5-6.2. $(2x-3)^4 = 16\left(x-\frac{3}{2}\right)^4$;

2.5-6.4. $(6-3x) = -3(x-2)$;

2.5-6.5. $(4-x)^6 = (x-4)^6$.

Тому нерівність (13) набуває вид

$$\frac{-8\cdot 16\cdot (x-3)x^7(x-2)^4(x+5)^3\left(x-\frac{3}{2}\right)^4}{-3\cdot (x+5)^5(x-2)(x-4)^6(x-1)(x+1)}\cdot\frac{(x^2-6x+10)}{(x^4-4x^2+5)(x^2+1)}\geqslant 0 \quad (14)$$

2.7. «Позбавлення» від додатних та від'ємних числових множників

$$\frac{(x-3)x^7(x-2)^4(x+5)^3\left(x-\frac{3}{2}\right)^4}{(x+5)^5(x-2)(x-4)^6(x-1)(x+1)}\cdot\frac{(x^2-6x+10)}{(x^4-4x^2+5)(x^2+1)}\geqslant 0 \qquad (15)$$

2.8. Запис «канонічно-рівносильного» виду вихідної нерівності

$$\frac{(x-3)x^7(x-2)^4(x+5)^3\left(x-\frac{3}{2}\right)^4}{(x+5)^5(x-2)(x-4)^6(x-1)(x+1)}\geqslant 0, \quad x\neq 3. \qquad (16)$$

3 етап. Виокремлення «подвійних точок»:

3.1. $x_1 = 4$, $x_2 = \frac{3}{2}$ — подвійні точки («першого» типу);

3.2. $x_3 = -5$ — подвійна точка («другого» типу);

3.3. $x_4 = 3$ — подвійна точка («третього» типу);

4 етап. Визначення знаків лівої частини канонічної нерівності (16) на інтервалах координатної осі:

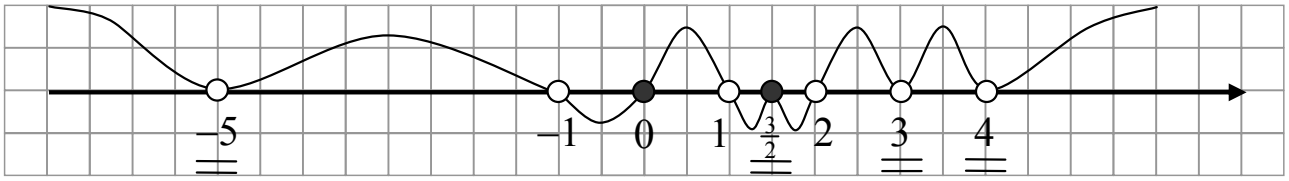


Рис. 1: до визначення знаків лівої частини канонічної нерівності (16) на відповідних інтервалах

5 етап. Запис шуканого розв'язку вихідної нерівності:

$x \in (-\infty;-5)\cup(-5;-1)\cup[0;1)\cup\left\{\frac{3}{2}\right\}\cup(2;3)\cup(3;4)\cup(4;+\infty)$.

3. Методичні поради щодо дидактичного забезпечення

Під час проведення відповідних уроків (занять) **однією з цілей є**: домогтися засвоєння учнями (студентами) схеми розв'язування раціональних нерівностей з однією змінною методом інтервалів;

а **одним із завдань** — виробити вміння виконувати дії відповідно до схеми розв'язування раціональних нерівностей методом інтервалів.

Серед публікацій, присвячених дидактичному (супроводу) забезпеченню теми «Розв'язання нерівностей методом інтервалів», мусимо відмітити статтю [14], в якій запропоновано значну кількість різнорівневих карток-варіантів з відповідями, та посібники [8], [18], [22], [25], [26].

I. Розв'язати нерівність

1. (a) $\dfrac{1}{x-2} < 0$; (b) $\dfrac{2}{x-2} \leqslant 0$; (c) $\dfrac{3}{x-2} > 0$; (d) $\dfrac{4}{x-2} \geqslant 0$.

2. (a) $\dfrac{(x+1)(x-2)}{x-3} < 0$; (b) $\dfrac{(x+1)(x-2)}{x-3} \geqslant 0$.

3. (a) $\dfrac{x-2}{2-x} < 0$; (b) $\dfrac{x-2}{2-x} \leqslant 0$; (c) $\dfrac{x-2}{2-x} > 0$; (d) $\dfrac{x-2}{2-x} \geqslant 0$.

4. (a) $\dfrac{x+2}{x^2} < 0$; (b) $\dfrac{x+2}{x^2-4} \geqslant 0$; (c) $\dfrac{1}{x-2} - \dfrac{x+2}{x^2+4} \geqslant -\dfrac{1}{2-x}$.

5. (a) $\dfrac{(x+1)(2-x)}{2x-6} < 0$;(b) $\dfrac{(x+1)(2-x)}{6-2x} \geqslant 0$;(c) $\dfrac{(x+1)(2-x)^4}{6-2x} \geqslant 0$.

6. (a) $\dfrac{1}{x^2-4x+5} < 0$; (b) $\dfrac{2}{x^4-4x^2+5} \leqslant 0$; (c) $\dfrac{-x^8+4x^4-5}{x^2+9} < 0$.

7. (a) $\dfrac{x-2}{x^2-4x+5} < 0$; (b) $\dfrac{x-2}{x^4-4x^2+5} \leqslant 0$; (c) $\dfrac{-x^8+4x^4-5}{x-2} < 0$.

