Міністерство освіти і науки України

Слов'янський державний педагогічний університет

Вісник Слов'янського державного педагогічного університету

Математика
2(4) 2010

Головний редактор С.М. Чуйко

Присвячується пам'яті
В.І. Рукасова

Слов'янськ, 24 вересня 2010

УДК 517:512:514

У збірнику представлено роботи з широкого кола питань у різних галузях математики. Для науковців, викладачів, аспірантів і студентів ВНЗ відповідних спеціальностей.

Адреса редакції:	84 116, Донецька обл., м. Слов'янськ, вул. Г. Батюка, 19, chujko-slav@inbox.ru
Телефони	(0626) 66-00-24, (06262) 3-97-87

Зміст

Пам'яті Володимира Івановича Рукасова

9 березня 2009 року на 56 році життя помер відомий український учений, ректор Слов'янського державного педагогічного університету, доктор фізико-математичних наук, професор Володимир Іванович Рукасов. Народився Володимир Іванович 5 жовтня 1953 року в місті Костянтинівка Донецької області. У 1975 році Володимир Іванович закінчив з відзнакою фізико-математичний факультет Слов'янського державного педагогічного інституту за фахом "математика і фізика". Після закінчення інституту три роки пра-

цював учителем математики і фізики Іллічівської середньої школи Костянтинівського району Донецької області.

У Слов'янському державному педагогічному університеті працював із 1978 р.: асистентом кафедри математичного аналізу, старшим викладачем кафедри математичного аналізу, завідувачем кафедри математичного аналізу (1978 – 1986), проректором з науково-дослідної роботи (1986 – 1998), проректором з навчальної роботи (1998 – 2003), ректором з 2003 р.

Володимир Іванович Рукасов був учнем члена-кореспондента НАН України, доктора фізико-математичних наук, професора, завідувача відділом теорії функцій, заступника директора Інституту математики НАН України, члена бюро Відділення математики НАН України Олександра Івановича Степанця. Після закінчення аспірантури Інституту математики АН УРСР у 1984 році захистив дисертацію на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук. У 2003 році захистив дисертацію на здобуття наукового ступеня доктора фізико-математичних наук на тему "Дослідження екстремальних задач теорії наближення функцій"; у цьому ж році йому було присвоєно вчене звання професора за кафедрою математичного аналізу.

У коло наукових інтересів Володимира Івановича Рукасова входили проблеми теорії наближення функцій і теорії лінійних методів підсумовування рядів Фур'є, а також питання методики викладання математичних дисциплін і проблеми педагогіки вищої школи. В університеті ним створена наукова школа з теорії функцій, в межах якої підготовлено п'ять кандидатів фізико-математичних наук. Володимир Іванович Рукасов – автор однієї монографії, шести підручників і посібників, понад 100-а наукових праць із теорії функцій.

У 2005 р. Володимир Іванович Рукасов був обраний членом Президії Українського математичного товариства. Володимир Іванович Рукасов був нагороджений Почесною грамотою Кабінету Міністрів України (2004 р.), нагрудним знаком «За наукові досягнення» (2007 р.), знаком "Відмінник освіти України" (1999 р.), Почесною грамотою Міністерства освіти УРСР (1989 р.), Почесною грамотою Донецької обласної державної адміністрації (2004 р., 2006 р.), Почесною грамотою Академії Педагогічних наук України (1999 р., 2007 р.), медаллю "Будівничий України"Всеукраїнського об'єднання "Просвіта".

В.І.Рукасов завжди був наполегливим у досягненні поставленої мети і, водночас, порядною, доброзичливою, урівноваженою людиною із щиросердним ставленням до тих, хто поруч.

Світла пам'ять про Володимира Івановича Рукасова завжди буде жити в наших серцях!

А.М. Самойленко, М.О. Перестюк, В.В. Шарко,
М.Л. Горбачук, О.А. Бойчук, А.С. Романюк,
С.М. Чуйко, П.В. Задерей, А.С. Сердюк,
С.О. Чайченко, О.О. Новіков, В.О. Божко,
О.В. Чуйко, О.А. Кадубовський, В.Є. Величко,
Є.С. Сілін, О.В. Ровенська, В.І. Бодра.

Основні наукові праці В.І. Рукасова

1982

1. Рукасов В.И. Приближение непрерывных периодических функций многих переменных интерполяционными тригонометрическими полиномами с равноотстоящими узлами // Докл. АН УССР. Сер. А. — 1982. — N12. — С. 17 – 19.

1983

2. Рукасов В.И. Исследование верхних граней отклонений линейных средних рядов Фурье на классах периодических функций: автореф. дис. канд. физико-мат.наук: (01. 01. 01) / АН УССР, Ин-т математики. — К., 1983. – 14 с.

3. Степанец А.И., Рукасов В.И. О приближении суммами Фурье треугольного вида на классах непрерывных периодических функций двух переменных // Укр. мат. журн. — 1983. — **35,** N 2. — С. 249 – 255.

4. Рукасов В.И. Оценки отклонений интерполяционных тригонометрических полиномов с равноотстоящими узлами на классах непрерывных периодических функций многих переменных // Укр. мат. журн. — 1983. — **35,** N1. — С. 70–76.

5. Рукасов В.И. Приближение непрерывных периодических функций многих переменных полиномами Рогозинского интерполяционного типа. — Киев. 1983. — С. 3 – 41. — (Препринт / АН УССР. Ин-т математики; 83.34).

6. Рукасов В.И. Приближение периодических функций линейными средними их рядов Фурье. — Киев. 1983. — 56 с. — (Препринт / АН УССР. Ин-т математики; 83.62).

7. Stepanets A.I., Rukasov V.I. Approximation by Fourier sums of triangular type on classes of continuous periodic functions of two variables // Ukrain. Mat. Zh. -1983. -Vol. 35, № 2. - P. 249-254.

8. Rukasov V.I. Estimates of deviations of interpolation

trigonometric polynomials with equidistant nodes on classes of continuous periodic functions of several variables // Ukrain. Mat. Zh. – 1983.– Vol. 35, № 1. – P. 70-75, 135.

1985

9. Рукасов В.И. Оценки отклонений линейных средних рядов Фурье на классах непрерывных периодических функций // Всесоюзн. конф. по теории функций, посвящ. 80-летию акад. С. М. Никольского: тез. докл.– Днепропетровск, 1985.– С. 59 – 60.

1987

10. Рукасов В.И. Введение в анализ: методические рекомендации для студентов физико-математического факультета. — Славянск: СГПИ, 1987. – 20 с.

11. Рукасов В.И. Приближение непрерывных периодических функций многих переменных полиномами Бернштейна интерполяционного типа. — Киев. 1987. — С. 51 – 59. — (Препринт / АН УССР. Ин-т математики; 87.40).

12. Рукасов В.И. Приближение непрерывных периодических функций линейными средними их рядов Фурье // Тр. Мат. ин-та АН СССР. Теория функций и смежные вопросы анализа. — 1987. — 180. — С. 187 – 189.

13. Рукасов В.И. Приближение функций класса $C^{\psi}_{\beta,\infty}$ линейными средними их рядов Фурье // Укр. мат. журн. — 1987. — **39,** N 4. — С. 478–483.

14. Рукасов В.И. Пути повышения эффективности в руководстве самостоятельной работой студентов при изучении математического анализа // Актуальные проблемы преподавания математики и информатики в пединституте и школе: координац. совещание-семинар.– Астрахань, 1987. — С. 68.

15. Rukasov V.S. Approximation of functions of the class C by the linear means of their Fourier series // Ukrain. Mat. Zh. – 1987. – Vol. 39, № 4. –P. 478 - 483, 542.

1989

16. Рукасов В.И. Приближение непрерывных функций операторами Валле-Пуссена // Всесоюзная школа "Теория приближения функций"(Луцк, 31 авг. – 8 сент. 1989г.): Тез. докл. — С. 133 – 134.

1991

17. Рукасов В.И. Аппроксимативные свойства классов функций, построенных с помощью обобщения операции дробного дифференцирования // Семинар-совещание "Фрактальные объекты в математике, физике и биологии". – К., 1991.— С.9-10.

1992

18. Рукасов В.И., Хает Л.Г. Высокопроизводительное резание инструментов с покрытиями и виброобразивной обработкой // Всеукраинская конференция "Новые технологические процессы в механической обработке". – К., 1992 . – С. 86.

19. Новиков О.А., Рукасов В.И. Приближение классов непрерывных периодических функций аналогами сумм Валле-Пуссена // Ряды Фурье: теория и приложения. — Киев: Ин-т математики АН Украины, 1992. — С. 57 – 63.

20. Рукасов В.И. Приближение операторами Валле-Пуссена функций, заданных на действительной оси // Укр. мат. журн. — 1992. — **44,** N5. — С. 682 – 691.

1993

21. Рукасов В.И., Савченко В.М., Савченко Л.В., Санина Т.М. Приближение (ψ, β) - дифференцируемых функций операторами Валле-Пуссена // Актуальні проблеми сучасної науки: тез. доп. наук. конф. викладачів та студентів Слов'янського держ. пед. ін-ту. – Слов'янськ, 1993. – С.14 - 15.

22. Rukasov V.I. Approximation by de la Vallee-Poussin operators of functions defined on the real axis // Ukrain. Mat. Zh. 1993. – Vol. 44,

№ 5. – P. 615 - 623

1994

23. Рукасов В.И., Савченко Л.В., Санина Т.М. Приближение суммами Валле-Пуссена дифференцируемых функций // Актуальні проблеми сучасноі науки: тез. доп. наук. конф викладачів та студентів Слов'янського держ. пед. ін-ту. – Слов'янськ, 1994. — С. 39 – 40.

1995

24. Новиков О.А., Рукасов В.И. Приближение непрерывных периодических функций обобщенными суммами Валле-Пуссена // Укр. мат. журн. — 1995. — **47,** N 8. — С. 1069 – 1079.

25. Рукасов В.И., Новиков О.А. Приближение непрерывных периодических функций тригонометрическими полиномами: учеб. пособие для студентов физико-математических специальностей педагогических институтов и университетов / М-во образования Украины, Славянский госуд. пед. ин-т. – Славянск: СГПИ, 1995. – 98 с.

26. Rukasov V.I., Novikov O.A. Approximation of classes of continuous functions by generalized de la Vallee-Poussin // Ukrain. Mat. Zn. – 1995. – Vol. 47, № 8. – P. 1222 - 1233.

1996

27. Пивоваров Л.В., Рукасов В.И., Ягупец Ю.И. Управление параметрами устройств и систем с электропроводными контурами. Оценка погрешности методами Фурье: монография / НАН Украины, Ин-т электродинамики. – К. ; Славянск: СГПИ, 1996. – 482 с.

1997

28. Рукасов В.И., Новиков О.А. Приближение классов $C^{\psi}_{\beta}H_{\omega}$

обобщенными суммами Валле-Пуссена // Укр. мат. журн. — 1997. — **49,** N 4. — С. 606 – 610.

29. Рукасов В.И., Новиков О.А. Приближение непрерывных периодических функций суммами Валле-Пуссена //II школа "Ряди Фур'є: теорія і застосування" (Кам'янець-Подільський, 30 черв. – 5 лип. 1997 р.): Тез. доп. — Київ: Ін-т математики НАН України, 1997. — С. 109 – 110.

30. Rukasov V.I., Novikov O.A. Approximation of the classes $C^{\psi}H_{\infty}$ by generalized de la Vallée-Poussin sums // Uklrain. Math. J. – 1997. – Vol. 49, №4. – P. 672 - 677.

1998

31. Рукасов В.І., Хаєт Л.Г. Організація зворотного зв'язку у системі управління вищим навчальним закладом // Управління національною освітою в умовах становлення і розвитку української державності: матеріали Всеукр. наук.-практ. конф. - К., 1998. – С. 63 - 67.

32. Рукасов В.И., Новиков О.А. Приближение аналитических функций суммами Валле-Пуссена // Ряди Фур'є: теорія і застосування. — Київ, 1998. — С. 228 – 241. — (Праці Ін-ту математики НАН України; Т. 20).

33. Рукасов В.И., Чайченко С.О. Приближение $\overline{\psi}-$интегралов 2π-периодических функций суммами Валле-Пуссена // Ряди Фур'є: теорія і застосування: Зб. наук. пр. — Київ: Ін-т математики НАН України, 1998. — С. 242 – 254.

1999

34. Рукасов В.І., Чуйко С.М. Збірник задач з математики: посібник для вступників до Слов'янського держ. пед. ін-ту / М-во освіти України , Слов'янський держ. пед. ін-т. – Слов'янськ: СДПІ, 1999. – 58 с.

35. Рукасов В.И., Чайченко С.О. Оценки отклонений операторов Валле-Пуссена от $\overline{\psi}$-интегралов 2π-периодических функций //

Intern. Conf. Dynamical Systems Modelling and Stability Investigation (Киев, 25 – 29 мая 1999 г.): Тез. докл. — С. 50.

36. Рукасов В.И., Новиков О.А., Чайченко С.О. Приближение классов $C^{\overline{\psi}}_{\infty}$ суммами Валле-Пуссена // Междунар. конф. по теории приближения функций и её применениям, посвященная памяти В.К. Дзядыка (Киев, 26 – 30 мая 1999 г.): Тез. докл. — С. 71 – 72.

2000

37. Рукасов В.І., Чуйко С.М., Чайченко С.О. Збірник задач з математики: посібник для вступників до Слов'янського держ. пед. ін-ту . – Слов'янськ: СДПІ, 2000. – 86 с.

38. Рукасов В.И., Новиков О.А., Чайченко С.О. Приближение классов $C^{\overline{\psi}}_{\infty}$ методами Валле-Пуссена // Теорія наближення функцій та її застосування: Зб. наук. пр. — Київ: Ін-т математики НАН України, 2000. — С. 396 – 406.

39. Рукасов В.И., Чайченко С.О. Приближение $\overline{\psi}$-интегралов 2π-периодических функций суммами Валле Пуссена, близкими к суммам Фейера // V Крымская международная математическая школа "Метод функций Ляпунова и его приложения"(Крым, Алушта, 5 – 13 сент. 2000 г.): Тез. докл. — С. 139.

2001

40. Нечволод Н.К., Пивоваров Л.В., Рукасов В.И., Субботин О. В. Компенсация динамических нагрузок инерционным параметрическим преобразователем энергии // Надійність інструменту та оптимізація технологічних систем: зб. наук. пр. - Краматорськ, 2001. – Вип. 11. – С. 139 – 144.

41. Рукасов В.І., Чайченко С.О. Наближення класів $C^{\overline{\psi}}H_{\omega}$ сумами Валле-Пуссена // Укр. мат. конгрес, присвячений 200-річчю від дня народження М.В. Остроградського (Київ, 21–25 серп. 2001 р.): Тез. доп. — С. 52 – 53.

42. Рукасов В.И., Силин Е. С. О приближении периодических функций линейными средними их рядов Фурье // Dynamical

Systems Modelling And Stability Investigation: thesis of Conference Reports, 22 – 25 May. – K., 2001. – С. 120.

43. Рукасов В.И., Новиков О.А., Чайченко С.О. Приближение классов $C^{\overline{\psi}}_{\infty}$ методами Валле-Пуссена (небольшая гладкость) // Укр. мат. конгрес, присвячений 200-річчю від дня народження М.В. Остроградського (Київ, 21–25 серп. 2001 р.): Тез. доп. — С. 51 – 52.

44. Рукасов В.И., Чайченко С.О. Приближение $\overline{\psi}$-интегралов периодических функций суммами Валле-Пуссена (небольшая гладкость) // Укр. мат. журн. — 2001. — **53,** № 12. — С. 1641 – 1653.

45. Рукасов В.И., Новиков О.А. Приближение функций с небольшой гладкостью из классов $C^{\overline{\psi}}_{\infty}$ линейными методами // Теорія наближень та гармонічний аналіз: Пр. Укр. мат. конгресу — 2001. — Київ: Ін-т математики НАН України, 2002. — С. 184 – 193.

46. Rukasov V.I., Chaichenko S.O. Approximation of ψ- integrals of periodic functions by de la Valle Poussin sums (low smoothness) // Ukrain. Math. J. -2001. - Vol. 53, № 12. - P. 1998 - 2013.

2002

47. Степанец А.И., Рукасов В.И. Аппроксимативные свойства метода Валле-Пуссена // Укр. мат. журн. — 2002. — **54,** N 8. — С. 1100 – 1125.

48. Рукасов В.І. Вступ до аналізу: навч. посібник для фіз.-мат. ф-тів. пед. ун-тів / М-во освіти і науки України, Слов. держ. пед. ун-т. – Слов'янськ: СДПУ, 2002. – 163 с.

49. Рукасов В.И., Чуйко С.М. Лекции по эконометрии: учеб. пособие для вузов / М-во образования и науки Украины, Слов. гос. пед. ун-т. – Славянск: СГПУ, 2002. – 133 с.

