МАТЕМАТИКА

УДК 519.175

Кадубовський О.А., Сипчук Є.Ю.

[1] *канд. фізико-математичних наук, доцент каф. математики та інформатики, ДВНЗ «ДДПУ»*
e-mail: kadubovs@ukr.net, ORCID 0000-0003-2045-810X

[2] *студент 1 курсу магістратури фізико-математичного факультету, ДВНЗ «ДДПУ»*
e-mail: sypchuk_egor@ukr.net, ORCID 0000-0003-0913-0461

ПРО ЧИСЛО НЕІЗОМОРФНИХ ДВОКОЛЬОРОВИХ ХОРДОВИХ O-ДІАГРАМ РОДУ 2, ЯКІ МАЮТЬ ОДИН СІРИЙ (АБО ЧОРНИЙ) ЦИКЛ

Для натуральних $n \geqslant 5$ встановлено явні формули для підрахунку числа неізоморфних 2-кольорових хордових O-діаграм (з n хордами), які мають лише один сірий (чорний) та $(n-4)$ чорних (відповідно сірих) циклів відносно дії циклічної групи (порядку n). Крім того, для натуральних 5 і 6 в явному вигляді наведено всі неізоморфні діаграми із зазначених класів, а для натуральних $5 \leqslant n \leqslant 36$ наведено точні значення числа неізоморфних таких діаграм.

Ключові слова: *2-кольорова хордова O-діаграма з n хордами, род діаграми, цикл діаграми, циклічна група.*

Вступ

Нагадаємо, що *хордовою діаграмою* або, коротко, n-діаграмою називають конфігурацію на площині, що складається з кола, $2n$ точок на ньому (які є вершинами правильного $2n$-кутника) та n хорд, що сполучають вказані точки.

Хордові діаграми називають *ізоморфними*, якщо одну можна одержати з іншої в результаті повороту.

Діаграми називають *еквівалентними*, якщо їх можна сумістити за допомогою повороту, дзеркального відбиття, або ж їх композиції.

Питаннями переліку певних класів хордових n-діаграм (відносно дії циклічної групи порядку $2n$ та діедральної групи порядку $4n$) займалась ціла низка відомих математиків: T.R.S. Walsh, A.B. Lehman, J. Riordan, J. Harer, D. Zagier. Серед сучасників слід виділити авторів робіт [7], [2], [8], [5], [1].

Задачі про підрахунок числа неізоморфних та нееквівалентних n-діаграм були повністю розв'язані у 1997–1998 рр. в роботах [7], [5], [2], [8].

Явні формули для підрахунку числа неізоморфних *планарних* (роду 0), *тороїдальних* (роду 1) n-діаграм та $2m$-діаграм *максимального роду* m було встановлено у 2000 р. в роботі [2]. Причому задача про підрахунок числа нееквівалентних діаграм *максимального роду* була повністю розв'язана лише у 2017 р. в роботі [6].

Слід констатувати, що *одержання явних формул для підрахунку числа неізоморфних (а тому і нееквівалентних)*, зокрема двокольорових, n-діаграм *фіксованого роду* виявилося досить складною задачею і в загальному випадку до сьогодні *нерозв'язаною проблемою*.

Для **двокольорових** діаграм найбільш вагомими є наступні результати:

задачі про підрахунок числа неізоморфних та нееквівалентних O- і N-діаграм (відповідно) повністю розв'язано в 2010 р. у роботі [11];

формули для підрахунку числа неізоморфних та нееквівалентних O-діаграм (N-діаграм), які мають *точно один цикл певного кольору* (чорний або ж сірий) одержано в 2010 та 2012 рр. у роботах [12] і [13] відповідно;

формули для підрахунку числа неізоморфних та нееквівалентних *планарних* O-діаграм (з n хордами) було встановлено у 2000 р. в роботі [1]; проте питання про узагальнення цієї задачі на випадок фіксованого числа чорних (або ж сірих) циклів було повністю розв'язано лише у 2014 р. в роботі [14];

задача про підрахунок числа неізоморфних O-діаграм *максимального* роду (з 1-им чорним та 1-им сірим циклом) була розв'язана у 2006 р. в роботі [10], а про число нееквівалентних таких діаграм — лише у 2015 р. в [15].

Слід зазначити, що навіть для класу $\Im^{n,1}_{k;l}$ O-діаграм (з n хордами) роду 1, які мають *точно* k чорних (або ж сірих) та $l = n-k-1$ сірих (відповідно чорних) циклів, питання про підрахунок числа нееквівалентних діаграм відносно дії циклічної та діедральної груп в загальному випадку **залишаються відкритими**. Явні формули для підрахунку числа неізоморфних та нееквівалентних діаграм з класів $\Im^{n,1}_{n-2;1}$, $\Im^{n,1}_{n-3;2}$ та $\Im^{n,1}_{n-4;3}$ (для початкових $l=1$, $l=2$ та $l=3$) одержано в роботах [16], [17] і [18] відповідно. Явні формули для підрахунку числа неізоморфних діаграм з більш ємного класу $\Im^{n,1}$ двокольорових хордових O-діаграм (з n хордами) роду 1 (без фіксації кількості чорних та/або сірих циклів) одержано в роботі [19]. Задача про підрахунок числа *нееквівалентних* діаграм з класу $\Im^{n,1}$ також залишається нерозв'язаною.