8. (a) $\dfrac{4x^2-4x+1}{x^2+x-12} < 0$; (b) $\dfrac{x^2-5x+6}{x^2+2x-8} \leqslant 0$; (c) $\dfrac{(x-1)(x+3)^3}{x^2+6x+9} < 0$.

9. (a) $\dfrac{x^3-x^2+x-1}{x+8} \leqslant 0$; (b) $\dfrac{x^3-3x+2}{6-x} \leqslant 0$.

10. (a) $\dfrac{1}{x} \leqslant -x$; (b) $\dfrac{1}{x} \geqslant -x$; (c) $\dfrac{1}{x} \leqslant x$; (d) $\dfrac{1}{x} \geqslant x$.

11. (a) $\dfrac{x+5}{x+3} > 1$; (b) $\dfrac{3x+4}{x+1} \leqslant 2$; (c) $\dfrac{3}{x} \leqslant \dfrac{2}{x+1}$; (d) $\dfrac{3}{x-3} > \dfrac{1}{x+2}$.

II. Навести приклад раціональної нерівності, розв'язками якої була би множина

1. (a) $x \in R$; (c) $x = 5$; (e) $x \in (-5; 5)$; (g) $x \in [-5; 5)$;
   (b) $\emptyset$; (d) $x \in \{-5; 5\}$; (f) $x \in (-5; 5]$; (h) $x \in [-5; 5]$.

2. (a) $x \in (2; +\infty)$; (d) $x \in (2; +\infty) \cup \{-2\}$;
   (b) $x \in [2; +\infty)$; (e) $x \in [2; +\infty) \cup \{-2\}$;
   (c) $x \in (-\infty; 2)$; (f) $x \in (-\infty; -2) \cup \{2\}$.

3. (a) $x \in (-\infty; -2) \cup (2; +\infty)$; (e) $x \in (-\infty; -2) \cup (2; +\infty) \cup \{0\}$;
   (b) $x \in (-\infty; -2] \cup [2; +\infty)$; (f) $x \in (-\infty; -2] \cup [2; +\infty) \cup \{0\}$;
   (c) $x \in (-\infty; -2) \cup [2; +\infty)$; (g) $x \in (-\infty; -2) \cup [2; +\infty) \cup \{0\}$;
   (d) $x \in (-\infty; -2] \cup (2; +\infty)$; (h) $x \in (-\infty; -2] \cup (2; +\infty) \cup \{0\}$.

III. Для кожного значення параметра a розв'яжіть нерівність

1. (a) $\dfrac{x-a}{x-1} > 0$; (b) $\dfrac{x-a}{x-1} \geqslant 0$; (c) $\dfrac{x-1}{x-a} < 0$; (d) $\dfrac{x-1}{x-a} \leqslant 0$.

2. (a) $\dfrac{ax-2}{x-1} > 0$; (b) $\dfrac{ax-2}{x-1} \geqslant 0$; (c) $\dfrac{x-1}{ax+2} < 0$; (d) $\dfrac{x-1}{ax+2} \leqslant 0$.

3. (a) $\dfrac{ax-4a+5}{x-3} \geqslant 0$; (c) $\dfrac{x+2a}{(a-2)(x-4)} \geqslant 0$;
   (b) $\dfrac{(a-1)x-(2a+1)}{(a-1)(x-3)} > 0$; (d) $\dfrac{x(a+3)-2a}{(a+3)(x-3)} \leqslant 0$.

4. (a) $\dfrac{(x-a)^2}{x-1} > 0$;(b) $\dfrac{x^2-a^2}{x-1} \geqslant 0$; (c) $\dfrac{x-a}{(x-1)^2} < 0$;(d) $\dfrac{x^2-a^2}{(x-1)^2} \leqslant 0$.

5. (a) $\dfrac{(x-1)(x^2-ax)}{x} > 0$; (c) $\dfrac{(x-3)(x+4)}{(x-a)^2} < 0$;
   (b) $\dfrac{x^2+x(3a-1)-3a}{x-1} \geqslant 0$; (d) $\dfrac{x^2-3x+2}{x^2+ax} > 0$.

IV. При яких значеннях параметра a друга нерівність є наслідком першої нерівності

(1) $\dfrac{2a-10}{x^2-a^2} \geqslant 0$; (2) $-2 \leqslant x \leqslant 2$.

V. Дано дві нерівності

(1) $x^2 > 4$; (2) $1 + \frac{2a}{x-a} > 0$.

При яких значеннях параметра a:
– нерівності (1) і (2) є рівносильними?
– нерівність (1) є наслідком нерівності (2)?
– нерівність (2) є наслідком нерівності (1)?

VI. Доцільно розглянути й приклади нерівносильних перетворень, коли перетворення призводять до *появи* зайвих розв'язків нерівності, або ж *втрати* розв'язків нерівності.

Зауважимо, що наведена вище система задач, звісно ж, носить орієнтовно-суб'єктивний характер та не претендує на роль взірця та загальне визнання.

Прикінцеві висновки та зауваження

Не можна не погодитися з авторами роботи [17], які стверджують, що нерівності (так само як і рівняння) необхідно розглядати цілісно та з єдиної точки зору, єдиної позиції — процесу розв'язування нерівностей, як процесу їх послідовних перетворень. Теж вважаємо, що саме такий підхід дозволить інтегрувати всі типи нерівностей в єдину сукупність та допоможе:

з одного боку — сформувати в учнів (студентів) необхідні навички, а

з іншого боку — сформувати уявлення не лише про існуючі проблеми, а й про принципові можливості розв'язування нерівностей.