50. Рукасов В.І., Чайченко С.О. Наближення аналітичних періодичних функцій сумами Валле-Пуссена // Укр. мат. журн. — 2002. — **54,** N 12. — С. 1653 – 1668.

51. Рукасов В.И., Новиков О.А., Чайченко С.О. Приближение классов периодических функций с малой гладкостью суммами Валле-Пуссена // Теорія наближення функцій та суміжні питання. — Київ, 2002. — С. 119–133. — (Праці Ін-ту математики НАН

України; Т. 35).

52. Рукасов В.И., Чайченко С.О. Приближение классов $C^{\overline{\psi}}H_\omega$ суммами Валле-Пуссена // Укр. мат. журн. — 2002. — **54,** N5. — С. 681 – 691.

53. Рукасов В.И., Чайченко С.О. Приближение непрерывных периодических функций суммами Валле-Пуссена (небольшая гладкость) // Теорія наближення функцій та суміжні питання. — Київ, 2002. — С. 134 – 150. — (Праці Ін-ту математики НАН України; Т. 35).

54. Рукасов В.І., Чайченко С.О. Про наближення неперервних періодичних функцій сумами Валле-Пуссена // Доп. НАН України. — 2002. — N3. — С. 35 – 39.

55. Rukasov V.I. Approximation of analitic periodic fuctions by de la Vallée Poussin sums // Ukr. Math. J. – 2002. – Vol. 54, №12. – P. 2033 – 2051.

56. Rukasov V.I. Approximation of the classes of analitical functions by dy la Vallée Poussin sums // Ukr. Math. J. – Vol. 54, №8. – P. 993 - 2007.

57. Rukasov V.I., Chaichenko S.O. Approximation of the classes $C^{\overline{\psi}}H_\omega$ by de la Vallee-Poussin sums // Translation in Ukranian Math. J. 54 (2002), no. 5, P. 839 – 851.

58. Stepanets A.I., Rukasov V.I. Approximation properties of the by de la Vallée Poussin method // Ukr. Math. J. – Vol. 54, №8. – P. 345 - 370.

2003

59. Рукасов В.І. Дослідження екстремальних задач теорії наближення функцій: автореф. дис. д-ра фіз.-мат. наук (01. 01. 01.) / НАН України, Ін-т математики. – К., 2003. – 34 с.

60. Рукасов В.І., Чуйко О.В., Рукасов М.І. Збірник задач з математики: посібник для вступників до вузів України / М-во освіти і науки України, Слов. держ. пед. ун-т. – Слов'янськ: СДПУ, 2003. – 98 с.

61. Рукасов В.И. Наилучшие n-членные приближения в про-

странствах с анизотропной метрикой // Шості Боголюбовські читання: тез. доп. міжнар. наук. конф., 26 - 30 серпня 2003 р. – К: Ін-т математики НПН України, 2003. – С. 195.

62. Рукасов В.И. Наилучшие $n-$членные приближения в пространствах с несимметричной метрикой // Укр. мат. журн. — 2003. — **55,** N4. — С. 500 – 509.

63. Степанец А.И., Рукасов В.И. Наилучшие "сплошные"$n-$членные приближения в пространствах S^p_φ // Укр. мат. журн. — 2003. — **55,** N 5. — С. 663 – 670.

64. Рукасов В.И. Оценки отклонений полиномов Бернштейна интерполяционного типа на классах непрерывных периодических функций многих переменных // Екстремальні задачі теорії функцій та суміжні питання. — Київ, 2003. — С. 136 – 155. — (Праці Ін-ту математики НАН України, Т 36).

65. Рукасов В.И., Новиков О.А., Бодрая В.И. Приближение классов ψ-интегралов периодических функций двух переменных линейными методами // Шості Боголюбовські читання: тез.доп. міжнар. наук. конф., 26 - 30 серпня 2003 р. – К.: Ін-т математики НАН України, 2003. – С. 196.

66. Рукасов В.И., Силин Е.С. Приближение непрерывных функций операторами Валле Пуссена // Екстремальні задачі теорії функцій та суміжні питання. – К., 2003. – С. 192 – 208.– (Праці Ін-ту математики НАН України; Т.46)

67. Рукасов В.И. Приближение непрерывных функций операторами Валле-Пуссена // Укр. мат. журн. — 2003. — **55,** N 3. — С. 414 – 424.

68. Рукасов В.И., Силин Е.С. Приближение непрерывных функций операторами Валле Пуссена // Шості Боголюбовські читання: тез. доп. міжнар. наук.конф.,26 - 30 серпня 2003 р. – К.: Ін-т математики НАН України, 2008. – С. 197.

69. Рукасов В.И., Чайченко С.О. Приближение $\psi-$интегралов периодических функций в интегральной метрике // Міжнародна наукова конференція "Шості Боголюбовські читання" (Чернівці, 26 – 30 серп. 2003 р.): Тез. доп. — С. 198.

70. Рукасов В.И., Чайченко С.О. Приближение $\psi-$интегралов

периодических функций в равномерной и интегральной метриках // Екстремальні задачі теорії функцій та суміжні питання. — Київ, 2003. — С. 156 – 191. — (Праці Ін-ту математики НАН України; Т. 36).

71. Рукасов В.И. Приближение суммами Валле-Пуссена классов аналитических функций // Укр. мат. журн. — 2003. — **55,** N 6. – С. 806 – 816.

72. Рукасов В.І. Про наближення операторами Валле-Пуссена функцій, заданих на дійсній осі // Доп. НАН України. — 2003. — N 6. — С. 26 – 28.

73. Степанец А.И., Рукасов В.И. Пространства S^p с несимметричной метрикой // Укр. мат. журн. — 2003. — **55,** N 2. — С. 264 – 277.

74. Rukasov V.I. Approximation of continuous functions by de la Vallée Poussin operators // Ukrain. Math. J. – 2003. – Vol. 55, №3. – P. 498 - 511.

75. Rukasov V.I. Approximation of the classes of analitycal functions by de la Vallée Poussin sums // Ukrain. Math. J. – 2003. – №6. – P. 575 - 590.

76. Stepanets A.I., Rukasov V.I. Best "continuos"n-term approximation in spaces S^p_φ // Ukrain. Math. J. – 2003. – Vol. 55, №5. – P. 801 - 811.

77. Rukasov V.I. Best n-tern approximation in spaces with nonsymmetric metric //Ukrain. Math. J.- 2003. – Vol. 55, №4. – P. 378 - 397.

78. Stepanets A.I., Rukasov V.I. Spaces S^p with nonsymmetric metric // Ukrain. Math. J. 2003. – Vol. 55, №2. – P. 322 - 338.

79. Rukasov V.I., Chaichenko S.O. Approximation of analytical periodical functions by de La Vallee-Poussin sums // Translation in Ukranian Math. J. 54 (2003), no. 12, P. 2033 – 2051.

2004

80. Рукасов В.І., Демченко І.А. Вступ до математичного аналізу. Практичні заняття: навч. посібник / М-во освіти і науки Укра-

їни, Слов'янський держ. пед. ун-т. – Слов'янськ: СДПУ, 2004. – 140 с.

81. Рукасов В.І., Голоденко М. М., Глазова В. В. Інформатика. Практикум.: навч. посібник для студ. вищ.навч. закладів: у 3 т. / М-во освіти і науки України, Слов'янський держ. пед. ун-т. – Слов'янськ: СДПУ, 2004. – Т.1. – 296 с. ; Т. 2. – 363 с. ; Т. 3. – 284 с.

82. Рукасов В.И., Новиков О.А., Бодрая В.И. Приближение классов ψ-интегралов периодических функций двух переменных линейными методами // Проблеми теорії наближення функцій та суміжні питання. – К., 2004. – С. 250 - 269. – (Праці Ін-ту математики НАН України; Т. 1, №1).

83. Рукасов В.И., Чайченко С.О. Приближение периодических функций малой гладкости суммами Валле-Пуссена в интегральной метрике // Проблеми теорії наближення функцій та суміжні питання / Відп. ред. О.І. Степанець // Зб. праць Ін-ту математики НАН України. — Т.1, № 1. — Київ: Ін-ту математики НАН України, 2004. – С. 270 – 281.

84. Rukasov V.I. Approximation of Function Given on Real Axis by Vallee Poussin Operators // International Workshop on "Analysis and its Applications"Mersin Univ., 7 - 11 sept. – Tyrkey, 2004. – P. 46.

2005

85. Рукасов В.І., Чуйко О.В., Демченко І.А. Збірник задач з математики: посібник для вступників до вузів. – Слов'янськ: СДПУ, 2005. – 202 с.

86. Рукасов В.І., Новіков О.О., Бодра В.І. Наближення класів періодичних функцій багатьох змінних прямокутними лінійними середніми рядів Фур'є // Вісник Слов'янського державного педагогічного університету: зб. наук. пр. – Слов'янськ, 2005. – Вип. 1. – С. 5 – 14.

87. Рукасов В.І., Чайченко С.О. Наближення операторами Валле Пуссена інтегралів Пуассона функцій, заданих на дійсній осі // Проблеми теорії наближення функцій та суміжні питання / Відп. ред. О.І. Степанець // Зб. праць Ін-ту математики НАН України.

— Т.2, № 2. — Київ: Ін-т математики НАН України, 2005. — С. 228 – 237.

88. Рукасов В.І., Чайченко С.О. Наближення періодичних функцій сумами Валле Пуссена в просторі L // Доповіді НАН України. – 2005. – №4. – С. 36 - 38.

89. Рукасов В.І., Чайченко С.О. Одночасне наближення функцій і їх $\overline{\psi}$-інтегралів сумами Валле-Пуссена в просторах C і L // Вісник Слов'янського державного педагогічного університету: збірник наукових праць. — Слов'янськ, 2005. – Вип.1. — С. 15 – 19.

90. Рукасов В.И., Новиков О.А., Бодрая В.И. Приближение классов ψ-интегралов периодических функций многих переменных прямоугольными линейными средними их рядов Фурье // Укр. мат. журн. – 2005. – Т.57, № 4. – С. 564 - 570.

91. Рукасов В.И., Новиков О.А., Бодрая В.И. Приближение классов ψ -интегралов периодических функций двух переменных прямоугольными линейными средними их рядов Фурье // Проблеми теорії наближення функцій та суміжні питання. – К., 2005. – С. 228 - 237. – (Праці Ін-ту математики НАН України; Т. 2, №2).

92. Рукасов В.И., Силин Е.С. Приближение непрерывных функций операторами Валле Пуссена //Укр. мат. журн. 2005. – Т.57, №2. – С. 230 - 239.

93. Рукасов В.И., Силин Е.С. Приближение непрерывных функций небольшой гладкости операторами Валле Пуссена // Укр. мат. журн. 2005. – №3. – С. 394 - 399.

94. Рукасов В.И., Чуйко С.М. Условие упрощения итерационной процедуры для нетеровой автономной краевой задачи // International conference moddern problems and new trends in probability theory, 19 - 26 June 2005. – Chernivtsi. – Abstracts II. – P. 97 - 98.

95. Rukasov V.I., Novikov O.A., Bodraja V.I. Approximation of classes of ψ -integrals of periodic functions of many variables by rectangular linear of their fourier series // Ukr. Math. J. – 2005. – Vol. 57, №4. – P. 678 - 685.

96. Rukasov V.I., Silin E.S. Approximation of continuos functions by de la Vallee Poussin operators // Ukr. Math. J. – 2005. – Vol.– 57,

№2. – P. 435 - 443.
97. Rukasov V.I., Silin E.S. Approximation of cotinuos functions of low smoothness by de la Valle Poussin operators // Ukrin. Math.J. – 2005. – Vol. 57, №3. – P. 761 - 766.

2006

98. Рукасов В.І., Голоденко М. М., Глазова В. В. Інформатика. Практикум: навч. посібник для студ.вищих навч. закладів: у 3 т. / М-во освіти і науки України. – Слов'янськ: СДПУ, 2006. – Т.1 – 295 с. ; Т.2 – 363 с. ; Т. 3. – 283 с.
99. Рукасов В.І., Новіков О.О., Бодра В.І. Наближення класів періодичних функцій багатьох змінних прямокутними лінійними середніми їх рядів Фур'є // Вісник Слов'янського державного педагогічного університету: зб. наук. пр. – Слов'янськ, 2006. – Вип. 2.– С. 5 - 12.
100. Рукасов В.І., Сілін Є.С. Наближення локально сумовних функцій операторами Валле Пуссена в інтегральній метриці // Математичний аналіз і диференціальні рівняння та їх застосування: тез. доп. Міжнар. наук. конф., 18 - 23 вересня 2006 р. – Ужгород, 2006. – С. 94.
101. Рукасов В.И., Новиков О.А., Бодрая В.И. Приближение классов функций с малой гладкостью // Математичний аналіз і диференціальні рівняння та їх застосування: тез. доп. Міжнар. наук. конф., 18 - 23 вересня 2006 р. – Ужгород, 2006. – С.92 - 93.
102. Рукасов В.І., Чайченко С.О. Про наближення інтегралів Пуассона функцій, заданих на дійсній осі // Вісник Слов'янського державного педагогічного університету: зб.наук.пр. – Слов'янськ, 2006. – Вип. 2. – С.12 - 17.
103. Рукасов В.І., Чайченко С.О. Про наближення операторами Валле Пуссена інтегралів Пуассона функцій, заданих на дійсній осі // Математичний аналіз і диференціальні рівняння та їх застосування: тез. доп. Міжнар. наук. конф., 18 - 23 вересня 2006 р. - Ужгород, 2006. - С. 189.

2007

104. Рукасов В.І., Чайченко С.О. Аппроксимационные свойства операторов Валле Пуссена на классах $\widehat{L}^{\alpha}_{\beta}$ // Проблеми теорії наближення функцій та суміжні питання / Відп. ред. О.І. Степанець // Зб. праць Ін-ту математики НАН України. — Т. 4, № 1. — Київ: Ін-т математики НАН України, 2007. — С. 284 – 301.

105. Рукасов В.И., Новиков О.А., Бодрая В.И. Приближение периодических функций высокой гладкости двух переменных прямоугольными линейными средними их рядов Фурье // Проблеми теорії наближення функцій та суміжні питання. – 2007. – С. 270 - 283. – (Праці Ін-ту математики НАН України; Т.4, №1).

106. Степанец А.И., Рукасов В.И., Чайченко С.О. Приближения суммами Валле Пуссена / НАН України, Ін-т математики. – К. : Ін-т математики НАН України, 2007. – 385 с. – (Праці Ін-ту математики НАН України. Т. 68: Математика та її застосування).

107. Rukasov V.I., Novikov O.A., Bodraja V.I. Approximation of classes of periodic functions by linear methods // International conference on the occasion of the 150th birthday of Aleksandr Mikhailovich Lyapunov: Book of abstracts, 24 - 30 June 2007 .– Kharkiv, 2007. – P.130 -131.

108. Rukasov V.I., Chaichenko S.O. Approximation the Poussin integrals of functions, which define on real axis // Abstracts of International Conference on the occasion of the 150th birthday of A.M. Lyapunov / June 24 - 30, 2007, Kharkiv, Ukraine. - P. 129 - 130.

109. Rukasov V.I., Silin E.S. Simultaneous approximation of ψ-integrals of continuous functions by the Vallee Poussin's operators // International conference on the occassion of the 150th birthday of Aleksandr Mikhailovich Lyapunov: Book of abstracts, 24 - 30 June 2007. – P. 132 - 133.

2008

110. Рукасов В.И., Чайченко С.О., Волковницкий Д.С. Аппроксимационные свойства операторов Валле Пуссена на классах $\widehat{L}^{\bar{\psi}}_{1}$ // Дифференциальные уравнения. Функциональные пространства.

Теория приближений. Международная конференция, посвященная 100-летию со дня рождения С.Л. Соболева (Новосибирск, 5 – 12 октября 2008 г.): Тез. докладов / Ин-т математики СО РАН. — Новосибирск, 2008. — С. 352.

111. Рукасов В.И., Новиков О.А., Ровенская О.Г. Интегральные представления уклонений средних сумм Фурье на классах $C^{\alpha}_{\beta,\infty}$ // Вісник Слов'янського державного педагогічного університету. Математика. — 1(3). — Слов'янськ: СДПУ, 2008. — С. 33 - 41.

112. Рукасов В.І., Чайченко С.О. Наближення класів аналітичних функцій сумами Валле-Пуссена// Вісник Слов'янського державного педагогічного університету. Математика. — 1(3). — Слов'янськ: СДПУ, 2008. — С. 42 – 55.

113. Рукасов В.І., Чайченко С.О. Наближення класів аналітичних функцій сумами Валле-Пуссена// Міжнародна наукова конференція "Боголюбовські читання 2008. Диференціальні рівняння, теорія функцій та їх застосування" (Мелітополь, 16 – 21 червня, 2008 р.): Тез. доп. — С. 99 – 101.