Дана стаття є логічним продовженням зазначеної серії робіт та присвячена встановленню формул для підрахунку числа неізоморфних діаграм з класу $\Im^{n,2}_{n-4;1}$. А її основною метою — виклад одержаних результатів, анонсованих автором в роботі [20].

Основна частина

В подальшому через $\Im_{k,l}^{n,g}$ будемо позначати клас двокольорових хордових O-діаграм (з n хордами) роду g, які мають точно l сірих та k чорних циклів. Тоді, як добре відомо (напр. [11]), справджується рівність

$$2g = n + 1 - k - l. \tag{1}$$

Більш детально з основними поняттями та попередніми відомостями з теорії переліку двокольорових хордових діаграм, можна ознайомитися в роботах [11], [16], [17].

1.1. Число діаграм з класу $\Im_{n-4;1}^{n,2}$ та його характеристичні підкласи

У 1997 р. в роботі [9, С. 4] вперше встановлено рекурентні формули, за допомогою яких є принципово можливим підрахунок числа діаграм з класу $\Im_{k,l}^{n,g}$ ($2g = n + 1 - k - l$).

Крім того, для початкових $g = 0; 1; 2; 3$ в [9, С. 8-9] встановлено явні формули, які пізніше також були одержані та уточнені й в [4, С. 833], а в роботі [3, С. 888] — для цілих $g \geqslant 0$ запропоновано іншу рекурентну формулу.

Для випадку $g = 2$ в роботі [4] наведено наступну формулу

$$d(n; k, l) = \frac{1}{6!} \cdot q_2(k; l) \cdot C_{n+1}^2 \cdot C_{n-1}^{k-1} \cdot C_{n-1}^{l-1}, \tag{2}$$

де

$$q_2(k; l) = 13\left(k^2 + l^2\right) + 5kl(k + l) + 86(k + l) + 47kl + 129. \tag{3}$$

В нашому випадку $g = 2$, $l = 1$. Звідки, з урахуванням формули (1), $k = n - 4$. І тому

$$q_2\left(n - 4; 1\right) =$$

$$= 13\left(\left(n - 4\right)^2 + 1\right) + 5\left(n - 4\right)\left(n - 3\right) + 86\left(n - 3\right) + 47\left(n - 4\right) + 129 =$$
$$= 13\left(n^2 - 8n + 17\right) + 5\left(n^2 - 7n + 12\right) + 86\left(n - 3\right) + 47\left(n - 4\right) + 129 =$$
$$= 18n^2 - 6n - 36 = 6\left(3n^2 - n - 6\right).$$

Таким чином, з урахуванням формули (2), маємо що

$$d(n; n - 4, 1) = \frac{(3n^2 - n - 6)}{5!} \cdot C_{n+1}^2 \cdot C_{n-1}^4 = \frac{(3n^2 - n - 6)}{8} \cdot C_{n+1}^6$$

та справедливість наступного

Твердження 1. *Для довільного натурального $n \geqslant 5$ число $d(n)$ діаграм з класу $\Im_{n-4;1}^{n,2}$ можна знайти за формулою*

$$\left|\Im_{n-4;1}^{n,2}\right| = \frac{(3n^2 - n - 6)}{8} \cdot C_{n+1}^6 = d(n). \tag{4}$$

DOI: https://doi.org/10.31865/2413-26672415-3079102020207113

Зауваження 1. *Оскільки діаграми з класу* $\Im^{n,2}_{n-4;1}$ *(крім* 1 *сірого циклу) мають точно* $k = n-4$ *чорних циклів (які містять всі* n *чорних дуг двокольорового* $2n$*-шаблону), то кожна з таких діаграм може мати лише один з наступних наборів чорних циклів:*

або один 5*-цикл (довжини 5) та* $(n-5)$ 1*-циклів (довжини 1);*

або один 4*-цикл,* один 2*-цикл та* $(n-6)$ 1*-циклів;*

або два 3*-цикли та* $(n-6)$ 1*-циклів;*

або один 3*-цикл,* два 2*-цикли та* $(n-7)$ 1*-циклів;*

або чотири 2*-цикли та* $(n-8)$ 1*-циклів.*

Таким чином, всі діаграми з класу $\Im^{n,2}_{n-4;1}$ *умовно можна поділити на п'ять зазначених вище класів —* A, B, D, E *та* F *відповідно.*