Цілком також погоджуємося і з авторами [18], які зазначають, що «... розв'язувати всі нерівності *методом інтервалів* і тим більше *методом заміни множників* зовсім не обов'язково. У той же час метод інтервалів досить універсальний, а метод заміни множників дозволяє звести складні нерівності до раціональних ... .»

Підводячи підсумки, можна констатувати, що:

1) і метод інтервалів, і узагальнений метод інтервалів є застосовними до нерівностей, права частина яких дорівнює нулеві, а ліва частина — добуток, або ж частка декількох алгебраїчних множників;

2) зазначений у вступі *узагальнений метод інтервалів* (за допомогою заміни множників) заснований на (так званій) раціоналізації нерівності, суть якої полягає у заміні множників більш простими, які мають такі самі проміжки знакосталості (що й вихідні множники) [10], [18], [27];

3) особливістю цього методу є принципова можливість зведення ірраціональних, логарифмічних та показникових нерівностей до рівносильної раціональної нерівності, яку не важко розв'язати методом інтервалів.

4) проте слід відмітити, що узагальнений метод інтервалів може спричинити й прикрі неприємності (наприклад: буває складним знайти «пробну» точку, або ж при з'ясуванні знаку складної функції в «пробній» точці обчислення можуть виявитися громіздкими та в результаті арифметичної помилки знак може виявитися невірним).

З урахуванням зазначеного, мусимо зізнатися, що супровідною метою представленої статті є пропаганда саме цього (на превеликий жаль маловідомого) методу.

Вважаємо, що ключову роль відіграє поміркована методична та дидактична доповнюваність зазначених аспектів, що в свою чергу поглибить знання учнів, розширить їх кругозір, буде спонукати до творчості навіть при розв'язуванні типових нерівностей. Особливу увагу при цьому слід приділяти задачам з параметром. Бо розв'язування нерівностей (рівнянь) з параметрами відкриває перед учнем (студентом) значне число евристичних прийомів загального характеру, цінних для математичного розвитку дослідників-початківців.

Гадаємо, що наведений матеріал допоможе випускникам старших класів під час комплексної підготовки до державної підсумкової атестації та зовнішнього незалежного оцінювання.

Також маємо надію, що наведений матеріал допоможе молодим вчителям математики під час цілісного усвідомлення змістової лінії «Нерівності» в шкільному курсі математики та може бути використаний (принаймні фрагментарно) під час проведення курсів підвищення кваліфікації вчителів математики.

Литература

1. Алгебра. 8 клас. Підручник для класів з поглибленим вивченням математики // А.Г. Мерзляк, В.Б. Полонський, М.С. Якір. — Х. : Гімназія, 2008. — 368 с.
2. Алгебра. 9 клас. Підручник для класів з поглибленим вивченням математики // А.Г. Мерзляк, В.Б. Полонський, М.С. Якір. — Х. : Гімназія, 2009. — 379 с.
3. Алгебра і початки аналізу : підруч. для 10 кл. загальноосвіт. навчальн. закладів : академ. рівень / Є. П. Нелін. — Х. : Гімназія, 2010. — 416 с.
4. *Арендар Т.Б.* Многочлени. Розв'язування рівнянь і нерівностей вищого степеня // Математика в школах України. — 2006. — №27/28. — С. 25–27.
5. *Арендар Т.Б.* Ще раз про раціональні рівняння і нерівності // Математика в школах України. — 2007. — №10 (166). — С. 25–27.

6. *Башмаков М.И.* Уравнения и неравенства // Библиотечка физико-математической школы. Выпуск 5. — М.: Наука, 1971. — 96 с.
7. *Бевз Г.П.* Методика навчання математики: Навчальний посібник для інститутів / Г.П. Бевз. — К. : Вища школа, 1989. — 367 с.
8. *Беляева Э.С.* Уравнения и неравенства с параметром. В 2 ч., Ч. 1 / Э.С. Беляева, А.С. Потапов, С.А. Титоренко. — М. : Дрофа, 2009. — 480 с.
9. *Голубев В.И., Тарасов В.И.* Эффективные пути решения неравенств // Пособие по математике для учителей средней школы и абитуриентов. — Львов: Научно-методический журнал «Квантор», вып. 10, 1991. — 94 с. — (Всесоюзная ассоциация учителей математики).
10. *Голубев В.И.* Решение сложных и нестандартных задач по математике. — М. : ИЛЕКСА, 2007. — 252 с.
11. *Гомонов С.А.* Замечательные неравенства: способы получения и примеры применения // Методические рекомендации к элективному курсу С.А. Гомонова. — 3-е изд., стереотип. — М.: Дрофа, 2007. — 160 с.
12. *Ионин Ю.* Метод интервалов / Ю. Ионин, В. Некрасов // Квант. — 1985. — №12 — С. 18–20.
13. *Затакавай В.* Решение неравенств методом интервалов // Квант. — 1990. — №5. — С. 63–66.
14. *Івахова Л.Я.* Раціональні нерівності. Метод інтервалів / Л.Я. Івахова // Математика в школах України. — 2009. — Травень (№ 13/14). — С. 30–34.
15. *Ізюмченко Л.В.* Раціональні рівняння та нерівності: Методичний посібник для виконання контрольних робіт учнями 10-11 класів / Л.В. Ізюмченко, В.В. Нічишина, Р.Я. Ріжняк // Серія: Навчальні матеріали для учнів заочної фізико-математичної школи. — Кіровоград, РВВ КДПУ ім. В.Винниченка, 2009. — 84 с.
16. *Канунников А.Л.* Уравнения и неравенства: Методическая разработка для учащихся заочного отделения Малого механико-математического факультета. — М.: Изд. ЦПИ при мех.-мат. фак. МГУ, 2008. — 64 с.
17. *Кушнір В.А.* Рівносильність рівнянь та нерівностей: Методичний посібник для виконання контрольних робіт учнями 10-11 класів / В.А. Кушнір, Г.А. Кушнір, Р.Я. Ріжняк // Серія: Навчальні матеріали для учнів заочної фізико-математичної школи. — Кіровоград, РВВ КДПУ ім. В.Винниченка, 2009. — 51 с.
18. *Лукаш О.В., Прес Е.М.* Метод інтервалів. – Х.: Вид. гр. «Основа», 2007. – 144 с. — (Б-ка журн. «Математика в школах України»; Вип. 6(54)).
19. Нестандартные методы решения уравнений и неравенств // С.Н. Олехник, М.К. Потапов, П.И. Пасиченко. — М.: Изд-во МГУ, 1991. — 217 с.