114. Рукасов В.И., Ровенская О.Г. Приближение классов (ψ, β) - дифференцируемых функций многих переменных прямоугольными суммами Валле Пуссена // Міжнародна наукова конференція "Диференціальні рівняння, теорія функцій та їх застосування"з нагоди 70-річчя з дня народження академіка А. М. Самойленка, 16 - 21 червня 2008 р.:тез. доп. – Мелітополь, 2008. – С. 98.

115. Рукасов В.И., Ровенская О.Г. Приближение классов (ψ, β) - дифференцируемых функций многих переменных прямоугольными суммами Валле Пуссена // Дифференциальные уравнения. Функциональные пространства. Теория приближений: междунар. конф., посвящ. 100-летию со дня рождения С. Л. Соболева(Новосибирск, 5 - 12 октября 2008 г.): тез. докл./ Ин-т математики СО РАН. – Новосибирск, 2008. - С. 351.

116. Рукасов В.И., Новиков О.А., Бодрая В.И. Приближения классов функций многих переменных прямоугольными обобщенными суммами Валле Пуссена // Міжнародна наукова конференція "Диференціальні рівняння, теорія функцій та їх застосування" з нагоди 70-річчя з дня народження академіка А. М. Самойленка,

16 - 21 червня 2008 р.: тез. доп. – Мелітополь, 2008. – С. 97.

117. В.И. Рукасов, О.А. Новиков, В.Е. Величко, О.Г. Ровенская, В.И. Бодрая Приближение периодических функций многих переменных с высокой гладкостью прямоугольными суммами Фурье // Труды института прикладной математики и механики НАН Украины. — Донецк, 2008. — Т. 16. — С. 163 – 170.

118. Рукасов В.И, Харкевич Ю.И., Сидорович П.И. Приближение функций двух переменных прямоугольными положительными методами // Міжнародна наукова конференція "Диференціальні рівняння, теорія функцій та їх застосування"з нагоди 70-річчя з дня народження академіка А. М. Самойленка, 16 - 21 червня 2008 р.: тез. доп. – Мелітополь, 2008. – С. 98 - 99.

119. Рукасов В.I., Чайченко С.О. Наближення операторами Фур'є на класах функцій, локально інтегровних на дійсній осі // Теорія наближення функцій та суміжні питання / Відп. ред.: А.С. Романюк // Зб. праць Ін-ту математики НАН України. — Т. 5, № 1. — Київ: Ін-т математики НАН України, 2008. — С. 297 – 308.

120. В.И.Рукасов, О.Г.Ровенская, О.А.Новиков, В.И.Бодрая. Приближение периодических функций многих переменных с высокой гладкостью прямоугольными суммами Валле Пуссена // Вісник Одеського національного університету. Математика і механіка. – 2008. – Т.13, вип. 18. – с. 87-96.

121. Rukasov V.I., Chaicenko S.O. Approximation of the classes $\widehat{L}^{\psi}_{\beta}$ by De La Valle-Poussin operators // International conference "Mathematical analysis, differential equations and their applications"(Famagusta, North Cyprus, September 12–15, 2008): Abstracts. — P. 50–51.

2009

122. Рукасов В.І., Чайченко С.О. Про наближення на класах функцій, локально інтегрованих на дійсній осі // Міжнародна наукова конференція "Функціональні методи в теорії наближень і теорії операторів", присвячена пам'яті В.К. Дзядика (с. Світязь, 22 - 26 серпня 2009 р.) : Тез. доп. - С. 79.

123. Рукасов В.І., Чайченко С.О., Волковницький Д.С. Наближення класів операторами Валле Пуссена // Міжнародна наукова конференція "Функціональні методи в теорії наближень і теорії операторів", присвячена пам'яті В.К. Дзядика (с. Світязь, 22 - 26 серпня 2009 р.) : Тез. доп. – С. 80.

2010

124. Рукасов В.І., Чайченко С.О. Наближення операторами Валле Пуссена на класах функцій, локально інтегровних на дійсній осі // Укр. мат. журн. — 2010. — **62,** № 7. — С. 968 – 978.

125. Рукасов В.І., Чайченко С.О., Волковницький Д.С. Наближення $\bar{\psi}$-інтегралів локально сумовних на дійсній осі функцій за допомогою операторів Валле Пуссена в інтегральній метриці // Теорія наближення функцій та суміжні питання / Відп. ред.: А.С. Романюк // Зб. праць Ін-ту математики НАН України. — Т. 7, № 1. — Київ: Ін-т математики НАН України, 2010. — С. 221 – 234.

УДК 512.53+004.021

 Величко В.Є.

АЛГОРИТМ ОБЧИСЛЕННЯ СКІНЧЕНИХ НАПІВГРУП

У роботі розглядається питання обчислення елементів деякої скінченої напівгрупи, що породжена системою твірних.

The question of calculation of elements of some complete semigroup which is descendant by the system of formative is examined.

1. Напівгрупи перетворень.

Нагадаємо декілька означень та необхідних тверджень.

Означення. Напівгрупою $(S, \cdot)$ називається непорожня множина S разом з бінарною операцією $\cdot$, яка задовольняє асоціативному закону: $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$ для довільних $x, y, z \in S$.

Означення. Елемент $1 \in S$ називається одиницею, якщо $1 \cdot x = x \cdot 1 = x$ для довільного $x \in S$.

Крім того, визначимо $S^1 = \begin{cases} S, & \text{якщо } 1 \in S \\ S \cup \{1\}, & \text{якщо } 1 \notin S \end{cases}$

Означення. Гомоморфізмом напівгрупи $(S, \cdot)$ в $(S', *)$ називається відображення φ множини S в множину S', таке що $\varphi(x \cdot y) = \varphi(x) * \varphi(y)$ для довільних $x, y \in S$. В цьому разі використовують запис $\varphi : (S, \cdot) \to (S', *)$.

Означення. Моноїд $(M, \cdot, 1)$ – це множина M з такими бінарною операцією і виділеним елементом 1, що $(M, \cdot)$ є напівгрупою з одиницею 1.

Означення. Напівгрупою всіх перетворень або симетричною напівгрупою на множині X називається піднапівгрупа $\mathcal{T}(X)$ напівгрупи всіх бінарних відношень на X, яка складається з бінарних відношень σ, що задовольняють умовам:

1. для довільного $x \in X$ існує y, таке що $(x, y) \in \sigma$;

2. якщо $(x, y) \in \sigma$ і $(x, y') \in \sigma$, то $y = y'$.

Напівгрупою перетворень на множині X називається будь-яка піднапівгрупа з $\mathcal{T}(X)$. Для отримання великої кількості напівгруп перетворень інколи зручно задати їх твірні елементи. Наприклад, при $X = \{1, 2, 3\}$ перетворення

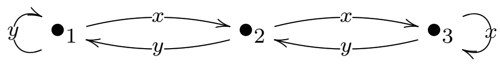
$$x = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 3 \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

породжують напівгрупу перетворень, яка складається з семи елементів:

$$x, y, xy = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}, \; yx = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

і трьох константних перетворень.

Зазвичай напівгрупу перетворень представляють орієнтованим графом, вершинами якого є елементи з множини X, а дуга $i \to j$ $(i, j \in X)$ визначена і помічена твірним елементом g кожен раз, коли $ig = j$. Наведемо, наприклад, граф описаної вище напівгрупи перетворень:



Твердження. Довільна напівгрупа ізоморфна деякій напівгрупі перетворень.

Доведення. Для напівгрупи S визначимо відображення $\varphi : S \to \mathcal{T}(S^1)$, поклавши $\varphi(a) = \rho_a$, де ρ_a – внутрішній правий зсув на S^1, що визначено рівністю $x\rho_a = xa$ для всіх $x \in S^1$. Неважко перевірити, що φ – ін'єктивний гомоморфізм.

2. Вільні напівгрупи.

Нехай X – непорожня множина, яка називається алфавітом, а її елементи називатимемо буквами. Визначимо слово в алфавіті X як непорожню скінчену послідовність $x_1 x_2 \ldots x_m$ елементів з X. Таким чином, два слова $x_1 x_2 \ldots x_m$ і $y_1 y_2 \ldots x_n$ рівні тоді й лише тоді, коли вони співпадають як послідовності, тобто коли $m = n$ і $x_1 = y_1$, $x_2 = y_2$, ..., $x_m = y_m$. Число m називають довжиною слова $\omega = x_1 x_2 \ldots x_m$ і позначають через $l(\omega)$ або $|\omega|$.

На множині всіх слів $F(X)$ визначимо бінарну операцію

$$x_1x_2\dots x_m \cdot y_1y_2\dots y_n = x_1x_2\dots x_my_1y_2\dots y_n.$$

Ця операція на $F(X)$, яку інколи називають конкатенацією, очевидно асоціативна, і $F(X)$ називають вільною напівгрупою на множині X. Оскільки не відрізняють букви $x \in X$ і однобуквені слова $x \in F(X)$, імплікація $x_1x_2\dots x_m = y_1y_2\dots y_n \Rightarrow m = n$ і $x_1 = y_1$, $x_2 = y_2$, ..., $x_m = y_m$ виражає той факт, що кожне слово $\omega \in F(X)$ допускає єдиний розклад у добуток елементів з X. Зауважимо, що X є множиною твірних для $F(X)$.

Твердження. Для довільного відображення φ множини X в напівгрупу S існує єдиний гомоморфізм $\hat{\varphi}$ вільної напівгрупи $F(X)$ в S, такий, що $\hat{\varphi}(x) = \varphi(x)$ для всіх $x \in X$. Далі, гомоморфізм $\hat{\varphi}$ сюр'єктивний тоді й лише тоді, коли $\varphi(x)$ є множиною твірних напівгрупи S.

Доведення. Для слова $\omega = x_1x_2\dots x_n$ із $F(X)$ рівність $\hat{\varphi}(\omega) = \varphi(x_1)\varphi(x_2)\dots\varphi(x_n)$ реалізує єдину можливість визначення елемента $\hat{\varphi}(x)$. Зрозуміло, що відображення $\hat{\varphi}$ – гомоморфізм. Множина $\varphi(X)$ тоді й лише тоді породжує S, коли для довільного $s \in S$ маємо $s = \varphi(y_1)\varphi(y_2)\dots\varphi(y_m) = \hat{\varphi}(y_1y_2\dots y_m)$ для деяких $y_1, y_2, \dots, y_m \in X$. Це рівносильно сюр'єктивності $\hat{\varphi}$.

Це твердження можна застосувати до породжуючої множини X напівгрупи S, узявши φ як відображення включення X в S.

Наслідок. Довільна напівгрупа S є гомоморфним образом вільної напівгрупи $F(X)$ на довільній множині X, що породжує S.

3. Алгоритм обчислення скінених напівгруп.

Напівгрупу S задамо як піднапівгрупу заданої напівгрупи U, яка називається 'універсумом', що породжений підмножиною X. Цей універсум може бути, наприклад, напівгрупою $\mathcal{T}_n(X)$ або напівгрупою матриць розміру $n \times n$ над заданим кільцем. Ми потребуємо наступної інформації про універсум:

- тип елементів,
- алгоритм обчислення результату двох елементів з U,
- алгоритм перевірки еквівалентності двох елементів з U,

- множина породжуючих елементів X.

Нехай підмножина X універсуму U задана, наш основний алгоритм обчислює піднапівгрупу U, породжену X. Результат обчислення може бути формалізований в наступному вигляді:

Вхідні дані: Універсум U, підмножина X з U і строгий порядок на X.

Вихідні дані: Відображення $\rho : F(X) \to M$, яка визначає піднапівгрупу M з U, породжену X, набір елементів з M (впорядкованих в строгому порядку).

Кожному елементу $u \in M$ ставиться у відповідність його значення $v\,(u)$ в універсумі U.

Наступний код — наш базисний алгоритм. Множина породжуючих елементів задана як абсолютно впорядкована множина $A = \{a_1 < a_2 < \ldots < a_k\}$. Першим елементом набору елементів є слово a_1. Наступник слова u в наборі позначений $Next\,(u)$. Таким чином, за допомогою посилальної 'функції' Next ми одержуємо впорядкований набір обчислених елементів. Змінна *Last* позначає останній елемент поточного набору. Зазначимо, що ми використовуємо псевдокод, бо заздалегідь не є відомим тип елементів універсуму. Крім того, ми не дотримуємося певної чистоти типу даних, і цей алгоритм можна віднести до алгоритмів із символьним обчисленням.

```
Let u := a_1, Last := a_1;
while true
  for i := 1 to k,
   compute v(ua_i);
   if  v(ua_i) is new
     Next(Last) := ua_i,
     Last := ua_i;
   else  Let  pr:=true, j:=1;
    if v(ua_i) = v(u_j),
     write rule ua_i → u_j,pr:=false;
    j:=j+1;
  if  Exist Next(u), u := Next(u)
  else break ;
```

Алгоритм працює наступним чином. Для кожного елемента u з обчисленого набору і для кожного породжуючого елемента $a \in A$, значення ua є обчисленим, тобто знаходять його значення в універсумі. Якщо це значення є значенням деякого елемента u', який вже є в наборі, правило $ua \to u'$ є виконаним. В протилежному випадку, новий елемент ua створюється. Основні властивості алгоритму задані в такому твердженні.

Твердження. Набір елементів з M, обчислений за алгоритмом, є відсортованим у строгому порядку і правила мають вигляд: $u \to v$, де $v < u$.

Доведення. Структура програми визначена значеннями трійок $(u, Last, i)$ на початку циклу **for**. В заданій структурі $(u, Last, i)$ виводиться набір форми $(a_1, \ldots, u, \ldots, Last)$. Ми вимагаємо, щоб інтервал $(u, ..., Last)$ був відсортований у строгому порядку і щоб $Last < ua_i$. Ця властивість тривіально задовольняється в початковій структурі $(a_1, a_1, 1)$. Проходження зі стану $(u, Last, i)$ в стан $(u, Last, i + 1)$ (або $(u, ua_i, i + 1)$) залишає властивість інваріанта, таку як $ua_i < ua_{i+1}$. Проходження зі стану $(u, Last, k)$ в стан системи $(Next(u), Last, 1)$ (або $(Next(u), ua_k, 1)$) також залишає властивість інваріанта. Дійсно, інтервал $(Next\,(u)\,, \ldots, Last)$ є під інтервалом $(u, \ldots, Last)$, і $Last < ua_k$. Отже, $(u, \ldots, Last)$ (або $(u, \ldots, Last, ua_k)$) відсортовано. До того ж, $u < Next(u) \le Last < ua_k$ за припущенням. Тому, або $|Next\,(u)| = |Last| = |u| + 1$ і тоді $Last < ua_k < Next\,(u)\,a_1$, або $|Next\,(u)| = |u|$ і $Last < ua_k < Next\,(u)\,a_1$, так як $u < Next\,(u)$. Це доводить твердження і демонструє, що те, що виводиться, відсортовується.

Друга частина твердження є очевидною.

Приклад 1. Нехай $X = \{1, \ldots, 6\}$, $U = \mathcal{T}(X)$ і нехай $A = \{a, b\}$ є множиною породжуючих елементів, заданою в такій таблиці:

	1	2	3	4	5	6
a	2	2	4	4	5	6
b	5	3	4	4	6	6

Підрахунки починаються зі значення a_1, значення aa еквівалентне значенню a. Це створює правило $aa \to a$. Значення ab, ba, bb є новими. Далі ми підраховуємо за цим порядком значення aba, abb,- baa, bab, bba, bbb. Перше значення є новим, але інші — ні, і утворюються наступні правила:

$abb \to aba$, $baa \to ba$, $bab \to bb$, $bba \to bb$, $bbb \to bb$.

Отже, aba – єдиний елемент довжини 3, створений на цьому кроці. Залишається підрахувати значення $abaa$ і $abab$, які задають правила: $abaa \to aba$ і $abab \to aba$. Нарешті, елементи напівгрупи представлені в наступній таблиці:

	1	2	3	4	5	6
a	2	2	4	4	5	6
b	5	3	4	4	6	6
ab	3	3	4	4	6	6
ba	5	4	4	4	6	6
bb	6	4	4	4	6	6
aba	4	4	4	4	6	6

і правила:

$$\begin{array}{llll} aa \to a & abb \to aba & baa \to ba & bab \to bb \\ bba \to bb & bbb \to bb & abaa \to aba & abab \to aba \end{array}$$

Приклад 2. Нехай $M_2(\mathbb{Z}_2)$ напівгрупа всіх квадратних матриць другого порядку над кільцем $\mathbb{Z}_2$, та елементи $a = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ і $b = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ є твірними деякої напівгрупи S. Обчислимо елементи цієї напівгрупи за допомогою алгоритму.