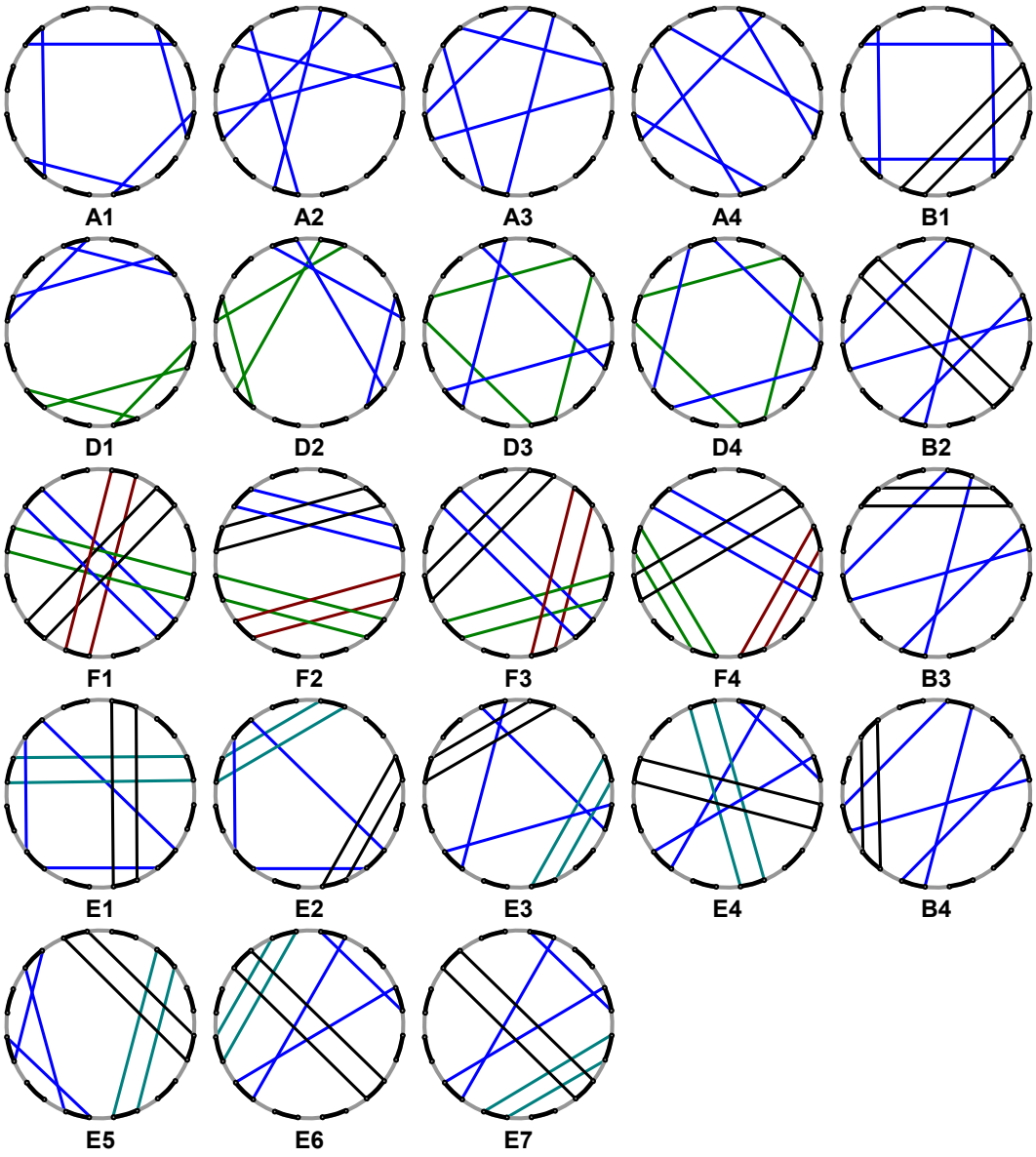

Рис. 1: типові представники характеристичних підкласів діаграм з класу $\Im^{n,2}_{n-4;1}$

Якісний аналіз можливих типів діаграм із класів A, B, D, E і F дозволяє виділити лише 23 підкласи (об'єднання яких дає $\Im^{n,2}_{n-4;1}$ та перетин будь-яких двох із них є порожньою множиною), типові представники яких зображено на рис. 1 та (заради зручності) позначено у спосіб: $A1-A4$, $B1-B4$, $D1-D4$, $E1-E7$ та $F1-F4$ відповідно.

1.2. Число неізоморфних діаграм з класу $\Im^{n,2}_{n-4;1}$

За лемою Бернсайда (див. напр. [2], [11], [12]) число $d^*(n)$ неізоморфних (нееквівалентних відносно дії циклічної групи порядку n) діаграм з класу $\Im^{n,2}_{n-4;1}$ можна знайти за допомогою співвідношення

$$d^*(n)=\frac{1}{n}\left(d(n)+\sum_{i|n,\ i\neq n}\phi\left(\frac{n}{i}\right)\cdot\rho\,(n,i)\right), \tag{5}$$

де: $d(n)=\left|\Im^{n,2}_{n-4;1}\right|$;
$\phi(q)$ — функція Ейлера (кількість натуральних менших за q чисел, взаємнопростих із ним), а $\rho\,(n,i)$ — число тих діаграм з класу $\Im^{n,2}_{n-4;1}$, які самосуміщуються при повороті (за годинниковою стрілкою) на кут

$$\omega(n,i)=\frac{2\pi}{2n}\cdot 2i=2\pi\cdot\frac{i}{n}.$$

Очевидно, що для дільників $i\neq n$ числа n кут $\omega(n,i)\leqslant 180^0$. Більше того, поклавши $j=\frac{n}{i}$, співвідношення (5) можна подати у вигляді

$$d^*(n)=\frac{1}{n}\left(d(n)+\sum_{j|n,\ j\neq 1}\phi(j)\cdot\rho\left(n,\tfrac{n}{j}\right)\right), \tag{6}$$

де $\rho\left(n,\frac{n}{j}\right)$ — число тих діаграм з класу $\Im^{n,2}_{n-4;1}$, які самосуміщуються при повороті (за годинниковою стрілкою) на кут

$$\omega\left(n,\tfrac{n}{j}\right)=\frac{2\pi}{j},$$

де j — дільник n, $j\neq 1$.