20. Олімпіадні задачі: розв'язання задач II етапу Всеукраїнської олімпіади з математики – 2014 / О.А. Кадубовський, Б.Б. Беседін, В.С. Сьомкін, Н.І. Труш, О.В. Чуйко. — Слов'янськ, 2015. — 64 с. — (Навчальний посібник, Серія: «Викладачі ДДПУ — учням, студентам, вчителям»; Випуск 13).
21. *Сиротина И.К.* Метод интервалов в системном подходе к обучению школьников математике // Народная асвета. – 2011. — №2. — С. 21–26.
22. *Фенько Л.М.* Метод интервалов в решении неравенств и исследовании функций. 8-11 классы учебное пособие / Л.М. Фенько. — 2-е изд., стер. — Москва : Дрофа, 2008. — 125 с.
23. *Цыпкин А.Г.* Справочник по математике для средних учебных заведений / А.Г. Цыпкин. — 4-е изд., пер. и доп. — М.: Наука, 1988. — 431 с.
24. *Шарыгин И.Ф.* Факультативный курс по математике: Решение задач: Учеб. пособие для 10 кл. сред. шк. — М.: Просвещение, 1989. — 252 с.
25. *Шахмейстер А.Х.* Дробно-рациональные неравенства. Пособие для школьников, абитуриентов и преподавателей. — 3-е изд., исправ. и доп. — М.: МЦНМО; СПб.: Петроглиф: Виктория плюс, 2008. — 248 с.: ил.
26. Задачи по математике. Уравнения и неравенства: Справочное пособие / Вавилов В.В., Мельников И.И., Олехник С.Н., Пасиченко П.И. — М.: Книга по Требованию, 2013. — 237 с.
27. *Мухина Г.Г.* Метод замены множителей — эффективный путь решения неравенств [Електронный ресурс] / Г. Г. Мухина. — Режим доступа http://festival.1september.ru/articles/521767/

Kadubovs'kyi O.A., Besedin B.B., Storozhilova N.V.
Donbas State Teachers' Training University, Slovians'k, Ukraine.

To the question about the application of algorithmic approach while solving of shot-rational inequalities with the method of intervals

In the article the authorial experience of teaching the decision methods of shot-rational inequalities at the mathematics lessons at school and during the forming of necessary competencies during the process of preparation of students of mathematical specialities of pedagogical institutions of higher education and in-plant training of teachers of mathematics is considered. An incremental algorithm, an illustrative example with detailed explanations and methodical advices concerning the didactic providing during the process of mastering the offered approach are brought.

Keywords: *shot-rational inequities, method of intervals, methods of solving, algorithmic approach.*

УДК 37.016:51

Беседін Б.Б., Слюсар В.І.

[1] *кандидат педагогічних наук, доцент кафедри геометрії та МВМ, ДВНЗ «ДДПУ»*

[2] *студент 5 курсу фізико-математичного факультету, ДВНЗ «ДДПУ»*

e-mail: besedin_boris@ukr.net, volodriv@gmail.com

МЕТОДИКА ПРОВЕДЕННЯ КОНТРОЛЮ ЗНАНЬ УЧНІВ НА УРОКАХ МАТЕМАТИКИ

Стаття присвячена проблемі проведення контролю знань учнів на уроках математики, пошуку шляхів вдосконалення даного методу перевірки знань і складанню методичних рекомендацій щодо покращення ефективності проведення контролю знань учнів на уроках математики.

Ключові слова: *контроль, методика, перевірка, діагностика, математика.*

Вступ

Під поняттям «контроль» розуміють виявлення, вимір і оцінку результатів навчально-пізнавальної діяльності тих, хто навчається. Процедуру виявлення і виміру називають перевіркою, яка є складним компонентом контролю.

Проблемою контролю і оцінки знань займалися такі вчені як Ю.К. Бабанський, А.А. Кузнєцов, Д.Ш. Матрос, Р.Н. Скобелєв, Н.Ф. Тализіна та ін. [4,6] Були розглянуті деякі можливі шляхи подолання недоліків позначки такими дослідниками як Ф.Р. Ільїн, А.Н. Майоров, І.В. Сарро, А.В. Попович та ін. [5,7]

Основною функцією контролю є забезпечення зворотного зв'язку між учителем і учнем, одержання учителем об'єктивної інформації про ступінь засвоєння навчального матеріалу, своєчасне виявлення недоліків і прогалин у знаннях.