Першим значенням, що будемо розглядати буде $aa = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \to a$. Далі $ab = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ є новим елементом і відповідно список елементів збільшується до a, b, ab. Наступний елемент $ba = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ теж є новим, а отже список елементів подовжується до a, b, ab, ba. Настпупний елемент створює правило $bb \to b$. Далі елементи aba, abb, baa і bab не є новими, а отже створюють тільки правило. Отже, елементами напівгрупи S є елементи a, b, ab, ba і ми отримали наступні правила

$$aa \to a, bb \to b, aba \to ab, abb \to ab,$$

$$baa \to ba, bab \to ab.$$

1. *Ллаллеман Ж.* Полугруппы и комбинаторные приложения: Пер. с англ. – М.: Мир, 1985.- 440 с.
2. *Jürgensen H.* Computers in semigroups // Semigroups Forum. – 1977. - V.15, N 1.- p.1-20.
3. *Petrich M.* Introduction to semigroups. – Columbus, Ohio: Charles E. Merrill, 1973.

Отримано 1.07.10

Слов'янський державний педагогічний університет
velichko_v@ukr.net

УДК 517.5

©2010. **Жигалло К.М., Жигалло Т.В.**

ПРО НАБЛИЖЕННЯ СПРЯЖЕНИМИ ІНТЕГРАЛАМИ ПУАССОНА В РІВНОМІРНІЙ МЕТРИЦІ

Отримано точні рівності для верхніх меж наближень функцій з класу $\overline{W}^1_\infty$ спряженими інтегралами Пуассона в метриці простору C.

The exact equalities are received for the upper bound of approximations of functions from a class $\overline{W}^1_\infty$ by the conjugating Poisson's integrals in the metric of space C.

Нехай C — простір 2π–періодичних неперервних функцій з нормою $\|f\|_C = \max\limits_t |f(t)|$; L_∞ — простір 2π-періодичних вимірних суттєво обмежених функцій з нормою $\|f\|_\infty = \operatorname{ess}\sup\limits_t |f(t)|$; L_1 — простір 2π-періодичних сумовних функцій $f(t)$ з нормою $\|f\|_{L_1} = \|f\|_1 = \int\limits_{-\pi}^{\pi} |f(t)|dt$.

Нехай далі $f \in L_1$ і її ряд Фур'є $S[f]$ має вигляд

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos kx + b_k \sin kx).$$

Тоді спряженою з $f(\cdot)$ називають функцію $\overline{f}(\cdot)$ (див., [1] або [2]), яка майже скрізь визначається співвідношенням

$$\overline{f}(x) = -\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{\pi} \frac{f(x+t)-f(x-t)}{\operatorname{tg}\frac{t}{2}}dt, \qquad (1)$$

де інтеграл розуміється в сенсі його головного значення, тобто

Виконано за підтримки Державного фонду фундаментальних досліджень України (грант 25.1/043)

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} f\left(x+t\right)\operatorname{ctg}\frac{t}{2}dt = \lim_{\varepsilon\to 0}\left(\int\limits_{-\pi}^{-\varepsilon} + \int\limits_{\varepsilon}^{\pi}\right) f\left(x+t\right)\operatorname{ctg}\frac{t}{2}dt.$$

Якщо $\overline{f} \in L_1$, то спряжений з рядом $S[f]$ ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty}(-b_k \cos kx + a_k \sin kx)$$

(який будемо позначати через $\overline{S}[f]$) буде рядом Фур'є функції $\overline{f}$, тобто $\overline{S}[f] = S[\overline{f}]$.

Нехай $f \in L_1$. Величину

$$P_\rho(f;x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \rho^k \left(a_k \cos kx + b_k \sin kx\right), \ 0 < \rho < 1, \qquad (2)$$

де $a_0,\ a_k,\ b_k$ — коефіцієнти Фур'є функції f, називають інтегралом Пуассона (див., напр., [2, с. 161]). Відповідно через $\overline{P}_\rho(f;x)$ позначають (див., напр., [3]) спряжений інтеграл Пуассона

$$\overline{P}_\rho(f;x) = P_\rho(\overline{f};x) = \sum_{k=1}^{\infty} \rho^k(-b_k \cos kx + a_k \sin kx).$$

Відомо, що функцію $\overline{P}_\rho(f;x)$ можна представити у вигляді

$$\overline{P}_\rho(f;x) = -\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x+t)K(\rho,t)dt, \qquad (3)$$

де $K(\rho,t)$ — спряжене ядро Пуассона вигляду

$$K(\rho,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \rho^k \sin kt = \frac{\rho \sin t}{1 - 2\rho\cos t + \rho^2}. \qquad (4)$$

Зазначимо (див., напр., [2]), що коли функція f неперервна на R, то для будь-якого $x \in R: \ \lim\limits_{\rho\to 1-} \overline{P}_\rho(f;x) = \overline{f}(x)$.

Нехай далі W^1_∞—множина 2π-періодичних, абсолютно неперервних функцій $f(\cdot)$, для яких $\|f'(x)\|_\infty \leq 1$. Через $\overline{W}^1_\infty$ будемо позначати множину функцій, спряжених до функцій з множини W^1_∞.

Основною метою роботи є вивчення асимптотичної поведінки величини

$$\mathcal{E}\left(\overline{W}^1_\infty; P_\rho\right)_C = \sup_{f\in W^1_\infty} \left\|\overline{f}(\cdot) - \overline{P}_\rho(f;\cdot)\right\|_C, \ \rho \to 1- . \tag{5}$$

Якщо в явному вигляді знайдено функцію $\varphi(\rho)$ таку, що при $\rho \to 1-$

$$\mathcal{E}\left(\overline{W}^1_\infty; P_\rho\right)_C = \varphi(\rho) + o(\varphi(\rho)),$$

то вслід за О. І. Степанцем [4, с. 198] будемо казати, що розв'язана задача Колмогорова–Нікольського для спряженого інтеграла Пуассона $\overline{P}_\rho(f;\cdot)$ на класі $\overline{W}^1_\infty$ в метриці простору C.

Зауважимо, що в рівномірній метриці задача Колмогорова–Нікольського на класах Соболєва W^1_∞ для функцій $P_\delta(f;\cdot)$ розв'язана В. П. Натансоном [5]. Точні значення верхніх меж відхилень інтегралів Пуассона від функцій з класу W^r_∞, $r \in N$, отримано в роботі О. П. Тімана [6]. Розв'язок задачі Колмогорова–Нікольського на класі неперервних функцій W^r_β, $r > 0$, $\beta \in R$, знайдено в роботі Л. І. Баусова [7]. Апроксимативні властивості методу наближення інтегралами Пуассона на інших класах диференційовних функцій досліджувалися також у роботах К. М. Жигалла і Ю. І. Харкевича [8, 9].

Відомо, що спряжене ядро Пуассона (4) можна подати у вигляді

$$K(\rho,t) = \frac{1}{2}\operatorname{ctg}\frac{t}{2} - \frac{1}{2}\operatorname{ctg}\frac{t}{2}\frac{(1-\rho)^2}{1-2\rho\cos t+\rho^2},$$

тому, згідно з (1) та (3), отримуємо

$$\overline{f}(x) - \overline{P}_\rho(f;x) =$$

$$= -\frac{(1-\rho)^2}{2\pi}\int_0^\pi (f(x+t) - f(x-t))\frac{\operatorname{ctg}\frac{t}{2}}{1-2\rho\cos t+\rho^2}dt.$$

Враховуючи періодичність функції $f(x)$, останню рівність представимо в такому вигляді:

$$\overline{f}(x)-\overline{P}_{\rho}(f;x)=$$

$$=-\frac{(1-\rho)^2}{2\pi}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\left(f(x+t)-f(x-t)\right)\frac{\operatorname{ctg}\frac{t}{2}}{1-2\rho\cos t+\rho^2}dt-$$

$$-\frac{(1-\rho)^2}{2\pi}\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\left(f(x+t)-f(x-t+2\pi)\right)\frac{\operatorname{ctg}\frac{t}{2}}{1-2\rho\cos t+\rho^2}dt. \tag{6}$$

Оскільки для функцій $f(x)\in W^1_\infty$ виконується умова

$$|f(x_1)-f(x_2)|\leq|x_1-x_2|,$$

то, використовуючи (6), знаходимо

$$\left|\overline{f}(x)-\overline{P}_{\rho}(f;x)\right|\leq\frac{(1-\rho)^2}{\pi}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{t\operatorname{ctg}\frac{t}{2}}{1-2\rho\cos t+\rho^2}dt+$$

$$+\frac{(1-\rho)^2}{\pi}\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\frac{(\pi-t)\operatorname{ctg}\frac{t}{2}}{1-2\rho\cos t+\rho^2}dt. \tag{7}$$

Далі, оскільки функція

$$f^*(x)=\begin{cases}x, & 0\leq x\leq\frac{\pi}{2},\\ \pi-x, & \frac{\pi}{2}\leq x\leq\pi,\end{cases} \tag{8}$$

належить класу W^1_∞ і, як випливає з (5) та (6),

$$\mathcal{E}\left(\overline{W}^1_\infty;P_\rho\right)_C\geq\overline{f}(0)-\overline{P}_\rho(f^*;0)=-\frac{(1-\rho)^2}{\pi}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{t\operatorname{ctg}\frac{t}{2}}{1-2\rho\cos t+\rho^2}dt+$$

$$+\frac{(1-\rho)^2}{\pi}\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\frac{(\pi-t)\operatorname{ctg}\frac{t}{2}}{1-2\rho\cos t+\rho^2}dt, \tag{9}$$

то з (7) та (9) отримуємо, що

$$\mathcal{E}\left(\overline{W}^1_\infty; P_\rho\right)_C = \frac{(1-\rho)^2}{\pi}\int\limits_0^{\pi}\frac{f^*(t)\operatorname{ctg}\frac{t}{2}}{1-2\rho\cos t+\rho^2}dt, \tag{10}$$

де $f^*(t)$ — функція вигляду (8).

Для величини $\mathcal{E}\left(\overline{W}^1_\infty; P_\rho\right)_C$ отримано повний розклад за степенями $\ln\frac{1}{\rho}$, $0<\rho<1$ (надалі позначимо $\ln\frac{1}{\rho}=\beta$). Має місце наступне твердження

Теорема. *При $\beta<\frac{\pi}{2}$ має місце точна рівність*

$$\mathcal{E}\left(\overline{W}^1_\infty; P_\rho\right)_C = \beta+$$

$$+\frac{2}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\left(\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\infty}\frac{[f^*(t)]_{2\pi}}{t^{2k+3}}dt-\frac{1}{2k+1}\left(\frac{2}{\pi}\right)^{2k+1}\right)\beta^{2k+2}, \tag{11}$$

де $[f(t)]_{2\pi}$ — непарне 2π-періодичне продовження функції $f(t)$, $0\le t\le\pi$.

Доведення. Представимо спряжене ядро Пуассона вигляду (4) наступним чином:

$$K(\rho,t)=\sum_{k=1}^{\infty}\rho^k\sin kt=\frac{1}{2}\varphi(0)+\sum_{k=1}^{\infty}\varphi(k),$$

де $\varphi_\rho(z)=\rho^z\sin zt$ і перетворимо його, використовуючи косинус-перетворення $\Phi_\rho(\cdot)$ функції $\varphi(\cdot)$

$$\Phi_\rho(u)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int\limits_0^{\infty}\varphi_\rho(z)\cos zu dz.$$

Двічі інтегруючи частинами, знаходимо

$$\Phi_\rho(u) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int\limits_0^\infty \rho^z \sin zt \cos zudz =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[\frac{t+x}{\beta^2 + (t+x)^2} + \frac{t-x}{\beta^2 + (t-x)^2} \right].$$

І, застосовуючи формулу підсумовування Пуассона

$$\frac{1}{2} f\,(0) + \sum_{k=1}^\infty f(k\alpha) = \sqrt{\frac{\beta}{\alpha}} \left(\frac{1}{2} \Phi_\rho(0) + \sum_{k=1}^\infty \Phi_\rho(k\beta) \right),\ \alpha\beta = 2\pi,$$

(див., наприклад, [10, с.82]), отримуємо, що

$$K(\rho,t) = \frac{t}{\beta^2 + t^2} + \sum_{k=1}^\infty \left(\frac{t+2k\pi}{\beta^2 + (t+2k\pi)^2} + \frac{t-2k\pi}{\beta^2 + (t-2k\pi)^2} \right).$$

Отже, для довільної 2π-періодичної функції $f(x)$ в силу останньої рівності та співвідношення (3) маємо, що

$$\overline{P}_\rho(f;x) = -\frac{1}{\pi} \int\limits_{-\infty}^\infty \frac{f(x+t)}{\beta^2 + t^2} tdt.$$

Крім того, є відомим той факт, що в усіх точках, де $\overline{f}(x)$ існує, її можна подати у наступному вигляді:

$$\overline{f}(x) = -\frac{1}{\pi} \int\limits_{-\infty}^\infty \frac{f(x+t)}{t} dt.$$

Звідси

$$\overline{f}(x) - \overline{P}_\rho(f;x) = -\frac{\beta^2}{\pi} \int\limits_{-\infty}^\infty \frac{f(x+t)}{t(\beta^2 + t^2)} dt.$$

Використовуючи отримане інтегральне представлення, аналогічно, як і при встановленні співвідношення (10), знаходимо

$$\mathcal{E}\left(\overline{W}^1_\infty; P_\rho\right)_C = \frac{2\beta^2}{\pi}\int\limits_0^\infty \frac{[f^*(t)]_{2\pi}}{t(\beta^2+t^2)}dt, \tag{12}$$

де $[f^*(t)]_{2\pi}$ — непарне 2π-періодичне продовження функції $f^*(t)$, заданої формулою (8).

Знайдемо значення інтеграла з правої частини (12) на кожному з проміжків $[0, \pi/2]$ і $(\pi/2, \infty)$. Маємо

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{[f^*(t)]_{2\pi}}{t(\beta^2+t^2)}dt = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{\beta^2+t^2} = \left(\int\limits_0^\infty - \int\limits_{\frac{\pi}{2}}^\infty\right)\frac{dt}{\beta^2+t^2} := I_1 - I_2. \tag{13}$$

Оскільки

$$I_1 = \int\limits_0^\infty \frac{dt}{\beta^2+t^2} = \frac{\pi}{2\beta} \tag{14}$$

і при $\beta < \pi/2$

$$I_2 = \int\limits_{\frac{\pi}{2}}^\infty \frac{dt}{\beta^2+t^2} = \frac{1}{\beta}\int\limits_{\frac{\pi}{2\beta}}^\infty \frac{dt}{u^2+1} = \frac{1}{\beta}\int\limits_{\frac{\pi}{2\beta}}^\infty \left(\frac{1}{u^2}\sum_{k=0}^\infty (-1)^k\frac{1}{u^{2k}}\right)du =$$

$$= \frac{1}{\beta}\sum_{k=0}^\infty \frac{(-1)^k}{2k+1}\left(\frac{2\beta}{\pi}\right)^{2k+1}, \tag{15}$$

то з (13—15) випливає, що

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{[f^*(t)]_{2\pi}}{t(\beta^2+t^2)}dt = \frac{1}{\beta}\left(\frac{\pi}{2} - \sum_{k=0}^\infty \frac{(-1)^k}{2k+1}\left(\frac{2\beta}{\pi}\right)^{2k+1}\right). \tag{16}$$

Далі при $\beta < \pi/2$

$$\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^\infty \frac{[f^*(t)]_{2\pi}}{t(\beta^2+t^2)}dt = \sum_{k=0}^\infty (-1)^k\beta^{2k}\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^\infty \frac{[f^*(t)]_{2\pi}}{t^{2k+3}}dt. \tag{17}$$

Поєднуючи співвідношення (16–17) із (12), отримуємо (11). Теорему доведено.

1. *Бари Н.К.* Тригонометрические ряды. — М.: Гос. изд-во физ.-мат. литературы, 1961. — 936 с.
2. *Зигмунд А.* Тригонометрические ряды: В 2-х т. — М.: Мир, 1965. — Т. 1. — 615 с.
3. *Sz.–Nagy B.* Sur l'ordre de l'approximation d'une fonction par son integrale de Poisson // Acta Math. Acad. Sci Hungar. — 1950. — **1**. — P. 183–188.
4. *Степанец А.И.* Методы теориии приближения. — Киев: Ин-т математики НАН Украны, 2002. — Ч.I. — 427 с.
5. *Натансон В.П.* О порядке приближения непрерывной 2π-периодической функции при помощи ее интеграла Пуассона // Докл. АН СССР. — 1950. — **72**, №1. — С. 11–14.
6. *Тиман А.Ф.* Точная оценка остатка при приближении периодических дифференцируемых функций интегралами Пуассона // Докл. АН СССР. — 1950. —**74**, № 1. — С. 17–20.
7. *Баусов Л.И.* Линейные методы суммирования рядов Фурье с заданными прямоугольными матрицами, I // Изв. вузов. Математика. — 1965. — **46**, № 3. — С. 15–31.
8. *Жигалло К. М., Харкевич Ю. І.* Повна асимптотика відхилення від класу диференційовних функцій множини їх гармонійних інтегралів Пуассона // Укр. мат. журн. — 2002. — **54**, № 1. — С. 43–52.
9. *Жигалло К. М., Харкевич Ю. І.* Наближення спряжених диференційовних функцій їх інтегралами Абеля–Пуассона // Укр. мат. журн. — 2009. — **61**, № 1. — С. 73–82.
10. *Титчмарш Е.* Введение в теорию интегралов Фурье. М. — Л.: Гостехиздат, 1948. — 460 с.