Теорема 1. *Для натуральних $n\geqslant 5$ число $d^*(n)$ неізоморфних (нееквівалентних відносно дії циклічної групи порядку n) діаграм з класу $\Im^{n,2}_{n-4;1}$ можна обчислити за формулою*

$$d^*(n)=\frac{1}{n}\left(\frac{(3n^2-n-6)}{8}\cdot C^6_{n+1}+\sum_{j|n,\ j\in\{2;3;4;5;6;8\}}\phi(j)\cdot\rho\left(n,\tfrac{n}{j}\right)\right), \tag{7}$$

DOI: https://doi.org/10.31865/2413-26672415-3079102020207113

де: $\phi(q)$ *— функція Ейлера;* $\forall j \in N : \frac{n}{j} \notin N$ *величини* $\rho\left(n, \frac{n}{j}\right) \equiv 0$, *а* $\forall j \in \{2;3;4;5;6;8\} : \frac{n}{j} \in N$ *величини* $\rho\left(n, \frac{n}{j}\right)$ *визначаються за допомогою співвідношень*

$$\rho\left(n, \frac{n}{5}\right) = \frac{3n}{5}, \qquad \rho\left(n, \frac{n}{6}\right) = \frac{n}{6},$$

$$\rho\left(n, \frac{n}{8}\right) = \frac{n}{8}, \qquad \rho\left(n, \frac{n}{3}\right) = \frac{n(n-3)}{6}, \tag{8}$$

$$\rho\left(n, \frac{n}{4}\right) = \frac{n(n-4)}{32}, \quad \rho\left(n, \frac{n}{2}\right) = \frac{n(n-2)(n-4)(5n+2)}{384}.$$

Доведення. Не важко переконатися в тому, що серед діаграм з характеристичних підкласів $A4$; $B1$ – $B4$, $D2$, $E1$ – $E7$, $F3$ та $F4$ взагалі немає таких, які самосуміщуються при повороті на певний кут

$$\omega_j = \omega\left(n, \tfrac{n}{j}\right) = \tfrac{2\pi}{j} < 2\pi, \quad \text{при} \quad j \in \{2, ..., n\}.$$

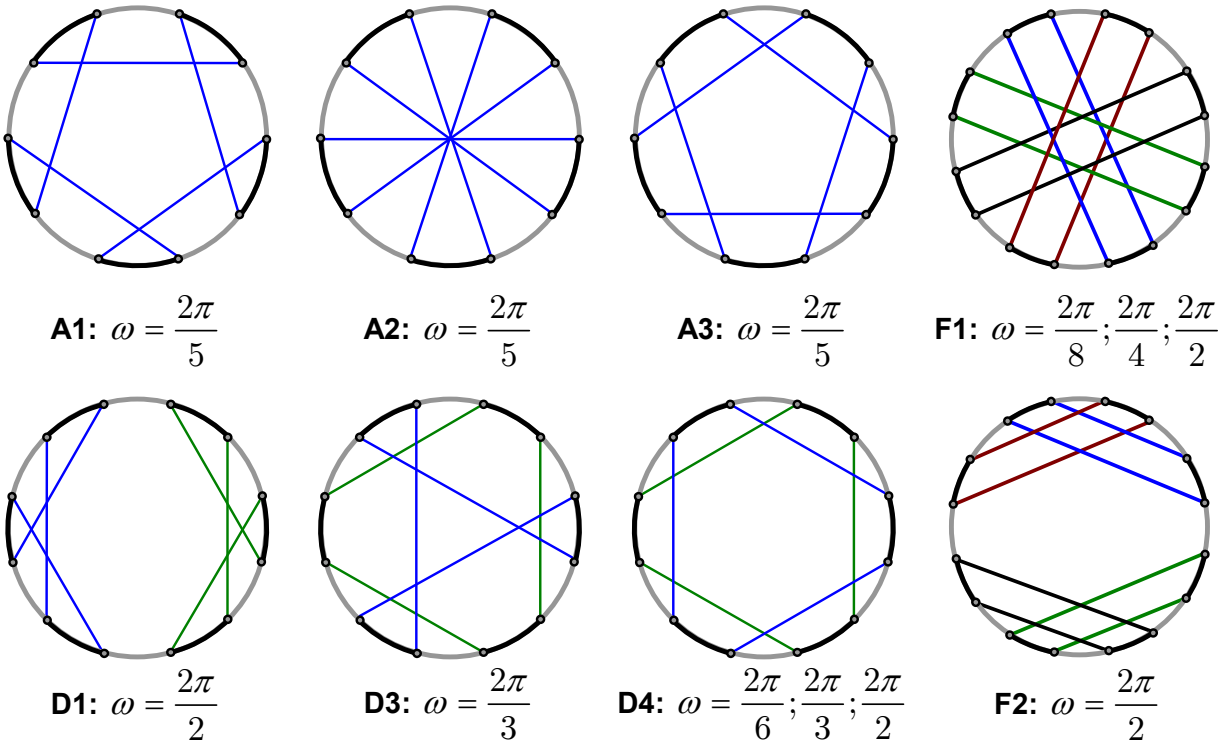

Рис. 2: всі типи діаграм з класу $\Im^{n,2}_{n-4;1}$, які самосуміщуються при повороті на кут $\omega \leqslant \pi$

1) Діаграми з підкласів $A1$, $A2$ та $A3$ самосуміщуються при повороті на певний кут $\omega_j < 2\pi$ лише за умов, коли n ділиться на 5, а поворот здійснюється на кут $\omega = \frac{2\pi}{5}$ (при $j = 5$);