Ефективність контролю залежить від його організації: часу проведення контрольних занять, їх частоти і послідовності, характеру і форм самостійної роботи учнів; використання дидактичних і технічних засобів навчання; поєднання методів контролю і самоконтролю; фіксування і оформлення даних контролю процесу навчання.

© Беседін Б.Б., Слюсар В.І., 2016

Науковою проблемою статті є виявлення принципів контролю знань та надання методичних рекомендацій з проведення контролю знань учнів на уроках математики.

Основна частина

Досліджуючи досить широкий спектр форм і методів контролю знань учнів на уроках математики, виявляємо, що у кожного з методів існують свої недоліки і переваги. Тому немає універсального метода, використання якого забезпечує найбільш повну і змістовну, систематичну і оперативну інформацію про хід навчального процесу і його результативність. Також слід зазначити, що ефективність контролю забезпечується дотриманням певних вимог.

Контроль знань учнів має носити індивідуальний характер, тобто обов'язковим є виявлення рівня знань кожного учня, його успіхів чи невдач; знання рівня самостійності учня в пізнавальному процесі, характеру труднощів, як він їх долає і якої допомоги потребує; особлива увага до учнів з фізичними вадами; вміле формулювання запитань, використання додаткових запитань при опитуванні слабких учнів та ін. Індивідуальний підхід до учнів полягає не в підвищенні чи заниженні до них вимог, а в умінні зважати на їх особливості і допомогти їм успішніше виконувати поставленні перед ними завдання.

Потрібно проводити фіксацію письмової перевірки, що дає можливість показати кожному учню (і його батькам) результати навчання, визначити рівень засвоєння навчального матеріалу, прогалини в знаннях і намітити заходи щодо їх усунення.

З огляду на психологічні і фізіологічні особливості деяких дітей застосування певних методів контролю не дає бажаних результатів: усна перевірка дає змогу більш сміливим учням дістати вищій бал, ніж тим, хто знає але не вміє впевнено висловлювати свої думки; велике значення має письмове опитування для учнів, які мають дефекти мови, дуже хвилюються при усній відповіді.

Контроль має бути систематичним, що привчає учнів систематично виконувати уроки, при цьому в класі створюється відповідний морально - психологічний клімат, коли «не знати — соромно». Необхідним є проведення систематичних письмових опитувань за допомогою самостійних міні-завдань, розробка системи усних опитувань, за якої оцінки виставляють і учням, які доповнювали відповіді інших, були активними на уроці; приділення особливої уваги слабким учням, спонукання їх до пізнавальної діяльності.

Відсутність системи у опитуванні учнів призводить до того, що вони вчать матеріал тільки тоді, коли відчувають, що їх можуть викликати. Щоб запобігти цьому, треба добре продумати систему контролю знань учнів.

Проводячи перевірку треба урізноманітнювати форми і методи контролю знань учнів, тобто в процесі навчання комплексно використовувати різні форми, методи і засоби контролювання, перевірки і оцінювання, що вилучає універсальність окремих методів і засобів діагностування.

Під час проведення контролюючих заходів слід перевіряти та оцінювати не тільки теоретичні знання, уміння та навички, але і вміння застосовувати їх на практиці, а також навички самостійної роботи учнів.

Контроль повинен мати тематичне спрямування. Тому здійснюючи опитування, проводячи контрольні роботи тощо, вчитель повинен визначити, які саме розділ програми, тема, вид знань, умінь та навичок учнів підлягають перевірці та оцінюванню.

Як і в звичайних класах, в класах з поглибленим вивченням математики учні мають неоднаковий рівень знань. Тому вчитель, проводячи контролюючі заходи,повинен диференціювати завдання, щоб найбільш повною мірою оцінити рівень опанування певної теми чи вид діяльності.

Для оптимізації контролю успішності учнів необхідно передбачати мінімальні затрати зусиль і часу педагогів та учнів для отримання обов'язкових відомостей про стан навчального процесу, що запобігає переобтяженню їх використанням зайвих завдань.

Дуже важливо, щоб контроль знань учнів носив заохочувальний, стимулюючий, а не караючий характер. Тому не щоразу контролюючі заходи мають закінчуватись оцінюванням.

Взагалі, не можна до оцінювання знань і вмінь учнів ставитись формально, сліпо додержуючись загальних рекомендацій. Щоразу треба дбати про те, щоб виставлені учням оцінки справді були стимулом у навчанні, а не відбивали в учнів бажання вчитись.

Висновки

Безумовно, роль контролю знань учнів в навчально-виховному процесі важко переоцінити, особливо в класах з поглибленим вивченням математики. Оскільки, у учнів в цих класах здебільшого присутня внутрішня мотивація при вивченні математики, то контролюючі завдання можуть мати нестандартну форму. Ця складова роботи вчителя вимагає певних зусиль, часу та майстерності. Форми, методи, стиль проведення контролю є показником компетентності вчителя. Організований належним чином контроль може позитивно впливати як на хід, так і на результати процесу навчання.