Отримано 12.01.10

Волинський національний університет, Луцьк

УДК 517.938.5 + 519.514.17

©2010. **Кадубовський О.А.**

ПРО ОДИН КЛАС ГЛАДКИХ ФУНКЦІЙ НА ДВОВИМІРНІЙ СФЕРІ

У роботі досліджуються гладкі функції на двовимірній сфері S^2, у яких окрім локальних максимумів і мінімумів лише одна (вироджена) критична точка типу сідла. Для функцій із заданим числом максимумів і мінімумів представлено повний топологічний інваріант, за допомогою якого підраховано число топологічно нееквівалентних функцій з вказаного класу, які мають 5 або 6 локальних мінімумів (або ж максимумів).

The paper considers the smooth functions with three critical values on two-dimensional sphere S^2, that possess only one saddle critical point (possibly degenerated) in addition to M local maxima and m minima. For the case when $M = 5; 6$, there was calculated the number of topologically non-equivalent such functions.

Вступ. Нехай N — гладка замкнена поверхня. Позначимо через $C^\infty(N)$ простір нескінченно диференційовних функцій з трьома критичними значеннями на N, усі критичні точки яких ізольовані.

Нагадаємо, що дві функції f і g з простору $C^\infty(N)$ називають *топологічно еквівалентними*, якщо існують гомеоморфізми $k: N \to N$ і $l: R^1 \to R^1$ (l зберігає орієнтацію), такі що

$$g = l \circ f \circ k^{-1}.$$

У подальшому завжди будемо вважати, що N – *орієнтовна поверхня.* Якщо гомеоморфізм k *зберігає орієнтацію*, функції f і g будемо називати O-топологічно еквівалентними.

Відомо [1], що функція $f \in C^\infty(N)$ у деякому околі своєї ізольованої критичної точки $x \in N$ (яка не є локальним екстремумом) у якої топологічний тип ліній рівня при переході через x змінюється, неперервною заміною координат зводиться до виду $f =$

Re $z^n + c \quad (n \geq 2)$. В подальшому будемо називати її *суттєво критичною.* Або до виду $f = \text{Re } z$, якщо топологічний тип ліній рівня при переході через x не змінюється.

Число k суттєво критичних точок x_i функції f разом зі значеннями n_i (показниками в представленні f у виді $f = \text{Re } z^{n_i} + c_i$ в околах точок x_i) називають *топологічним сингулярним типом* функції f.

У роботі [2] досліджено питання топологічної класифікації функцій з класу $C^\infty(N)$ й встановлено, що існує лише *скінчене* число топологічно нееквівалентних функцій з фіксованим сингулярним типом. Проте невідомо скільки таких класів еквівалентності. В загальному випадку ця задача виявилася дуже складною і нерозв'язаною до сьогодні проблемою.

Якщо ж розглянути клас $C_{M,m}(N_g)$ гладких функцій з M максимумами, m мінімумами та *однією* (виродженою) суттєво критичною точкою типу сідла на замкненій орієнтованій поверхні N_g роду $g \geq 1$, то задача про підрахунок числа топологічно нееквівалентних таких функцій дещо спрощується.

Так, наприклад, в роботі [1] були встановлені початкові значення числа топологічно нееквівалентних функцій з класу $C_{1,1}(N_g)$ для поверхонь роду $g = 1, 2, 3$.

У роботах автора [3,4] для функцій з класу $C_{M,m}(N_g)$ було побудовано новий інваріант та доведено, що число O-топологічно нееквівалентних функцій з класу $C_{M,m}(N_g)$ дорівнює числу неізоморфних $D^n_{M,m}$-діаграм з $n = 2g - 1 + M + m$ хордами. Зокрема, у [4] за допомогою вказаного інваріанту для функцій з класу $C_{1,1}(N_g)$ поставлена задача розв'язана повністю (для $g \in N$).

Питання про підрахунок (та асимптотичну оцінку) числа топологічно нееквівалентних функцій з класу $C_{M,m}(N_g)$ при фіксованих M, m і g до сьогодні залишається *відкритим.*

Якщо ж розглянути клас $C_{M,m}(N_0) = C_{M,m}(S^2)$, то поставлена задача значно спрощується, бо для вказаних функцій на сфері число мінімумів M, максимумів m та індекс Пуанкаре $1 - n$ суттєво критичної точки пов'язані рівністю $M + m - n = 1$, а питання про підрахунок числа O-топологічно (топологічно) нееквівалентних таких функцій зводиться до питання про підрахунок числа неізоморфних (нееквівалентних) $D^n_{M,m}$-діаграм з $n = M+m-1$ хордами.

У роботі автора [9] для довільного $n \geq 1$ та початкових $M = 1; 2; 3; 4$ (або ж $M = n; n-1; n-2; n-3$) одержано формули для підрахунку числа O-топологічно нееквівалентних функцій з класу $C_{M,n-M+1}(S^2)$.

В данній роботі встановлено формули для підрахунку числа топологічно нееквівалентних функцій з класу $C_{M,n-M+1}(S^2)$ для довільного $n \geq 1$ та початкових $M = 5; 6$. Крім того, для простих n поставлена задача розв'язана повністю.

1. Основні поняття та визначення.

Означення 1.1. Нехай на площині задане коло і $2n$ точок на ньому, які є вершинами правильного $2n$-кутника. Розіб'ємо ці точки на n пар і з'єднаємо кожну таку пару хордою. Отриману конструкцію — коло з n хордами на ньому — називають хордовою діаграмою з n хордами або, коротко, n-діаграмою (рис. 1 a)).

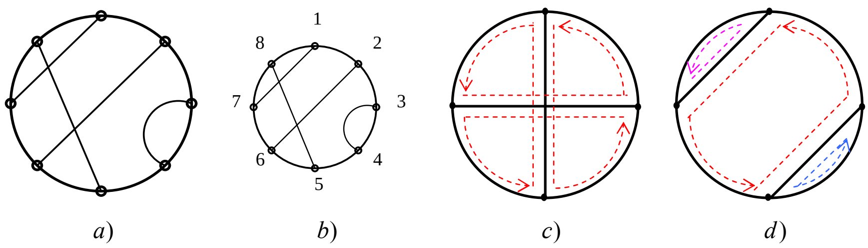


Рис. 1. a) *4-діаграма;* b) *4-діаграма на 8-шаблоні;* c) *2-діаграма з 1 циклом;* d) *2-діаграма з 3 циклами.*

Заради визначеності вважають, що всі n-діаграми побудовані на основі $2n$-шаблону – рис. 1 b).

Означення 1.2. Циклом n-діаграми будемо називати послідовність хорд і дуг кола, які утворюють гомеоморфний образ орієнтованого кола — рис. 1 c), d).

Означення 1.3. Родом хордової n-діаграми з λ циклами називають ціле додатне число g, яке визначається співвідношенням

$$g = \frac{1}{2}(n - \lambda + 1).$$

Означення 1.4. Хордову n-діаграму роду $g = 0$ називають *планарною*, або ж діаграмою мінімального роду.

Добре відомо, що хордова діаграма є планарною тоді і лише тоді, коли її хорди не перетинаються.

Означення 1.5. 2-кольоровою хордовою діаграмою будемо називати n-діаграму, дуги кола якої по черзі розфарбовані у два кольори (чорний і білий) – рис. 2.

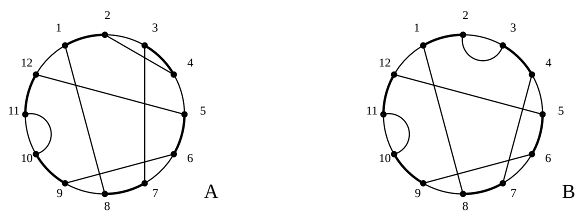


Рис. 2. A – 2-кольорова N-діаграма; B – 2-кольорова O-діаграма

Означення 1.6. 2-кольорову n-діаграму, яка не містить (містить) хорд, що сполучають вершини з номерами однакової парності, будемо називати O-діаграмою (N-діаграмою) – рис. 2.

Означення 1.7. b-циклом (w-циклом) 2-кольорової діаграми називають послідовність хорд та чорних (білих) дуг, які утворюють гомеоморфний образ (орієнтованого) кола.

Означення 1.8. Нехай λ — сумарне число чорних та білих циклів 2-кольорової O-діаграми з n хордами. Родом діаграми будемо називати ціле число g, яке визначається співвідношенням

$$g = \frac{1}{2}(n - \lambda + 1). \tag{1}$$

Множину O-діаграм (з n хордами) роду $g = 0$ позначимо як L_n^0.

Означення 1.9. $O-$діаграму (з n хордами) з M чорними (білими) та m білими (чорними) циклами будемо позначати $D_{M,m}^n$, а множину всіх таких діаграм $\Im_{M,m}^n$.

Означення 1.10. Дві хордові діаграми (зокрема двокольорові) називають ізоморфними, якщо їх можна сумістити за допомогою повороту на певний кут (наприклад, за годинниковою стрілкою) навколо спільного центру.

Нехай L – підмножина класу L_n двокольорових хордових діаграм, побудованих на двокольоровому $2n$-шаблоні.

З леми Бернсайда та, наприклад [3, 4], випливає, що **число неізоморфних діаграм з класу L можна обчислити за допомогою співвідношення**

$$d^* = \frac{1}{n} \cdot \left(|L| + \sum_{i\,|n,\, i \neq n} \phi\left(\frac{n}{i}\right) \cdot p\,(i,n) \right), \text{ де} \tag{2}$$

$|L|$ – число діаграм з множини L; $\phi\,(q)$ – функція Ейлера (число натуральних менших за q чисел взаємно простих із ним); $p\,(i,n)$ – число діаграм з множини L (побудованих на двокольоровому $2n$-шаблоні), які самосуміщаються при повороті на кут $\omega = \frac{2\pi}{n} i$ (навколо центру шаблона), а підсумовування ведеться за всіма дільниками числа n за винятком самого n.

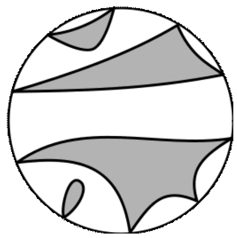
Означення 1.11. Розбиттям $\pi_{k,n}$ множини $[n] = \{1, 2, ..., n-1, n\}$ (partition of $[n]$ with k blocks) називають сукупність k непорожніх підмножин $\pi_1, \pi_2, ...\pi_k$ множини $[n]$, які попарно не перетинаються і об'єднання яких становить $[n]$. Підмножини π_i називають блоками або ж частинами $\pi_{k,n}$. Через NCP_n позначимо усі розбиття множини $[n] = \{1, 2, ..., n-1, n\}$.

Розбиття $\pi_{k,n}$ множини $[n] = \{1, 2, ..., n\}$ подають у вигляді $\pi = \pi_1/\pi_2/.../\pi_k$ та вважать, що в середині кожного блоку елементи розташовуються в порядку зростання, а самі блоки розташовуються в порядку зростання їх мінімальних елементів.

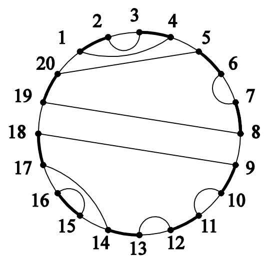
Означення 1.12. Розбиття $\pi_{k,n}$ називають без самоперетинів (non-crossing partition) або ж планарним, якщо не існує елементів $a < b < c < d$ з яких a і c в одному, а b і d в іншому блоці.

Множину таких $\pi_{k,n}$ позначимо через $NCP_{k,n}$.

Якщо зафіксувати шаблон — коло та n точок на ньому (що є вершинами правильного $n-$кутника), занумерувати їх, наприклад, за годинниковою стрілкою числами від 1 до n, то кожному, зокрема планарному, розбиттю можна поставити у відповідність кругову діаграму — 4-граф, який у загальному випадку містить ізольовані вершини (петлі) та подвійні ребра. Зауважимо, що планарним розбиттям відповідають кругові діаграми, що не містять хорд (дуг), які перетинаються – рис. 3 *A*.



A



B

Рис. 3. A — Представлення планарного розбиття $\pi = (1,2)(3,4,10)(5,6,7,9)(8)$ на круговій діаграмі з 10 вершинами;
B — двокольорова O−діаграма роду 0, що відповідає розбиттю π

Не важко бачити, що існує бієкція між елементами множин $\Im_{M,m}^{M+m-1}$ та $NCP_{M,M+m-1}$.

У подальшому множину діаграм з класу $\Im_{M,m}^{M+m-1}$ будемо позначати $\Im_{M,n}$ $(n = M+m-1)$ або ж $\Im_{k,n}$.

2. Неізоморфні O-діаграми мінімального роду з фіксованим числом чорних (або білих) циклів.

Використовуючи результати роботи [5], в якій досліджувались розбиття з множини NCP_n, не складно встановити, що число p_n^* неізоморфних діаграм з класу L_n^0 можна обчислити за допомогою співвідношення

$$p_n^* = \frac{1}{n}\left(\frac{1}{n+1}\cdot C_{2n}^n + \sum_{i\neq n,\ i|n} \phi\left(\frac{n}{i}\right)\cdot C_{2i}^i\right). \tag{3}$$

У загальному випадку — при фіксованих n, M і m (які задовольняють умову $M+m-n=1$) — задача про підрахунок числа неізоморфних діаграм з класу $\Im_{M,n+1-M}^n$ $(\Im_{M,n})$ є **нерозв'язаною**.

Введемо далі наступні позначення:
$P_{k,n}$ — число діаграм з класу $\Im_{k,n}$ (побудованих на шаблоні);
$P^*_{k,n}$ — число неізоморфних діаграм з класу $\Im_{k,n}$.

Оскільки існує бієкція між елементами множин $NCP_{k,n}$ та $\Im_{k,n}$, то, як випливає, наприклад, з [6], має місце твердження

Лема 2.1. Число двокольорових діаграм з класу $\Im_{k,n}$ (побудованих на шаблоні) співпадає з числом Нараяна (Narayana) $P_{k,n}$

$$P_{k,n} = N(k,n) = \frac{1}{n} C_n^k \cdot C_n^{k-1}. \tag{4}$$

Наслідок 2.1. Справедливими є наступні співвідношення

$$P_{k,n} = P_{n-k+1,n}, \quad P^*_{k,n} = P^*_{n-k+1,n}. \tag{5}$$

Крім того, є всі підстави стверджувати, що асимптотичною оцінкою (при $n \to \infty$) для числа $P^*_{k,n}$ неізоморфних діаграм з класу $\Im_{k,n}$ є величина

$$\overline{P^*_{k,n}} = \frac{1}{n^2} C_n^k \cdot C_n^{k-1}, \tag{6}$$

яка співпадає з $P^*_{k,n}$ (співвідношення (30)) у випадку простого n і довільного $1 < k < n$.

З роботи [9] випливає, що для початкових $k = 1, 2, 3, 4$ число $P^*_{k,n}$ неізоморфних діаграм з класу $\Im_{k,n}$ можна обчислити за допомогою наступних співвідношень

$$P^*_{k,n} = \frac{1}{n}\left(\frac{1}{n} C_n^k \cdot C_n^{k-1} + p\,(k,n)\right) = P^*_{n-k+1,n}, \tag{7}$$

де

$$p\,(1,n) = n - 1, \tag{8}$$

$$p\,(2,n) = \begin{cases} 0, & n \neq 2m \\ C^1_{\frac{n}{2}}, & n = 2m, \end{cases} \tag{9}$$

$$p\,(3,n) = \begin{cases} 0, & n = 6m \pm 1 \\ 2C^2_{\frac{n}{2}}, & n = 6m \pm 2 \\ \phi(3) \cdot C^1_{\frac{n}{3}}, & n = 6m \pm 3 \\ 2C^2_{\frac{n}{2}} + \phi(3) \cdot C^1_{\frac{n}{3}}, & n = 6m, \end{cases} \tag{10}$$

$$p\,(4,n) = \begin{cases} 0, & n = 6m \pm 1 \\ C^2_{\frac{n}{2}} + 3C^2_{\frac{n}{2}}, & n = 12m \pm 2 \\ \phi(3) \cdot 2C^2_{\frac{n}{3}}, & n = 12m \pm 3 \\ C^2_{\frac{n}{2}} + 3C^2_{\frac{n}{2}} + \phi(4) \cdot C^1_{\frac{n}{4}}, & n = 12m \pm 4 \\ C^2_{\frac{n}{2}} + 3C^2_{\frac{n}{2}} + \phi(3) \cdot 2C^2_{\frac{n}{3}}, & n = 12m \pm 6 \\ C^2_{\frac{n}{2}} + 3C^2_{\frac{n}{2}} + \phi(3) \cdot 2C^2_{\frac{n}{3}} + \phi(4) \cdot C^1_{\frac{n}{4}}, & n = 12m, \end{cases} \tag{11}$$

Зауважимо, що в наведених випадках $k = 2; 3; 4$: $p(k,n) = 0$ коли НСД (НСК$(k, k-1); n) = 1$. Крім того, підсумовування в кожній з розгорнутих сум ведеться лише за тими дільниками i числа n, при яких $\frac{n}{i}$ є дільником числа k або ж $k-1$.