для натуральних $k = \frac{n}{5} \geqslant 1$ число таких діаграм (для кожного з підкласів $A1$, $A2$ та $A3$) становить C_k^1; звідки для натуральних $n = 5k \geqslant 5$ число зазначених діаграм становить

$$\rho_{A1}\left(n, \frac{n}{2}\right) = \rho_{A2}\left(n, \frac{n}{2}\right) = \rho_{A3}\left(n, \frac{n}{2}\right) = C_{\frac{n}{5}}^1 = \frac{n}{5}.$$

2) Діаграми з підкласу $D1$ самосуміщуються при повороті на певний кут $\omega_j < 2\pi$ лише за умов, коли n ділиться на 2, а поворот здійснюється на кут $\omega = \frac{2\pi}{2}$ (при $j = 2$);

для натуральних $k = \frac{n}{2} \geqslant 3$ число таких діаграм становить $3 \cdot C_k^3$; звідки для натуральних $n = 2k \geqslant 6$ число зазначених діаграм становить

$$\rho_{D1}\left(n, \frac{n}{2}\right) = 3 \cdot C_{\frac{n}{2}}^3.$$

3) Діаграми з підкласу $D3$ самосуміщуються при повороті на певний кут $\omega_j < 2\pi$ лише за умов, коли n ділиться на 3, а поворот здійснюється на кут $\omega = \frac{2\pi}{3}$ (при $j = 3$);

для натуральних $k = \frac{n}{3} \geqslant 2$ число таких діаграм становить $2 \cdot C_k^2$; звідки для натуральних $n = 3k \geqslant 6$ число зазначених діаграм становить

$$\rho_{D3}\left(n, \frac{n}{3}\right) = 2 \cdot C_{\frac{n}{3}}^2.$$

4) Діаграми з підкласу $F2$ самосуміщуються при повороті на певний кут $\omega_j < 2\pi$ лише за умов, коли n ділиться на 2, а поворот здійснюється на кут $\omega = \frac{2\pi}{2}$ (при $j = 2$);

для натуральних $k = \frac{n}{2} \geqslant 4$ число таких діаграм становить $4 \cdot C_k^4$; звідки для натуральних $n = 2k \geqslant 8$ число зазначених діаграм становить

$$\rho_{F2}\left(n, \frac{n}{2}\right) = 4 \cdot C_{\frac{n}{2}}^4.$$

5) Діаграми з підкласу $D4$ самосуміщуються при повороті на певний кут $\omega_j < 2\pi$ лише за умов, коли n ділиться на 2, 3 або ж на 6. Причому:

в 1-му випадку поворот здійснюється на кут $\omega = \frac{2\pi}{2}$ (при $j = 2$);

в 2-му випадку поворот здійснюється на кут $\omega = \frac{2\pi}{3}$ (при $j = 3$);

в 3-му випадку — на кут $\omega = \frac{2\pi}{6}$ (при $j = 6$).

Крім того, не важко перевірити, що:

в 1-му випадку для натуральних $k = \frac{n}{2} \geqslant 3$ число відповідних діаграм становить C_k^3; звідки для натуральних $n = 2k \geqslant 6$ число зазначених діаграм становить

$$\rho_{D4}\left(n, \frac{n}{2}\right) = C_{\frac{n}{2}}^3;$$

DOI: https://doi.org/10.31865/2413-26672415-3079102020207113

в 2-му випадку для натуральних $k = \frac{n}{3} \geqslant 6$ число відповідних діаграм становить C_k^2; звідки для натуральних $n = 3k \geqslant 6$ число зазначених діаграм становить

$$\rho_{D4}\left(n, \frac{n}{3}\right) = C_{\frac{n}{3}}^2;$$

в 3-му випадку для натуральних $k = \frac{n}{6} \geqslant 1$ число відповідних діаграм становить C_k^1; звідки для натуральних $n = 6k \geqslant 6$ число зазначених діаграм становить

$$\rho_{D4}\left(n, \frac{n}{6}\right) = C_{\frac{n}{6}}^1 = \frac{n}{6}.$$

6) Діаграми з підкласу $F1$ самосуміщуються при повороті на певний кут $\omega_j < 2\pi$ лише за умов, коли n ділиться на 2, 4 або ж на 8. Причому:

в 1-му випадку поворот здійснюється на кут $\omega = \frac{2\pi}{2}$ (при $j = 2$);

в 2-му випадку — на кут $\omega = \frac{2\pi}{4}$ (при $j = 4$);

в 3-му випадку — на кут $\omega = \frac{2\pi}{8}$ (при $j = 8$).