Література

1. *Басова Н.В.* Педагогика и практическая психология. — Ростов н/Д: Феникс, 2000. — 416 с.
2. *Мойсею Н.Є.* Педагогіка: навчальний посібник. — [Вид.3: Доповнення.] — К., 2001. — 608 с.
3. *Слєпкань З.І.* Методика навчання математики: [підруч. для студ. мат. спеціальностей пед. навч. закладів.] — К. : Зодіак-ЕКО, 2000. — 512 с.
4. *Бабанский Ю.К.* Методы обучения в современной образовательной школе. — М.: Просвещение, 1985. — 208 с.
5. *Ильин Ф.Г.* Некоторые пути преодоления формализма в оценке знаний учащихся. Преодоление формализма в обучении / Ф.Г. Ильин, И.И. Сарро — Л., 1989. — С. 137–146.
6. *Кузнецов А.А.* Контроль и оценка результатов обучения в условиях внедрения стандартов образования / А.А. Кузнєцов // Педагогическая информатика. — 1997. — С. 17–22.
7. *Майоров А.Н.* Мониторинг учебной эффективности / А.Н. Майоров // Школьные технологии. — М., 2000. — С. 96–131.

Besedin Boris B., Slyusar Volodumur I.
Donbas State Teachers' Training University, Slovians'k, Ukraine.

The methodology of testing knowledge of pupils in mathematics lessons

The article covers the problem of control knowledge of pupils in mathematics lessons, finding ways to improve this method of examination and the drafting of recommendations for improving the effectiveness of monitoring knowledge of pupils in mathematics lessons.

Keywords: *control, methodology, check, diagnostics, mathematics.*

УДК 378.016:51

Беседін Б.Б., Щенсневич Ю.Ю.

[1] *кандидат педагогічних наук, доцент кафедри геометрії та МВМ, ДВНЗ «ДДПУ»*

[2] *студент 5 курсу фізико-математичного факультету, ДВНЗ «ДДПУ»*

e-mail: besedin_boris@ukr.net; yuraschensnevich@gmail.com

СИСТЕМАТИЗАЦІЯ ЗНАНЬ УЧНІВ ПРИ ВИВЧЕННІ РІВНЯНЬ ТА НЕРІВНОСТЕЙ

Стаття присвячена проблемі узагальнення та систематизації знань учнів з курсу алгебри при вивченні рівнянь та нерівностей, необхідності узагальнення та систематизації в процесі навчання математики та розробці методичних рекомендацій щодо вирішення цієї проблеми.

Ключові слова: *узагальнення, систематизація, рівняння, нерівності.*

Вступ

На сучасному етапі життя наша держава реформує всі його сфери. Не обминув цей процес і школу. Одним із важливих напрямків реформування освітніх закладів є гуманізація процесу навчання, серед засобів досягнення якого є свідоме засвоєння учнями знань.

Результатом систематизованих знань являється розвиток логічного мислення, а саме: вміння вільно володіти такими важливими операціями та категоріями, як аналіз та синтез, абстрагування та конкретизація, індукція та дедукція, порівняння та узагальнення тощо. А це в свою чергу є однією із важливих задач математики. Так як систематизація займає важливе місце у навчанні, розвитку мислення та пам'яті, то на уроках математики їй відводиться значна роль.

Вперше задача формування в учнів системи наукових знань, а не часткових, ізольованих представлень була чітко сформульована в кінці 30-х років, коли серед принципів навчання з'явився принцип систематичності та послідовності. Проблема зведення знань до системи турбувала І.Я. Лернера, В.О. Онищука, а також В.П. Іржавцеву, Т. М. Хмару та ін.[2, 3, 4, 5]

Змістовно-методична лінія рівнянь, нерівностей та їх систем є однією з провідних складових шкільного курсу математики. У курсі алгебри увага приділяється методам розв'язання різноманітних рівнянь, їх дослідженню. Також рівняння посідають важливу роль у різних сферах застосування математики, у реалізації її прикладної спрямованості.

© Беседін Б.Б., Щенсневич Ю.Ю., 2016

Тому, **науковою проблемою статті** є виявлення та обґрунтування можливості подальшого вдосконалення методики систематизації знань учнів при вивчені рівнянь та нерівностей.

Основна частина

На основі аналізу психолого-педагогічної літератури, підручників, навчальних програм та досвіду роботи вчителів нами були сформульовані основні положення методики систематизації знань учнів при вивченні рівнянь та нерівностей:

1. Систему вправ підручників доцільно поповнити питаннями і завданнями систематизуючого характеру. В діючих підручниках з алгебри містяться вправи на узагальнення, класифікацію алгебраїчних понять, підведення частинного під загальне і таке інше, однак на наш погляд таких вправ недостатньо, тому учням доцільно пропонувати вправи спрямовані на узагальнення і конкретизацію алгебраїчних понять, їх класифікацію, виділення спільного і відмінного між поняттями і їх властивостями, а також різноманітні завдання, розв'язання яких передбачає певну творчу діяльність. При виконанні цих вправ учню необхідно із усіх засвоєних ним раніше алгебраїчних знань відібрати необхідні для розв'язання даної задачі, вибрати найбільш зручний спосіб розв'язання, знайти вихід із нестандартної ситуації.