2.1 Число неізоморфних діаграм з класів $\Im_{5,n}$, $\Im_{6,n}$.

Теорема 2.1. Число неізоморфних діаграм з класу $\Im_{5,n}$ можна обчислити за допомогою наступних співвідношень

$$P^*_{5,n} = \frac{1}{n}\left(\frac{1}{n} C^5_n C^4_n + p\,(5,n)\right), \quad \text{де} \quad p\,(5,n) =$$

$$= \begin{cases} 0, & n \neq 2k \neq 5m \\ 3C^3_{\frac{n}{2}} + 6C^4_{\frac{n}{2}}, & n = 2k \neq 4m \neq 5l \\ 3C^3_{\frac{n}{2}} + 6C^4_{\frac{n}{2}} + \phi(4) \cdot 2C^2_{\frac{n}{4}}, & n = 4k \neq 5m \\ \phi(5) \cdot C^1_{\frac{n}{5}}, & n = 5k \neq 2m \\ 3C^3_{\frac{n}{2}} + 6C^4_{\frac{n}{2}} + \phi(5) \cdot C^1_{\frac{n}{5}}, & n = 10k \neq 4m \\ 3C^3_{\frac{n}{2}} + 6C^4_{\frac{n}{2}} + \phi(4) \cdot 2C^2_{\frac{n}{4}} + \phi(5) \cdot C^1_{\frac{n}{5}}, & n = 20k. \end{cases} \tag{12}$$

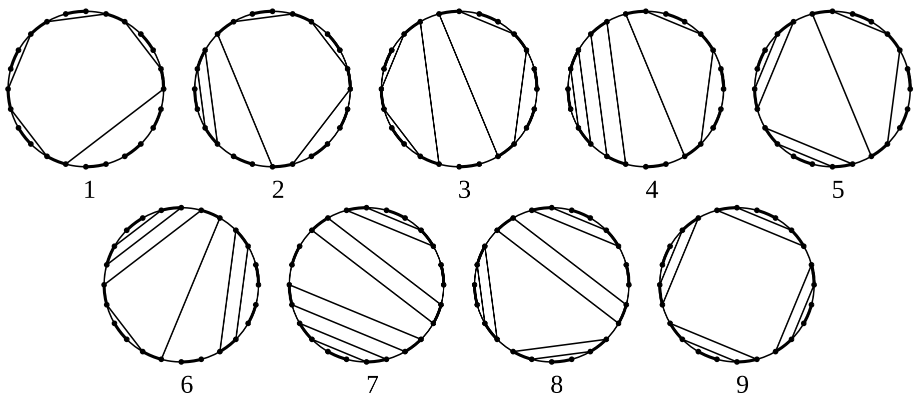


Рис. 4. Всі можливі типи діаграм з класу $\Im_{5,n}$

Доведення. Всі діаграми з класу $\Im_{5,n}$ вичерпуються діаграмами дев'яти типів, позначених на рисунку 4 як 1 – 9.

Позначимо через A_n, B_n, C_n, D_n, E_n, F_n, G_n, H_n і K_n число діаграм з класу $\Im_{5,n}$ (побудованих на шаблоні) відповідно 1-го, 2-го, 3-го, 4-го, 5-го, 6-го, 7-го, 8-го і 9-го типу.

Нехай далі A_n^*, B_n^*, C_n^*, D_n^*, E_n^*, F_n^*, G_n^*, H_n^* і K_n^* — число неізоморфних діаграм 1-го, 2-го, 3-го, 4-го, 5-го, 6-го, 7-го, 8-го і 9-го типу відповідно. Тоді очевидно, що

$$P_{5,n}^* = A_n^* + B_n^* + C_n^* + D_n^* + E_n^* + F_n^* + G_n^* + H_n^* + K_n^*. \tag{13}$$

Обчислимо окремо число неізоморфних діаграм кожного з дев'яти вказаних типів. Не складно бачити, що

$$\begin{aligned} &A_n = C_n^5, \quad B_n = 6C_n^6, \quad C_n = 3C_n^6, \quad D_n = 7C_n^7, \quad E_n = 7C_n^7, \\ &F_n = 7C_n^7, \quad G_n = 4C_n^8, \quad H_n = 8C_n^8, \quad K_n = 2C_n^8. \end{aligned}$$

Крім того, $P_{5,n} = A_n + B_n + C_n + D_n + E_n + F_n + G_n + H_n + K_n =$

$$= \frac{1}{n} \cdot C_n^5 \cdot C_n^4. \tag{14}$$

Діаграми 1-го типу, які самосуміщаються при повороті на кут $\omega = \frac{2\pi}{2n} \cdot 2i$, $i = 1, ..., n-1$ (за годинниковою стрілкою) є такими, що

"5-дужник" також переходить у себе. Це можливо лише за умов коли n ділиться на 5, а поворот здійснюється на кут, кратний куту $\omega = \frac{2\pi}{5}$ (при $i = \frac{n}{5}$).

Загальне число діаграм 1-го типу, які самосуміщаються при повороті на кут $\frac{2\pi}{5}$ становить $a_{n,5} = \begin{cases} 0, & n \neq 5k \\ C^1_{\frac{n}{5}}, & n = 5k. \end{cases}$

Тоді за лемою Бернсайда число неізоморфних діаграм 1-го типу можна обчислити за допомогою співвідношень

$$A^*_n = \frac{1}{n}\left(C^5_n + \phi(5)\cdot a_{n,5}\right) = \begin{cases} \frac{1}{n}C^5_n, & n \neq 5k \\ \frac{1}{n}\left(C^5_n + 4C^1_{\frac{n}{5}}\right), & n = 5k. \end{cases} \tag{15}$$

Не складно бачити, що серед діаграм 2-го, 4-го, 5-го, 6-го і 8-го типу немає таких, що самосуміщаються при повороті на певний кут $\omega = \frac{2\pi}{2n}\cdot 2i$, $i = 1, ..., n-1$ (за годинниковою стрілкою). Тому

$$B^*_n = \tfrac{6}{n}C^6_n, \quad D^*_n = \tfrac{7}{n}C^7_n, \quad E^*_n = \tfrac{7}{n}C^7_n, \quad F^*_n = \tfrac{7}{n}C^7_n, \quad H^*_n = \tfrac{8}{n}C^8_n. \tag{16}$$

Діаграми 3-го типу, які самосуміщаються при повороті на кут $\omega = \frac{2\pi}{2n}\cdot 2i$, $i = 1, ..., n-1$ (за годинниковою стрілкою) є такими, що два "3-дужники" переходять один в інший. Це можливо лише за умов, коли n ділиться на 2, а поворот здійснюється на кут, кратний куту $\omega = \pi$ (при $i = \frac{n}{2}$).

Загальне число діаграм 3-го типу, які самосуміщаються при повороті на кут π становить $c_{n,2} = \begin{cases} 0, & n \neq 2k \\ 3C^3_{\frac{n}{2}}, & n = 2k. \end{cases}$

І тому число неізоморфних діаграм 3-го типу можна обчислити за допомогою співвідношень

$$C^*_n = \frac{1}{n}\left(3C^6_n + \phi(2)c_{n,2}\right) = \begin{cases} \frac{3}{n}C^6_n, & n \neq 2k \\ \frac{1}{n}\left(3C^6_n + 3C^3_{\frac{n}{2}}\right), & n = 2k. \end{cases} \tag{17}$$

Діаграми 7-го типу, які самосуміщаються при повороті на кут $\omega = \frac{2\pi}{2n}\cdot 2i$, $i = 1, ..., n-1$ (за годинниковою стрілкою) є такими що чотири (псевдопаралельні) "2-дужники" переходять один в інший. Це можливо лише за умов, коли n ділиться на 2, а поворот здійснюється на кут, кратний куту $\omega = \pi$ (при $i = \frac{n}{2}$).

Загальне число діаграм 7-го типу, які самосуміщаються при повороті на кут π становить $g_{n,2} = \begin{cases} 0, & n \neq 2k \\ 4C^4_{\frac{n}{2}}, & n = 2k. \end{cases}$

І тому число неізоморфних діаграм 7-го типу можна обчислити за допомогою співвідношень

$$G^*_n = \frac{1}{n}\left(4C^8_n + \phi(2)g_{n,2}\right) = \begin{cases} \frac{4}{n}C^8_n, & n \neq 2k \\ \frac{1}{n}\left(4C^8_n + 4C^4_{\frac{n}{2}}\right), & n = 2k. \end{cases} \tag{18}$$

Діаграми 9-го типу, які самосуміщаються при повороті на кут $\omega = \frac{2\pi}{2n} \cdot 2i$, $i = 1, ..., n-1$ є такими, що чотири "2-дужники" переходить один в інший. Це можливо лише за умов, коли n ділиться на 2 або ж на 4, а поворот здійснюється на кут, кратний куту $\omega = \pi$ (при $i = \frac{n}{2}$), або ж на кут кратний куту $\omega = \frac{\pi}{2}$ (при $i = \frac{n}{4}$) відповідно.

Загальне число діаграм 9-го типу, які самосуміщаються при повороті на кут $\frac{\pi}{2}$, становить $k_{n,4} = \begin{cases} 0, & n \neq 4l \\ 2C^2_{\frac{n}{4}}, & n = 4l. \end{cases}$

Загальне ж число діаграм 9-го типу, які самосуміщаються при повороті на кут π, становить $k_{n,2} = \begin{cases} 0, & n \neq 2l \\ 2C^4_{\frac{n}{2}}, & n = 2l. \end{cases}$

Тоді число неізоморфних діаграм 9-го типу можна обчислити за допомогою співвідношень

$$K^*_n = \frac{1}{n}\left(2C^8_n + \phi(2)k_{n,2} + \phi(4)k_{n,4}\right) =$$

$$= \begin{cases} \frac{2}{n}C^8_n, & n \neq 2l \\ \frac{1}{n}\left(2C^8_n + 2C^4_{\frac{n}{2}}\right), & n = 4l \pm 2 \\ \frac{1}{n}\left(2C^8_n + 2C^4_{\frac{n}{2}} + 4C^2_{\frac{n}{4}}\right), & n = 4l. \end{cases} \tag{19}$$

Зі співвідношень (13) – (19) і випливає справедливість (12).

Зауваження 2.1. Не складно бачити, що

$$\begin{aligned} P^*_{5,n} &= \tfrac{1}{n}\left(\tfrac{1}{n}C^5_nC^4_n - A_n - C_n - G_n - K_n\right) + A^*_n + C^*_n + G^*_n + K^*_n = \\ &= \tfrac{1}{n}\left(\tfrac{1}{n}C^5_nC^4_n - A_n - C_n - G_n - K_n\right) + \tfrac{1}{n}\left(A_n + C_n + G_n + K_n\right) + \\ &+ \tfrac{1}{n}\left(\phi(5)a_{n,5} + \phi(2)c_{n,2} + \phi(2)g_{n,2} + \phi(2)k_{n,2} + \phi(4)k_{n,4}\right) = \\ &= \tfrac{1}{n^2}C^5_nC^4_n + \tfrac{1}{n}\left(\phi(5)a_{n,5} + \phi(2)c_{n,2} + \phi(2)g_{n,2} + \phi(2)k_{n,2} + \phi(4)k_{n,4}\right). \end{aligned}$$

Звідки випливає, що для підрахунку числа неізоморфних діаграм з класу $\Im_{k,n}$ (при фіксованому k) достатньо обмежуватись розглядом лише тих типів діаграм, які самосуміщаються на певний кут $\omega = \frac{2\pi}{2n} \cdot 2i$, $i = 1, ..., n-1$.

Наслідок 2.2. Число O-топологічно нееквівалентних функцій з класу $C_{5,n-4}(S^2)$ може бути обчислене за допомогою співвідношень (12).

Теорема 2.2. Число неізоморфних діаграм з класу $\Im_{6,n}$ можна обчислити за допомогою наступних співвідношень

$$P^*_{6,n} = \frac{1}{n}\left(\frac{1}{n}C^6_n \cdot C^5_n + p\,(6,n)\right), \ p\,(6,n) =$$

$$= \begin{cases} 0, & n \neq 2k \neq 3m \neq 5l \\ C^3_{\frac{n}{2}} + 8C^4_{\frac{n}{2}} + 10C^5_{\frac{n}{2}}, & n = 2k \neq 3m \neq 5l \\ \phi(3) \cdot \left(C^2_{\frac{n}{3}} + 3C^3_{\frac{n}{3}}\right), & n = 3k \neq 2m \neq 5l \\ C^3_{\frac{n}{2}} + 8C^4_{\frac{n}{2}} + 10C^5_{\frac{n}{2}} + & \\ +\phi(3) \cdot \left(C^2_{\frac{n}{3}} + 3C^3_{\frac{n}{3}}\right) + \phi(6) \cdot C^1_{\frac{n}{6}}, & n = 6k \neq 5m \\ \phi(5) \cdot 2C^2_{\frac{n}{5}}, & n = 5k \neq 2m \neq 3l \\ C^3_{\frac{n}{2}} + 8C^4_{\frac{n}{2}} + 10C^5_{\frac{n}{2}} + \phi(5) \cdot 2C^2_{\frac{n}{5}}, & n = 10k \neq 3m \\ \phi(3) \cdot \left(C^2_{\frac{n}{3}} + 3C^3_{\frac{n}{3}}\right) + \phi(5) \cdot 2C^2_{\frac{n}{5}}, & n = 15k \neq 2m \\ C^3_{\frac{n}{2}} + 8C^4_{\frac{n}{2}} + 10C^5_{\frac{n}{2}} + \phi(3) \cdot \left(C^2_{\frac{n}{3}} + 3C^3_{\frac{n}{3}}\right) + & \\ +\phi(5) \cdot 2C^2_{\frac{n}{5}} + \phi(6) \cdot C^1_{\frac{n}{6}}, & n = 30k. \end{cases} \tag{20}$$

Доведення. Всі типи діаграм з класу $\Im_{6,n}$, які самосуміщаються при повороті на певний кут $\omega = \frac{2\pi}{2n} \cdot 2i$, $i = 1, ..., n-1$, наведено на рис. 5. Позначимо через A_n, B_n, C_n, D_n, E_n, F_n і G_n число діаграм відповідно 1-го, 2-го, 3-го, 4-го, 5-го, 6-го і 7-го типу.

Нехай далі A^*_n, B^*_n, C^*_n, D^*_n, E^*_n, F^*_n і G^*_n — число неізоморфних діаграм 1-го, 2-го, 3-го, 4-го, 5-го, 6-го та 7-го типу відповідно. Тоді

$$P^*_{6,n} = \frac{1}{n}\left(\frac{1}{n}C^6_n C^5_n - A_n - B_n - C_n - D_n - E_n - F_n - G_n\right) +$$

$$+A_n^* + B_n^* + C_n^* + D_n^* + E_n^* + F_n^* + G_n^*. \qquad (21)$$

Обчислимо окремо число неізоморфних діаграм кожного із семи вказаних типів.