Не важко перевірити, що:

в 1-му випадку для натуральних $k = \frac{n}{2} \geqslant 4$ число відповідних діаграм становить C_k^4; звідки для $n = 2k \geqslant 8$ число зазначених діаграм становить

$$\rho_{F1}\left(n, \frac{n}{2}\right) = C_{\frac{n}{2}}^4;$$

в 2-му випадку для натуральних $k = \frac{n}{4} \geqslant 2$ число відповідних діаграм становить C_k^2; звідки для $n = 4k \geqslant 8$ число зазначених діаграм становить

$$\rho_{F1}\left(n, \frac{n}{4}\right) = C_{\frac{n}{4}}^2 = \frac{n(n-4)}{32};$$

в 3-му випадку для натуральних $k = \frac{n}{8} \geqslant 1$ число відповідних діаграм становить C_k^1; звідки для $n = 8k \geqslant 8$ число зазначених діаграм становить

$$\rho_{F1}\left(n, \frac{n}{8}\right) = \frac{n}{8}.$$

Таким чином маємо, що:

$$\rho\left(n, \tfrac{n}{5}\right) = \rho_{A1}\left(n, \tfrac{n}{2}\right) + \rho_{A2}\left(n, \tfrac{n}{2}\right) + \rho_{A3}\left(n, \tfrac{n}{2}\right) = \frac{3n}{5};$$

$$\rho\left(n, \tfrac{n}{6}\right) = \rho_{D4}\left(n, \tfrac{n}{6}\right) = \frac{n}{6}; \quad \rho\left(n, \tfrac{n}{8}\right) = \rho_{F1}\left(n, \tfrac{n}{8}\right) = \frac{n}{8};$$

$$\rho\left(n, \tfrac{n}{4}\right) = \rho_{F1}\left(n, \tfrac{n}{4}\right) = \frac{n(n-4)}{32};$$

$$\rho\left(n, \tfrac{n}{3}\right) = \rho_{D3}\left(n, \tfrac{n}{3}\right) + \rho_{D4}\left(n, \tfrac{n}{3}\right) = 2 \cdot C_{\frac{n}{3}}^2 + C_{\frac{n}{3}}^2 = \frac{n(n-3)}{6};$$

$$\rho\left(n, \tfrac{n}{2}\right) = \rho_{D1}\left(n, \tfrac{n}{2}\right) + \rho_{D4}\left(n, \tfrac{n}{2}\right) + \rho_{F1}\left(n, \tfrac{n}{2}\right) + \rho_{F2}\left(n, \tfrac{n}{2}\right) =$$

$$= 3C_{\frac{n}{2}}^3 + C_{\frac{n}{2}}^3 + C_{\frac{n}{2}}^4 + 4C_{\frac{n}{2}}^4 = 5C_{\frac{n}{2}}^4 + 4C_{\frac{n}{2}}^3 = \frac{n(n-2)(n-4)(5n+2)}{384}. \qquad \square$$

На рис. 3 та 4 в явному вигляді наведено всі неізоморфні (нееквівалентні відносно дії циклічної групи) діаграми з класів $\Im_{1;1}^{5,2}$ та $\Im_{2;1}^{6,2}$ відповідно.