2. Систематизація знань має відбуватися не тільки на заключному етапі вивчення окремої теми лінії «рівнянь і нерівностей» у формі уроків систематизації знань. Така робота має проводитися на різних етапах вивчення теми, з метою включення окремих понять, перетворень, методів розв'язання рівнянь і нерівностей в загальну систему знань. Основу систематизації знань учнів повинне складати створення цілісних уявлень по лінії «рівняння і нерівності» з обов'язковим включенням цих знань до системи знань у цілому. Необхідне обговорення з учнями питань, пов'язаних з рівносильністю, та знаходженням області допустимих значень. Серед вчителів існує точка зору, що альтернативою до перевірки є знаходження області допустимих значень рівняння (ОДЗ). Інколи поняття ОДЗ підміняється повністю або частково поняттям множини розв'язків. Наприклад, при розв'язанні рівняння $\sqrt{15-3x} = x+1$ ОДЗ знаходиться із умови $\begin{cases} 15-3x \geqslant 0 \\ x+1 \geqslant 0 \end{cases}$. Очевидно, що друга нерівність ніякого відношення до ОДЗ немає, по суті включення цієї нерівності в систему,

має метою не знаходження тих значень змінної при яких ліва та права частина рівняння має сенс, а тих, при яких воно має розв'язки.

3. Одним із засобів систематизації знань, пов'язаних з рівняннями та нерівностями, є завдання з параметрами, бо вони поєднують в собі значну частину матеріалу по даному курсу та є однією із важливих складових розвитку логічного мислення та творчих здібностей учнів. За допомогою вправ з параметрами можна пов'язати разом не тільки рівняння, нерівності та їх системи, функції та їх графіки, але й розв'язання задач, які зводяться до складання рівнянь, нерівностей чи їх систем з параметром. У програмі, що зараз є діючою, рівняння з параметрами зустрічаються у неявному вигляді, в курсі алгебри при вивченні лінійної та квадратичної функції розглядають у загальному вигляді наступні рівняння та знаходять їх розв'язки: $ax = b$ та $ax^2+bx+c = 0$, де a, b та c — деякі числа, тобто параметри.

4. Під час розв'язання рівнянь також важливо проводити міркування функціонально-графічного характеру, які базуються на тих чи інших властивостях функцій.

   Так, наприклад, використання властивості монотонності дозволяє розв'язати рівняння $\sqrt{2x+5} + \sqrt{x-1} = 8$ усно: функція $y = \sqrt{2x+5} + \sqrt{x-1}$ зростаюча, а $y = 8$ стала, то їх графіки перетинаються не більше, ніж в одній точці, а тому дане рівняння має не більше одного кореня, який неважко знайти методом підбору $(x = 10)$. Такі міркування є особливо доцільними в умовах тестування, коли учні обмежені в часі і від них очікується тільки відповідь.

5. Доцільно формувати в учнів вміння здійснювати всебічний аналіз рівнянь або нерівностей з метою оптимального вибору методів їх розв'язання. Кожний з розглянутих методів має як свої переваги, так і недоліки. Знання про них повинні бути власністю не тільки вчителя, а й учня. Учні мають розуміти, що жоден з методів не є панацеєю.

Висновки

Систематизація знань має відбуватися не тільки на заключному етапі вивчення окремої теми лінії «рівнянь і нерівностей» у формі уроків систематизації знань. Така робота має проводитися на різних етапах вивчення теми, з метою включення окремих понять, перетворень, методів розв'язання «рівнянь і нерівностей» в загальну систему знань

Під час розв'язання рівнянь також важливо проводити міркування функціонально-графічного характеру, які базуються на тих чи інших властивостях функцій.

Література

1. *Беседін Б.Б.* До проблеми розв'язанння рівнянь у середній школі / Б.Б. Беседін, В.С. Сьомкін // Рідна школа. — 2007. — №2. — С. 48–50.
2. *Зорина Л.Я.* Дидактические основы формирования системности знаний старшеклассников / Любов Яківна Зорина. — Москва: Педагогіка, 1978. — 128 с.
3. *Іржавцева В.П.* Систематизація та узагальнення знань учнів у процесі вивчення математики / В. П. Іржавцева, Л. Я. Федченко. — Київ: Радянська школа, 1998. — 205 с.
4. *Лернер І.Я.* Дидактичні основи методів навчання / Ісаак Якович Лернер. — Москва: Педагогіка, 1986. — 185 с.
5. *Онищук В.О.* Дидактика сучасної школи / Василь Онисимович Онищук. — Київ: Радянська школа, 1987. — 351 с.

Besedin Boris B., Shchensnevich Yurii Y.
Donbas State Teachers' Training University, Slovians'k, Ukraine.

The systematization of knowledge of pupils in case of study of the equations and inequalities

The article is devoted to a problem of generalization and systematization of knowledge of pupils at the rate of algebra during the studying of the equations and inequalities, need of generalization and systematization in the course of training in mathematics and development of methodical recommendations about the solution of this problem.

Keywords: *generalization, systematization, equations, inequalities.*

ЗМІСТ

Від редакційної колегії 3

До 75-річчя Пруна Анатолія Федоровича 4

Математика 13

Новіков О.О., Ровенська О.Г., Козаченко Ю.О., Попова К.Г., Сідаш А.О.
Екстремальна задача для потрійних операторів Фейєра 13

Бодра В.І., Шулик Т.В., Рудь К.О., Чаплик А.М., Мірошніченко Г.І.
Наближення інтегралів Пуассона у рівномірній метриці 18

Новіков О.О., Стьопкін А.В., Волик С.В., Сипчук Є.Ю.
Наближення потрійними сумами Фейєра 22

Пащенко З.Д., Вагнер Г.О.
Скінченні ланцюгові гаусові дроби 26

Кадубовський О.А., Баляса Н.П.
Перерахування двокольорових хордових O-діаграм роду 1, які мають один чорний (або сірий) цикл, відносно дії циклічної та діедральної груп 31