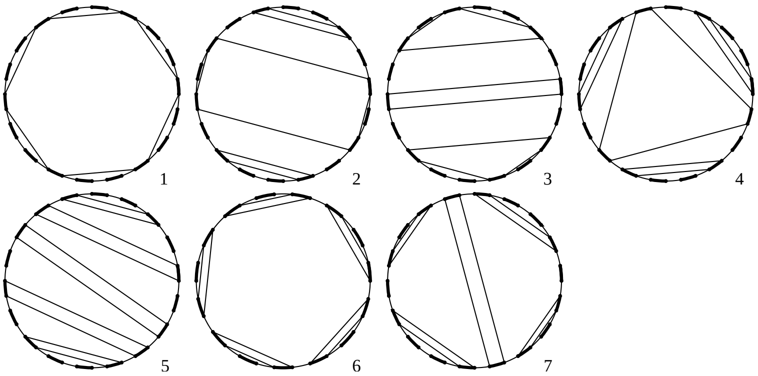


Рис. 5. Всі типи діаграм з класу $\Im_{6,n}$, які самосуміщаються при повороті на певний кут $\omega = \frac{2\pi}{2n} \cdot 2i, \quad i = 1, ..., n-1$

Діаграми першого типу самосуміщаються при повороті на кут $\omega = \frac{2\pi}{2n} \cdot 2i, \quad i = 1, ..., n-1$ (за годинниковою стрілкою) лише за умов, коли n ділиться на 2, на 3 або ж на 6, а поворот здійснюється на кут, кратний куту $\omega = \pi$ (при $i = \frac{n}{2}$), куту $\omega = \frac{2\pi}{3}$ (при $i = \frac{n}{3}$), або ж на кут, кратний куту $\omega = \frac{\pi}{3}$ (при $i = \frac{n}{6}$) відповідно.

Загальне число діаграм 1-го типу, які самосуміщаються при повороті на кут π, становить $a_{n,2} = \begin{cases} 0, & n \neq 2l \\ C^3_{\frac{n}{2}}, & n = 2l. \end{cases}$

Загальне число діаграм 1-го типу, які самосуміщаються при повороті на кут $\frac{2\pi}{3}$, становить $a_{n,3} = \begin{cases} 0, & n \neq 3l \\ C^2_{\frac{n}{3}}, & n = 3l. \end{cases}$

Загальне число діаграм 1-го типу, які самосуміщаються при повороті на кут $\frac{\pi}{3}$, становить $a_{n,6} = \begin{cases} 0, & n \neq 6l \\ C^1_{\frac{n}{6}}, & n = 6l. \end{cases}$

Тому число неізоморфних діаграм першого типу можна обчислити за допомогою співвідношень

$$A_n^* = \frac{1}{n}\left(A_n + \phi(2) \cdot a_{n,2} + \phi(3) \cdot a_{n,3} + \phi(6) \cdot a_{n,6}\right) =$$

$$
= \begin{cases} \frac{1}{n}A_n, & n = 6m \pm 1 \\ \frac{1}{n}\left(A_n + C^3_{\frac{n}{2}}\right), & n = 6m \pm 2 \\ \frac{1}{n}\left(A_n + \phi(3)C^2_{\frac{n}{3}}\right), & n = 6m \pm 3 \\ \frac{1}{n}\left(A_n + C^3_{\frac{n}{2}} + \phi(3)C^2_{\frac{n}{3}} + \phi(6)C^1_{\frac{n}{6}}\right), & n = 6m. \end{cases} \tag{22}
$$

Діаграми другого типу самосуміщаються при повороті на певний кут $\omega = \frac{2\pi}{2n} \cdot 2i$, $i = 1, ..., n-1$ лише за умов, коли n ділиться на 2, а поворот здійснюється на кут, кратний куту $\omega = \pi$ (при $i = \frac{n}{2}$).

Загальне число діаграм 2-го типу, які самосуміщаються при повороті на кут π, становить $b_{n,2} = \begin{cases} 0, & n \neq 2l \\ 4C^4_{\frac{n}{2}}, & n = 2l. \end{cases}$

Тому число неізоморфних діаграм 2-го типу можна обчислити за допомогою співвідношень

$$
B^*_n = \frac{1}{n}\left(B_n + \phi(2)b_{n,2}\right) = \begin{cases} \frac{1}{n}B_n, & n \neq 2l \\ \frac{1}{n}\left(B_n + 4C^4_{\frac{n}{2}}\right), & n = 2l. \end{cases} \tag{23}
$$

Діаграми 3-го типу самосуміщаються при повороті на певний кут $\omega = \frac{2\pi}{2n} \cdot 2i$, $i = 1, ..., n-1$ лише за умов, коли n ділиться на 2, а поворот здійснюється на кут, кратний куту $\omega = \pi$ (при $i = \frac{n}{2}$).

Загальне число діаграм 3-го типу, які самосуміщаються при повороті на кут π, становить $\mathrm{c}_{n,2} = \begin{cases} 0, & n \neq 2l \\ 4C^4_{\frac{n}{2}}, & n = 2l. \end{cases}$

Тому число неізоморфних діаграм 3-го типу можна обчислити за допомогою співвідношень

$$
\mathrm{C}^*_n = \frac{1}{n}\left(\mathrm{C}_n + \phi(2)\mathrm{c}_{n,2}\right) = \begin{cases} \frac{1}{n}\mathrm{C}_n, & n \neq 2l \\ \frac{1}{n}\left(\mathrm{C}_n + 4C^4_{\frac{n}{2}}\right), & n = 2l. \end{cases} \tag{24}
$$

Діаграми 4-го типу самосуміщаються при повороті на певний кут $\omega = \frac{2\pi}{2n} \cdot 2i$, $i = 1, ..., n-1$ лише за умов, коли n ділиться на 3, а поворот здійснюється на кут, кратний куту $\omega = \frac{2\pi}{3}$ (при $i = \frac{n}{3}$).

Загальне число діаграм 4-го типу, які самосуміщаються при повороті на кут $\frac{2\pi}{3}$, становить $d_{n,3} = \begin{cases} 0, & n \neq 3l \\ 3C^3_{\frac{n}{3}}, & n = 3l. \end{cases}$

Тому число неізоморфних діаграм 4-го типу можна обчислити за допомогою співвідношень

$$D_n^* = \frac{1}{n}\left(D_n + \phi(3)d_{n,3}\right) = \begin{cases} \frac{1}{n}D_n, & n \neq 3l \\ \frac{1}{n}\left(D_n + 3\phi(3)C^3_{\frac{n}{3}}\right), & n = 3l. \end{cases} \tag{25}$$

Діаграми 5-го типу самосуміщаються при повороті на певний кут $\omega = \frac{2\pi}{2n} \cdot 2i$, $i = 1, ..., n-1$ лише за умов, коли n ділиться на 2, а поворот здійснюється на кут, кратний куту $\omega = \pi$ (при $i = \frac{n}{2}$).

Загальне число діаграм 5-го типу, які самосуміщаються при повороті на кут π, становить $e_{n,2} = \begin{cases} 0, & n \neq 2l \\ 5C^2_{\frac{n}{2}}, & n = 2l. \end{cases}$

Тому число неізоморфних діаграм 5-го типу можна обчислити за допомогою співвідношень

$$E_n^* = \frac{1}{n}\left(E_n + \phi(2)e_{n,2}\right) = \begin{cases} \frac{1}{n}E_n, & n \neq 2l \\ \frac{1}{n}\left(E_n + 5C^5_{\frac{n}{2}}\right), & n = 2l. \end{cases} \tag{26}$$

Діаграми 6-го типу самосуміщаються при повороті на певний кут $\omega = \frac{2\pi}{2n} \cdot 2i$, $i = 1, ..., n-1$ лише за умов, коли n ділиться на 5, а поворот здійснюється на кут, кратний куту $\omega = \frac{2\pi}{5}$ (при $i = \frac{n}{5}$).

Загальне число діаграм 6-го типу, які самосуміщаються при повороті на кут $\frac{2\pi}{5}$, становить $f_{n,5} = \begin{cases} 0, & n \neq 5l \\ 2C^2_{\frac{n}{5}}, & n = 5l. \end{cases}$

Тому число неізоморфних діаграм 6-го типу можна обчислити за допомогою співвідношень

$$F_n^* = \frac{1}{n}\left(F_n + \phi(5)f_{n,5}\right) = \begin{cases} \frac{1}{n}F_n, & n \neq 5l \\ \frac{1}{n}\left(F_n + 2\phi(5)C^2_{\frac{n}{5}}\right), & n = 5l. \end{cases} \tag{27}$$

Діаграми 7-го типу самосуміщаються при повороті на певний кут $\omega = \frac{2\pi}{2n} \cdot 2i$, $i = 1, ..., n-1$ лише за умов, коли n ділиться на 2, а поворот здійснюється на кут, кратний куту $\omega = \pi$ (при $i = \frac{n}{2}$).

Загальне число діаграм 7-го типу, які самосуміщаються при повороті на кут π, становить $g_{n,2} = \begin{cases} 0, & n \neq 2l \\ 5C^5_{\frac{n}{2}}, & n = 2l. \end{cases}$

Тому число неізоморфних діаграм 7-го типу можна обчислити за допомогою співвідношень

$$G_n^* = \frac{1}{n}\left(g_n + \phi(2)g_{n,2}\right) = \begin{cases} \frac{1}{n}G_n, & n \neq 2l \\ \frac{1}{n}\left(G_n + 5C_{\frac{n}{2}}^5\right), & n = 2l. \end{cases} \tag{28}$$

Зі співвідношень (21) – (28) випливає справедливість (20).

Наслідок 2.3. Число O-топологічно нееквівалентних функцій з класу $C_{6,n-5}(S^2)$ може бути обчислене за допомогою співвідношень (20).

2.2 Частинні випадки.

Оскільки $|\Im_{k,n}| = \frac{1}{n}C_n^k \cdot C_n^{k-1}$, то формулу (2) для простого n можна подати у вигляді

$$P_{k,n}^* = \frac{1}{n}\left(\frac{1}{n}C_n^k \cdot C_n^{k-1} + (n-1)\cdot p\,(k,n,1)\right), \quad \text{де} \tag{29}$$

$p\,(k,n,1)$ – число діаграм з класу $\Im_{k,n}$ (побудованих на шаблоні), які самосуміщаються при повороті на кут $\omega = \frac{2\pi}{n}$.

Якщо $k = 1$ (або $k = n$), то $p\,(k,n,1) = 1$, оскільки існує єдина діаграма (з точністю до розфарбування) на шаблоні, яка самосуміщається при повороті на кут $\omega = 2\pi/n$. В інших випадках $p\,(k,n,1) = 0$. Тому справедливим є твердження

Лема 2.2. Для простого n число неізоморфних діаграм з класу $\Im_{k,n}$ може бути обчислене за допомогою співвідношень

$$P_{k,n}^* = \begin{cases} \frac{1}{n^2}C_n^kC_n^{k-1} + \frac{n-1}{n}, & k = 1; n \\ \frac{1}{n^2}C_n^kC_n^{k-1}, & k \neq 1; n. \end{cases} \tag{30}$$

Крім того, має місце більш загальне твердження

Лема 2.3. Нехай $1 < k < n$. Якщо НСД (НСК$(k, k-1); n) = 1$, то

$$P_{k,n}^* = \frac{1}{n^2}C_n^kC_n^{k-1}. \tag{31}$$

Справедливість твердження не складно показати методом від супротивного.

Наслідок 2.4. Якщо НСД (НСК$(k, k-1); n) = 1$, то число O-топологічно нееквівалентних функцій з класу $C_{k,n-k+1}(S^2)$ може бути обчислене за допомогою співвідношення (31).

3. Число нееквівалентних діаграм з класу $\Im_{k,n}$.

За лемою Бернсайда число нееквівалентних діаграм з класу $\Im_{k,n}$ може бути обчислене за допомогою співвідношень

$$P^{**}_{k,n} = \frac{1}{2}\left(P^{*}_{k,n} + \frac{1}{n} \cdot P_{sim}\right), \quad \text{де}$$

P_{sim} — загальна кількість діаграм з $\Im_{k,n}$, які є симетричними відносно певної осі симетрії двокольорового $2n$-шаблону. Причому

$$P_{sim} = \begin{cases} n \cdot p_0(n,k), & n = 2m \pm 1 \\ \frac{n}{2} \cdot (p_1(n,k) + p_2(n,k)), & n = 2m, \end{cases} \qquad \text{де}$$

$p_0(n, k)$ – число діаграм з $\Im_{k,n}$, симетричних відносно фіксованої осі симетрії, що проходить через середини діаметрально протилежних чорної та білої дуг шаблону;
$p_1(n, k)$ $(p_2(n, k))$ – число діаграм з $\Im_{k,n}$, симетричних відносно фіксованої осі симетрії, що проходить через середини діаметрально протилежних чорних (білих) дуг шаблону.

Добре відомо (див. напр. [7]), що існує бієкція між елементами множини $NCP_{k,n}$ (а тому і $\Im_{k,n}$) та елементами множини, відомими як "Dyck n-paths with exactly k peaks". Крім того, як випливає з робіт [5, 8], величина $T(n,k) = \frac{1}{n} \cdot P_{sim}$ співпадає з числом об'єктів, відомих як "symmetric Dyck paths of semi-length n with k peaks". Зокрема, у [8] показано, що

$$T(n,k) = C^{\left[\frac{k-1}{2}\right]}_{\left[\frac{n-1}{2}\right]} \cdot C^{\left\lceil\frac{k-1}{2}\right\rceil}_{\left\lceil\frac{n-1}{2}\right\rceil}, \quad \text{де} \tag{32}$$

$[\cdot]$ — ціла частина числа; $\lceil\cdot\rceil$ — функція "потолок" — округлення до найближчого більшого цілого числа. Таким чином, має місце

Теорема 3. Число нееквівалентних діаграм з класу $\Im_{k,n}$ може бути обчислене за допомогою співвідношення

$$P^{**}_{k,n} = \frac{1}{2}\left(P^{*}_{k,n} + C^{\left[\frac{k-1}{2}\right]}_{\left[\frac{n-1}{2}\right]} \cdot C^{\left\lceil\frac{k-1}{2}\right\rceil}_{\left\lceil\frac{n-1}{2}\right\rceil}\right). \tag{33}$$

Наслідок. Число топологічно нееквівалентних функцій з класу $C_{k,n-k+1}(S^2)$ можна обчислити за допомогою формули (33).

$n \backslash k$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
2	1	1										
3	1	1	1									
4	1	2	2	1								
5	1	2	4	2	1							
6	1	3	10	10	3	1						
7	1	3	15	25	15	3	1					
8	1	4	26	64	64	26	4	1				
9	1	4	38	132	196	132	38	4	1			
10	1	5	56	256	536	536	256	56	5	1		
11	1	5	75	450	1260	1764	1260	450	75	5	1	
12	1	6	104	765	2736	5102	5102	2736	765	104	6	1

Табл. 1. Початкові значення числа О-топологічно нееквівалентних функцій з класу $C_{k,n-k+1}(S^2)$

$n \backslash k$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
2	1	1										
3	1	1	1									
4	1	2	2	1								
5	1	2	4	2	1							
6	1	3	8	8	3	1						
7	1	3	12	17	12	3	1					
8	1	4	19	41	41	19	4	1				
9	1	4	27	78	116	78	27	4	1			
10	1	5	38	148	298	298	148	38	5	1		
11	1	5	50	250	680	932	680	250	50	5	1	
12	1	6	67	420	1443	2651	2651	1443	420	67	6	1

Табл. 2. Початкові значення числа топологічно нееквівалентних функцій з класу $C_{k,n-k+1}(S^2)$

Висновки. У цій роботі по суті встановлено критерій топологічної еквівалентності функцій з класу $C_{M,m}(S^2)$ в термінах "non-crossing partition of $[M+m-1]$ with M blocks". За допомогою вказаних об'єктів вдалося встановити формули для підрахунку числа топологічно нееквівалентних функцій з класу $C_{M,n-M+1}(S^2)$ для довільного $n \geq 2$ та початкових $M = 5; 6$ (або ж $M = n-4; n-5$).

Крім того, у випадках, коли НСД $(\text{НСК}(k, k-1); n) = 1$, або ж n є простим поставлена задача розв'язана повністю.

На думку автора, дослідження в цьому напрямку доцільно продовжити, узагальнивши одержані результати на випадок довільного M. Одержані в роботі результати можуть бути ефективно використані під час класифікації та підрахунку числа топологічно нееквівалентних градієнтноподібних векторних полів з однією сідловою особливістю на двовимірній сфері.

1. *Prishlyak A.O.* Topological equivalence of smooth functions with isolated critical points on a cloused surface. //Topology and its Aplications.-2002.-pp.257-267.
2. *Шарко В.В.* Гладкая и топологическая эквивалентность функций на поверхностях. // Укр. мат. жур. – 2003. – 55, №5 – С.687-700.
3. *Кадубовський О.* Топологічна еквівалентність функцій на орієнтованих поверхнях // Укр. мат. жур. – т.58, №3, 2006, с.343–351.
4. *Кадубовський О.* Про один клас хордових діаграм максимального роду // Вісник Київського університету Серія: фізико-математичні науки, Вип. 1, 2006, С.17–27.
5. *D. Callan, L. Smiley Non-crossing Partitions under Rotation and Reflection* // http://arxiv.org/abs/math.CO/0510447, 2005.
6. *R. Stanley* Enumerative combinatorics // Vol. 2, Cambridge University Press, New York, 1999.
7. *R. Stanley* Catalan addendum, http://www-math.mit.edu/ rstan/ec/catadd.pdf
8. *P. Barry* On Integer-Sequence-Based Constructions of Generalized Pascal Triangles // Journal of Integer Sequences, Vol. 9, 2006.
9. *Кадубовський О.А.* Про число топологічно нееквівалентних функцій з однією виродженою критичною точкою типу сідла на двовимірній сфері // Проблеми топології та суміжні питання / Зб. Праць Інституту математики НАН України, 2010 (в друці).