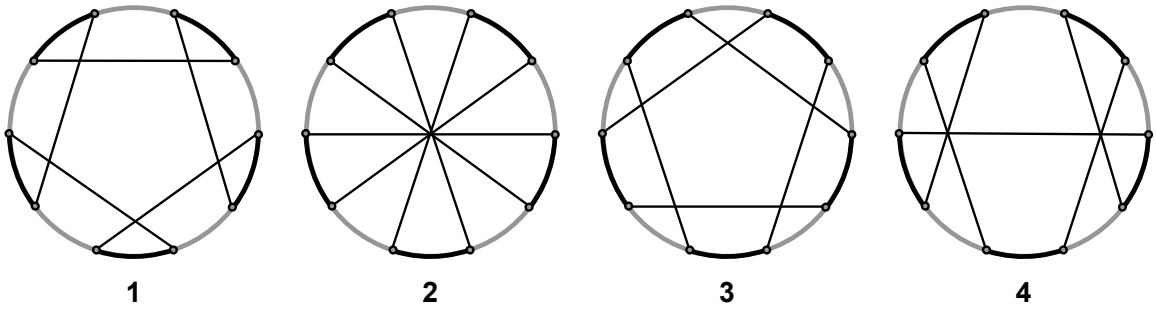

Рис. 3: всі неізоморфні діаграми з класу $\Im_{1;1}^{5,2}$

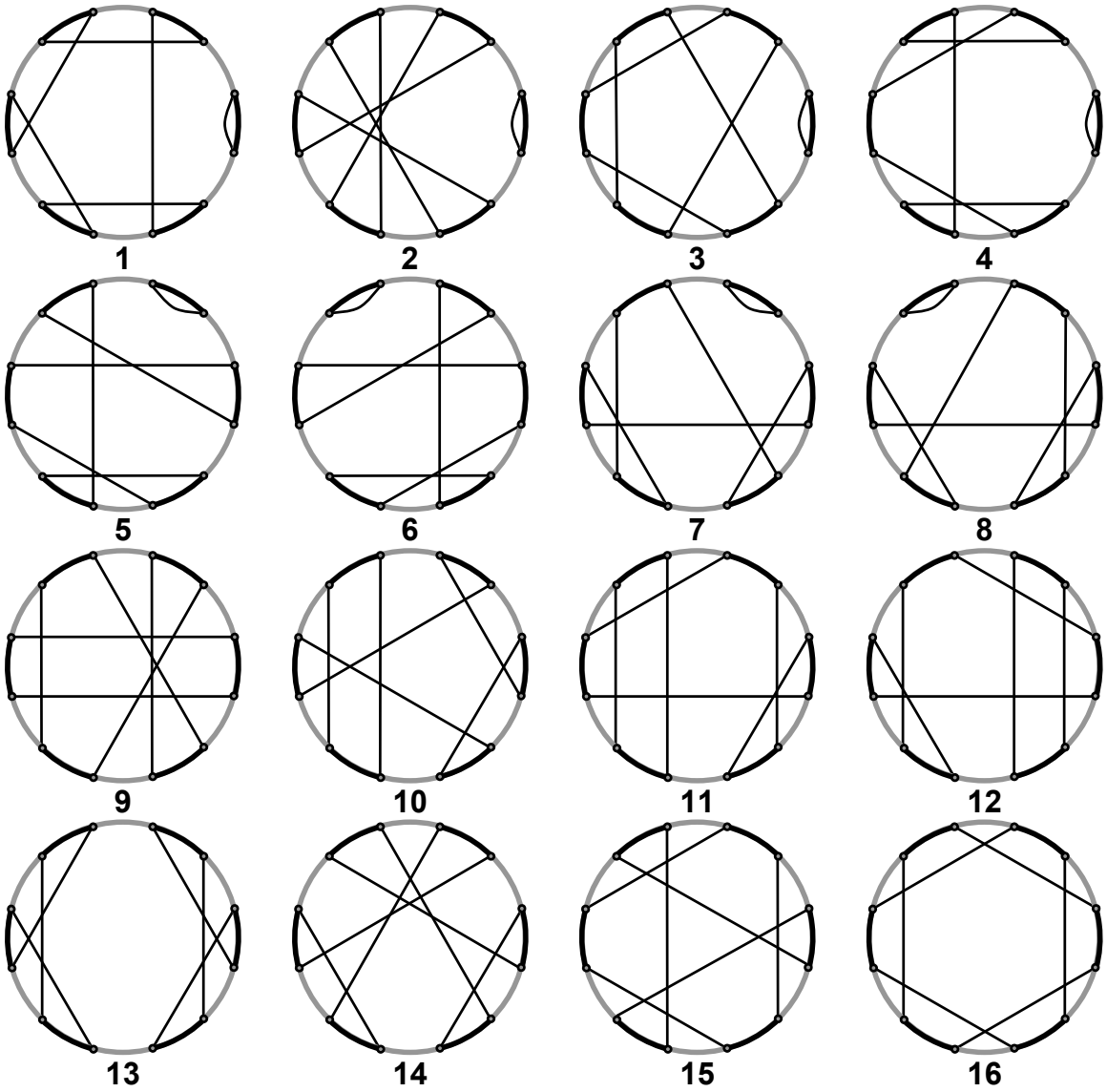

Рис. 4: всі неізоморфні діаграми з класу $\Im_{2;1}^{6,2}$

DOI: https://doi.org/10.31865/2413-26672415-3079102020207113

Додатки та прикінцеві зауваження

Зауваження 2. *За допомогою одержаних формул можна підрахувати й число неізоморфних діаграм з класу* $\Im^{n,2}_{1;n-4}$

Повторюючи міркування, аналогічні тим, що наведено у роботі [5], не важко встановити справедливість наступного твердження

Твердження 2. *При* $n \to \infty$ *величини* $d^*(n)$ *та*

$$\delta(n) = \frac{d(n)}{n} = \frac{(3n^2 - n - 6)(n+1)(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{5760}$$

є еквівалентними нескінченно великими величинами.

n	$d(n)$	$d^*(n)$	$[\delta(n)]$	n	$d(n)$	$d^*(n)$	$[\delta(n)]$
5	8	4	1	**21**	12 087 306	575 592	575 586
6	84	16	14	**22**	17 968 566	816 858	816 753
7	469	67	67	**23**	26 212 571	1 139 677	1 139 677
8	1 869	237	233	**24**	37 589 475	1 566 377	1 566 228
9	5 985	667	665	**25**	53 068 015	2 122 723	2 122 720
10	16 401	1 649	1 640	**26**	73 854 495	2 840 739	2 840 557
11	39 963	3 633	3 633	**27**	101 437 245	3 756 943	3 756 935
12	88 803	7 417	7 400	**28**	137 637 045	4 915 841	4 915 608
13	183 183	14 091	14 091	**29**	184 664 025	6 367 725	6 367 725
14	355 355	25 405	25 382	**30**	245 181 573	8 173 019	8 172 719
15	654 654	43 650	43 643	**31**	322 377 804	10 399 284	10 399 284
16	1 154 062	72 166	72 128	**32**	420 045 164	13 126 768	13 126 411
17	1 958 502	115 206	115 206	**33**	542 668 764	16 444 518	16 444 508
18	3 215 142	178 678	178 619	**34**	695 524 060	20 457 020	20 456 590
19	5 126 010	269 790	269 790	**35**	884 784 516	25 279 560	25 279 557
20	7 963 242	398 242	398 162	**36**	1 117 639 908	31 046 082	31 045 553

Табл. 1: початкові значення величин $d(n)$, $d^*(n)$ та $[\delta(n)]$

Висновки

Таким чином, в представленій роботі розв'язано задачу про підрахунок числа неізоморфних діаграм з класу $\Im^{n,2}_{n-4;1}$. Цілком природно подальшу роботу спрямувати на одержання явних формул для підрахунок числа неекквівалентних діаграм з класу $\Im^{n,2}_{n-4;1}$ та узагальнення одержаних результатів для класу $\Im^{n,2}_{k,l}$ на випадок довільного $1 \leqslant l \leqslant n-4$.