Фізика. Методика викладання фізики і астрономії в ЗОШ та ВНЗ 47

Надточий В.А., Хаперец Д.С., Шарап Р.А.
Влияние низкотемпературной микропластической деформации на электрические свойства кремниевых p-n-переходов 47

Надточий В.А., Нечволод Н.К.
Электрические свойства Ge и Si, деформированных при низких температурах 56

Билюнас М.В., Доценко С.Ф.
Поверхностные подветренные волны в сдвиговых течениях 61

Подольская О.Г., Безуглая А.Е.
Терминальное управление нелинейными системами с разрывами решений методом конечного состояния **66**

Лимарєва Ю.М., Цимбал М.В.
Проблема наступності сучасної фізико-математичної освіти **71**

Інформатика та методика її викладання 76

Рябухо О.М., Турка Т.В.
Застосування перестановочних поліномів в криптографії **76**

Стьопкін А.В., Пластун Д.А.
Алгоритм Форда-Фалкерсона **84**

Кайдан Н.В., Панюхно В.Д.
Аналіз сучасних операційних систем на прикладі останніх версій Windows та Linux. **92**

Федоренко О.Г., Величко К.В.
Використання хмарних технологій в формуванні самоосвітньої компетентності майбутніх учителів **97**

Глазова В.В., Жидкова О.Б.
Застосування дистанційних освітніх технологій під час вивчення інформатики в школі **102**

Глазова В.В., Денисенко Н.О.
Шляхи вдосконалення підготовки майбутнього вчителя математики до дистанційного навчального процесу **109**

Методика викладання математики в ЗОШ та ВНЗ .. 113

Плахотник М.В.
Про доцільність вивчення теореми Фалеса у шкільному курсі геометрії **113**

Карпенко Л.Н.
Повышение уровня математической подготовки студентов колледжа путем реализации технологии «лекция – гипертекст» **133**

Кадубовський О.А., Беседін Б.Б., Сторожилова Н.В.
До питання про застосування алгоритмічного підходу при розв'язуванні раціональних нерівностей методом інтервалів **140**

Беседін Б.Б., Слюсар В.І.
Методика проведення контролю знань учнів на уроках математики **156**

Беседін Б.Б., Щенсневич Ю.Ю.
Систематизація знань учнів при вивченні рівнянь та нерівностей . **160**

Інформація для авторів журналу **167**

При підготовці статті необхідно дотримуватись наступних вимог:

1. Рукописи подаються в одному примірнику, надруковані українською або російською мовою на одній стороні аркуша через один інтервал з широкими полями, старанно вичитані і розмічені. Примірник повинен бути оформлений відповідно до зазначених нижче вимог з обов'язковим підписом автора (усіх авторів) статті.

2. Стаття повинна включати:

   (a) прізвище та ініціали автора (авторів) та назва установи (де виконана робота) *українською* та *англійською* мовами;

   (b) назву статті (якщо заголовок статті довгий, то подати також його короткий варіант, не більше 40 знаків) *українською* та *англійською* мовами;

   (c) індекс УДК;

   (d) анотацію (до 5 рядків) *українською* та *англійською* мовами;

   (e) короткий вступ: постановку задачі, одержані результати;

   (f) формулювання одержаних автором нових результатів і повне їх доведення, які раніше ніде не були опубліковані або подані до розгляду в інший журнал;

3. До (друкованого варіанту) статті обов'язково додається електронний варіант, підготовлений у форматі LaTeX (*.tex) (та його копія у форматі PDF) з використанням стильового файлу (znp-fizmat-ddpu.sty) журналу та макетного файлу (priklad-oform-statti.tex) з дотриманням встановлених параметрів (znp-01-preambula.tex).

4. Адреса для листування: 84116, м. Слов'янськ, Донецька обл., вул. Г.Батюка, 19, Деканат фізико-математичного факультету ДДПУ;

   e-mail: znpfizmatsdpu@ukr.net, телефони: (06262) 3-26-59.

5. У випадку авторського колективу вказати прізвище та e-mail того з авторів, з ким редколегія може вести листування.

6. Файли прикладу оформлення статей та вимоги можна завантажити за адресою http://slavdpu.dn.ua/fizmatzbirnyk/znpFizmat2017.zip.

7. Статті, підготовлені в порушення зазначених вимог, до розгляду редакційною колегією журналу НЕ приймаються.

8. Статті до сьомого випуску (2017 рік) приймаються до 1 квітня 2017 року.

Наукове видання

Збірник наукових праць фізико-математичного факультету ДДПУ

Випуск №6

Для студентів, аспірантів та науковців в галузі фізико-математичних наук; вчителів та викладачів фізико-математичних дисциплін в ЗОШ та ВНЗ.

Комп'ютерна верстка
та підготовка оригінал-макету О.А. Кадубовський
Відповідальні за випуск О.А. Кадубовський, В.Є. Величко

Підписано до друку 30.04.2016 р.
Формат 60×84 1/16. Ум. др. арк. 10,5.
Тираж 100 прим. Зам. № 866.

Підприємець Маторін Б.І.
84116, м. Слов'янськ, вул. Г. Батюка, 19.
Тел./факс +38 06262 3-20-99. Email: matorinb@ukr.net

Свідоцтво про внесення суб'єкта видавничої справи до Державного реєстру видавців, виготівників і розповсюджувачів видавничої продукції ДК №3141, видане Державним комітетом телебачення та радіомовлення України від 24.03.2008 р.