Література

1. *Callan D., Smiley L.* Noncrossing partitions under reflection and rotation; preprint, arXiv:math/0510447 [math.CO], 2000.
2. *Cori R., Marcus M.* Counting non-isomorphic chord diagrams. Theoretical Computer Science. 1998. Vol. 204. P. 55–73.

3. *Chapuy G.* A new combinatorial identity for unicellular maps, via a direct bijective approach. Advances in Applied Mathematics. 2011. Vol. 47, No. 4. P. 874–893.
4. *Goupil A., Schaeffer G.* Factoring n-cycles and counting maps of given genus. European Journal of Combinatorics. 1998. Vol. 19, No. 7. P. 819–834.
5. *Khruzin A.* Enumeration of chord diagrams; preprint, arXiv:math/0008209 [math.CO], 1998.
6. *Krasko E.* Counting Unlabelled Chord Diagrams of Maximal Genus; preprint, arXiv:1709.00796 [math.CO], 2017.
7. *Li B., Sun H.* Exact number of chord diagrams and an estimation of the number of spine diagrams of order n. Chinese Science Bulletin. 1997. Vol. 42, No. 9. P. 705–720.
8. *Stoimenov A.* Enumeration of chord diagrams and an upper bound for Vassiliev invariants. Journal of Knot and its Ramifications. 1998. Vol. 7, No. 1. P. 93–114.
9. *Адрианов Н.М.* Аналог формулы Харера-Цагира для одноклеточных двукрашенных карт. Функциональный анализ и его приложения. 1997. Том 31, № 3. С. 1–9.
10. *Кадубовський О.* Про один клас хордових діаграм максимального роду. Вісник Київського університету Серія: фізико-математичні науки. 2006. Вип. 1. С. 17–27.
11. *Кадубовський О.А., Сторожилова О.В., Сторожилова Н.В.* Двокольорові O- і N-діаграми. Пошуки і знахідки. Серія: фізико-математичні науки. 2010. Том I, Вип. 10. С. 41–50.
12. *Кадубовський О.А., Саприкіна Ю.С., Мазур С.Ю.* Двокольорові O-діаграми з одним чорним циклом. Пошуки і знахідки. Серія: фізико-математичні науки. 2010. Том I, Вип. 10. С. 51–60.
13. *Кадубовский А.А.* Двухцветные хордовые N-диаграммы с одним черным циклом. Труды института прикладной математики и механики НАН Украины. 2012. Том 24. С. 134–146.
14. *Кадубовский А.А.* О числе топологически неэквивалентных функций с одной вырожденной критической точкой типа седло на двумерной сфере, II. Труды международного геометрического центра. 2015. Том 8, № 1. С. 46–61.
15. *Кадубовський О.А.* Перерахування топологічно нееквівалентних гладких мінімальних функцій на замкнених поверхнях // Топологія відображень маловимірних многовидів : Збірник праць Інституту математики НАН України. 2015. Том 12, № 6. С. 105–145.

16. *Кадубовський О.А., Баляса Н.П.* Перерахування двокольорових хордових O-діаграм роду 1, які мають один чорний (або сірий) цикл, відносно дії циклічної та діедральної груп. Збірник наукових праць фізико-математичного факультету ДДПУ. 2016. Вип. 6. С. 31–46.
17. *Кадубовський О.А., Калініченко Я.В.* Перерахування двокольорових хордових O-діаграм роду 1, які мають два чорних (або сірих) циклів, відносно дії групи діедра. Збірник наукових праць фізико-математичного факультету ДДПУ. 2018. Вип. 8. С. 30–45.
18. *Кадубовський О.А.* Перерахування двокольорових хордових О-діаграм роду 1, які мають три сірих (або чорних) цикли, відносно дії групи діедра. Збірник наукових праць фізико-математичного факультету ДДПУ. 2019. Вип. 9. С. 25-41.
19. *Kadubovs'kyi O.* Enumeration of topologically non-equivalent functions with one degenerate saddle critical point on two-dimensional torus. International Conference «Morse theory and its applications», dedicated to the memory and 70th anniversary of Volodymyr Sharko (25.09.1949 - 07.10.2014). September 25-28, 2019, Kyiv, Ukraine : Conference materials. Kyiv, Institute of Mathematics of National Academy of Sciences of Ukraine, 2019. P. 19-21.
20. *Кадубовський О.А.* Перерахування неізоморфних двокольорових хордових О-діаграм роду два з одним сірим (або чорним) циклом // Матеріали XXII Міжнародного науково-практичного семінару «Комбінаторні конфігурації та їх застосування». — Кропивницький, 15-16 травня 2020 р. (в друці).

Kadubovs'kyi Oleksandr A., Sypchuk Ye.
Donbas State Pedagogical University, Sloviansk, Ukraine.

On the number of non-isomorphic 2-color chord O-diagrams of the genus two that have one grey (or black) face

In this paper we consider 2-color chord O-diagrams (of order n) with one grey and $(n-4)$ black faces under the action of the rotation group (cyclic group of the order n).

For natural 5 and 6 we have illustrated all non-isomorphic of such diagrams. We have established explicit formulas for counting the number of non-isomorphic diagrams from the specified class. In addition, for natural $5 \leqslant n \leqslant 36$ we have also listed the exact value of the number of non-isomorphic such diagrams.

Keywords: *2-color chord O-diagrams, genus of a diagram, faces of a diagram, cyclic group.*