Отримано 01.09.2010

Слов'янський державний педагогічний університет
`kadubovs@ukr.net`

УДК 517.5

©2010. **Кальчук І.В., Грабова У.З., Степанюк Т.А.**

НАБЛИЖЕННЯ ФУНКЦІЙ З КЛАСІВ $W^r_\beta H^\alpha$ БІГАРМОНІЙНИМИ ІНТЕГРАЛАМИ ПУАССОНА

Отримано асимптотичну рівність для величин верхніх меж відхилень бігармонійних інтегралів Пуассона від функцій з класу $W^r_\beta H^\alpha$, $0 \le \alpha < 1$, в рівномірній метриці.

Asymptotic equality is received for the sizes of upper bound of deviations of Poisson's biharmonic integrals from functions from class $W^r_\beta H^\alpha$, $0 \le \alpha < 1$, in uniform metric.

1. Постановка задачі та деякі допоміжні твердження. Нехай C — простір 2π-періодичних неперервних функцій, у якому норма задається за допомогою рівності $\|f\|_C = \max\limits_t |f(t)|$; L_∞ — простір 2π-періодичних вимірних суттєво обмежених функцій з нормою $\|f\|_\infty = \operatorname{ess}\sup\limits_t |f(t)|$; L — простір 2π-періодичних сумовних на періоді функцій, в якому норма задається рівністю $\|f\|_L = \|f\|_1 = \int\limits_{-\pi}^{\pi} |f(t)|dt$.

Величину

$$B(\rho; f; x) = \frac{a_o}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_\rho(k) \left(a_k \cos kx + b_k \sin kx\right), \quad 0 \le \rho < 1, \qquad (1)$$

де

$$\lambda_\rho(k) = \left(1 + \frac{k}{2}\left(1 - \rho^2\right)\right) \rho^k \cos kt,$$

прийнято називати бігармонійним інтегралом Пуассона функції f. Поклавши $\rho = e^{-\frac{1}{\delta}}$ бігармонійний інтеграл Пуассона запишемо у

Виконано за підтримки Державного фонду фундаментальних досліджень України (проект Ф25.1/043)

вигляді

$$B_\delta(f;x) = \frac{a_o}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_\delta(k) \left(a_k \cos kx + b_k \sin kx\right), \quad \delta > 0, \qquad (2)$$

$$\lambda_\delta(k) = \left(1 + \frac{k}{2}\left(1 - e^{-\frac{2}{\delta}}\right)\right) e^{-\frac{k}{\delta}} \cos kt.$$

Нехай $r > 0$ і β — фіксоване дійсне число. Якщо ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^r \left(a_k \cos\left(kx + \frac{\beta\pi}{2}\right) + b_k \sin\left(kx + \frac{\beta\pi}{2}\right)\right)$$

є рядом Фур'є деякої сумовної функції φ, то таку функцію називають (r,β)–похідною функції f в розумінні Вейля–Надя і позначають $f^r_\beta(\cdot)$. Множину всіх функцій $f(x)$, котрі задовольняють таку умову, позначають через W^r_β.

Якщо $f \in W^r_\beta$, і при цьому $f^r_\beta \in H^\alpha$, тобто f^r_β задовольняє умову Ліпшиця порядку α:

$$|f^r_\beta(x+h) - f^r_\beta(x)| \le |h|^\alpha, \quad 0 < \alpha \le 1,$$

то кажуть, що f належить до класу $W^r_\beta H^\alpha$. При $\alpha = 0$ вважають, що $W^r_\beta H^0 = W^r_\beta$.

Через W^r позначають множину 2π-періодичних функцій, які мають абсолютно неперервні похідні до $(r-1)$-го порядку включно і $\|f^{(r)}(t)\|_\infty \le 1$. А $\overline{W}^r$ — клас функцій, спряжених до функцій із класу W^r.

Цю роботу присвячено вивченню асимптотичної поведінки величин

$$\mathcal{E}(W^r_\beta H^\alpha; B_\delta)_C = \sup_{f \in W^r_\beta H^\alpha} \|f(x) - B_\delta(f,x)\|_C, \quad \delta \to \infty.$$

Якщо в явному вигляді знайдена функція $g(\delta) = g(B_\delta;\delta)$ така, що при $\delta \to \infty$

$$\mathcal{E}(W^r_\beta H^\alpha; B_\delta)_C = g(\delta) + o(g(\delta)),$$

то, наслідуючи О.І. Степанця [1], будемо казати, що розв'язана задача Колмогорова–Нікольського для бігармонійного інтеграла Пуассона $B_\delta(f;x)$ на класі $W^r_\beta H^\alpha$ в рівномірній метриці.

Апроксимативні властивості методу наближення бігармонійними інтегралами Пуассона на класах диференційовних функцій досліджували багато вчених.

У 1963 р. С. Канієв в роботі [2] встановив асимптотичну рівність для величини $\mathcal{E}(W^1; B(\rho))_C$ при $\rho \to 1-$. У цій же роботі він встановив і точні значення апроксимативних характеристик $\mathcal{E}(W^r; B(\rho))_C,\ 0 \le \rho < 1$.

У 1968 р. P. Pych [3] уточнила результати Канієва для величини $\mathcal{E}(W^1; B(\rho))_C$, отримавши асимптотичну рівність із більш точним порядком залишкового члена.

Пізніше ці дослідження були продовжені в роботі Л. П. Фалалеєва [4], де було отримано повний асимптотичний розклад для величини $\mathcal{E}(W^1; B(\rho))_C$ за степенями $1-\rho$, $\rho \to 1-$.

У роботі Л. П. Фалалеєва та Т. І. Аманова [5] було знайдено повний асимптотичний розклад для величини $\mathcal{E}(W^1; B_\delta)_C$, який формулюється як в термінах $\frac{1}{\delta}$, так і в термінах $1-\rho$.

У роботі К. М. Жигалла, Ю. І. Харкевича [6] було знайдено повні асимптотичні розклади величин $\mathcal{E}(W^r; B(\rho))_C$ за степенями $1-\rho$, $\rho \to 1-$. Пізніше в роботі цих же авторів [7] були отримані точні значення верхніх граней наближень бігармонійними інтегралами Пуассона на класах спряжених диференційовних функцій у рівномірній та інтегральній метриках.

Водночас проводилися дослідження величин наближень функцій з класів $W^r_\beta H^\alpha$ лінійними методами підсумовування рядів Фур'є. Зокрема в 1966 р. Л. І. Баусов [8] отримав асимптотичну рівність для точної верхньої межі відхилення функцій з класу $W^r_\beta H^\alpha$ за допомогою інтегралів Абеля–Пуассона за степенями $1-\rho$, $\rho \to 1-$.

До цього часу апроксимативні властивості бігармонійного інтегралу Пуассона на класах $W^r_\beta H^\alpha$ не були досліджені. Тому постало питання про відшукання асимптотичних рівностей для точних верхніх меж наближень функцій з класів $W^r_\beta H^\alpha$ бігармонійними інтегралами Пуассона.

Наведемо деякі основні означення і твердження, які нам будуть необхідні для подальшої роботи.

Для бігармонійного інтеграла Пуассона введемо функцію

$$\tau(u)=\begin{cases}(1-[1+\gamma u]e^{-u})\delta^r, & 0\le u\le \frac{1}{\delta},\\ (1-[1+\gamma u]e^{-u})u^{-r}, & u\ge \frac{1}{\delta},\end{cases} \tag{3}$$

де $\gamma=\frac{1}{2}(1-e^{-\frac{2}{\delta}})\delta$, перетворення Фур'є якої

$$\hat{\tau}_\beta(t)=\frac{1}{\pi}\int\limits_0^\infty \tau(u)\cos\left(ut+\frac{\beta\pi}{2}\right)du \tag{4}$$

є сумовним на всій числовій осі (цей факт доведено в роботі [9]).

Розглянемо функцію

$$F^r_{\beta,\delta}(x)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\Big(f^r_\beta(x+\frac{t}{\delta})-f^r_\beta(x)\Big)\widehat{\tau}_\beta(t)dt,\quad \delta>0,\ x\in R,$$

де інтеграл слід розуміти як границю інтегралів по симетричних проміжках, що розширюються. Ця функція є періодичною та сумовною. Повторюючи міркування, наведені в роботі [1, с. 54], нескладно переконатися в тому, що коефіцієнти Фур'є функції $F^r_{\beta,\delta}(x)$ можна представити у вигляді

$$a_k(F^r_{\beta,\delta}(x))=k^r\tau\left(\frac{k}{\delta}\right)a_k(f),\quad b_k(F^r_{\beta,\delta}(x))=k^r\tau\left(\frac{k}{\delta}\right)b_k(f)$$

(тут $a_k(f)$ та $b_k(f)$ — коефіцієнти Фур'є функції f). Тоді

$$S\left[F^r_{\beta,\delta}(x)\right]=S\left[\int\limits_{-\infty}^{\infty}\Big(f^r_\beta(x+\frac{t}{\delta})-f^r_\beta(x)\Big)\widehat{\tau}_\beta(t)dt\right]=$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}k^r\tau\left(\frac{k}{\delta}\right)(a_k(f)\cos kx+b_k(f)\sin kx), \tag{5}$$

Отже, на підставі формули (5) для $\forall f \in W^r_\beta H^\alpha$ отримуємо

$$S\left[\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left(f^r_\beta(x+\frac{t}{\delta})-f^r_\beta(x)\right)\widehat{\tau}_\beta(t)dt\right]=\delta^r S\left[f(x)-B_\delta(f;x)\right], \qquad (6)$$

де $B_\delta(f;x)$ — це бігармонійний інтеграл Пуассона виду (2). Із рівності (6) випливає, що для $\forall f \in W^r_\beta H^\alpha$ в кожній точці $x \in R$ має місце рівність

$$f(x)-B_\delta(f;x)=\frac{1}{\delta^r}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left(f^r_\beta(x+\frac{t}{\delta})-f^r_\beta(x)\right)\widehat{\tau}_\beta(t)dt, \quad \delta>0. \qquad (7)$$

Означення $1'$**[8].** *Нехай функція* $\tau(u)$ *задана на* $[0;\infty)$*, абсолютно неперервна,* $\tau(\infty)=0$ *і* $0\le\alpha<1$*. Кажуть, що функція* $\tau(u)\in\mathcal{E}_\alpha$*, якщо похідну в тих точках, де вона не існує можна доозначити так, щоб існували інтеграли*

$$\int\limits_0^{\frac{1}{2}}u^{1-\alpha}|d\tau'(u)|, \int\limits_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}}|u-1|^{1-\alpha}|d\tau'(u)|, \int\limits_{\frac{3}{2}}^{\infty}(u-1)|d\tau'(u)|.$$

Надалі домовимось через K, K_i, $i=1,2,...$ позначати сталі, власне кажучи, не ті самі в різних співвідношеннях.

Теорема $1'$**[8].** *Нехай* $\tau(u)\in\mathcal{E}_\alpha$ $(0\le\alpha<1)$, $\sin\frac{\beta\pi}{2}\tau(0)=0$ *і*

$$\xi(A,B)=\begin{cases}\frac{\pi}{2}|A|, & |B|\le|A|,\\ |A|\arcsin\left|\frac{A}{B}\right|, & |B|>|A|.\end{cases}$$

Для збіжності інтеграла $A(\alpha,\tau)$ *вигляду*

$$A(\alpha,\tau)=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}|t|^\alpha\left|\int\limits_0^{\infty}\tau(u)\cos\left(ut+\frac{\beta\pi}{2}\right)du\right|dt \qquad (8)$$

необхідно і достатньо, щоб збігалися інтеграли

$$\left|\sin\frac{\beta\pi}{2}\right|\int\limits_0^{\infty}\frac{|\tau(u)|}{u^{1+\alpha}}du, \int\limits_0^1\frac{|\tau(1-u)-\tau(1+u)|}{u^{1+\alpha}}du,$$

при цьому справедливими є оцінки:

$$\left|A(\alpha,\tau)-\frac{4}{\pi^2}\int\limits_0^\infty \xi\left(\sin\frac{\beta\pi}{2}\tau(u),|\tau(1+u)-\tau(1-u)|\right)\frac{du}{u^{1+\alpha}}\right|\leq$$

$$\leq KH(\alpha,\tau);$$

$$\left|A(\alpha,\tau)-\frac{2}{\pi}\left|\sin\frac{\beta\pi}{2}\right|\int\limits_0^\infty\frac{|\tau(u)|}{u^{1+\alpha}}du\right|\leq$$

$$\leq K\left(\int\limits_0^1\frac{|\tau(1-u)-\tau(1+u)|}{u^{1+\alpha}}du+H(\alpha,\tau)\right); \qquad (9)$$

$$\left|A(\alpha,\tau)-\frac{4}{\pi^2}\int\limits_0^1\frac{|\tau(1-u)-\tau(1+u)|}{u^{1+\alpha}}du\right|\leq$$

$$\leq K\left(\left|\sin\frac{\beta\pi}{2}\right|\int\limits_0^\infty\frac{|\tau(u)|}{u^{1+\alpha}}du+H(\alpha,\tau)\right);$$

де

$$H(\alpha,\tau)=|\tau(0)|+|\tau(1)|+\int\limits_0^{\frac{1}{2}}u^{1-\alpha}|d\tau'(u)|+\int\limits_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}}|u-1|^{1-\alpha}|d\tau'(u)|+$$

$$+\int\limits_{\frac{3}{2}}^{\infty}(u-1)|d\tau'(u)|.$$

2. Наближення функцій з класів $W^r_\beta H^\alpha$ бігармонійними інтегралами Пуассона. В прийнятих вище позначеннях має місце наступна теорема:

Теорема. *При $r > 2$, $0 \le \alpha < 1$ і $\delta \to \infty$ має місце асимптотична рівність*

$$\mathcal{E}(W^r_\beta H^\alpha; B_\delta)_C = \frac{1}{\delta^2} \sup_{f \in W^r_\beta H^\alpha} \left\| \frac{f_0^{(2)}(x)}{2} + f_0^{(1)}(x) \right\|_C + O\left(\frac{1}{\delta^{r+\alpha}} + \frac{1}{\delta^3} \right), \tag{10}$$

де $f_0^{(1)}(x)$ і $f_0^{(2)}(x)$ — відповідно $(1,0)$–похідна та $(2,0)$–похідна функції f в розумінні Вейля–Надя.

Доведення. Подамо функцію $\tau(u)$, задану за допомогою співвідношення (3) у вигляді $\tau(u) = \varphi(u) + \mu(u)$, де

$$\varphi(u) = \begin{cases} \left(\frac{u^2}{2} + \frac{u}{\delta}\right)\delta^r, & 0 \le u \le \frac{1}{\delta}, \\ \left(\frac{u^2}{2} + \frac{u}{\delta}\right)u^{-r}, & u \ge \frac{1}{\delta}, \end{cases} \tag{11}$$

$$\mu(u) = \begin{cases} (1 - [1+\gamma u]e^{-u} - \frac{u^2}{2} - \frac{u}{\delta})\delta^r, & 0 \le u \le \frac{1}{\delta}, \\ (1 - [1+\gamma u]e^{-u} - \frac{u^2}{2} - \frac{u}{\delta})u^{-r}, & u \ge \frac{1}{\delta}. \end{cases} \tag{12}$$

Переконаємося в сумовності перетворень $\widehat{\varphi}_\beta(t)$ і $\widehat{\mu}_\beta(t)$ виду (4) функцій $\varphi(u)$ та $\mu(u)$.

Для збіжності інтеграла $A(\alpha, \varphi)$ згідно з теоремою $1'$ досить показати збіжність інтегралів

$$\int\limits_0^{\frac{1}{2}} u^{1-\alpha} |d\varphi'(u)|, \quad \int\limits_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} |u-1|^{1-\alpha} |d\varphi'(u)|, \quad \int\limits_{\frac{3}{2}}^{\infty} (u-1)|d\varphi'(u)|, \tag{13}$$

$$\left|\sin\frac{\beta\pi}{2}\right| \int\limits_0^\infty \frac{|\varphi(u)|}{u^{1+\alpha}} du, \quad \int\limits_0^1 \frac{|\varphi(1-u) - \varphi(1+u)|}{u^{1+\alpha}} du, \tag{14}$$

Оцінимо перший інтеграл із (13). Оскільки при $u \in \left[0; \frac{1}{\delta}\right]$ $\varphi'(u) = \delta^r\left(u + \frac{1}{\delta}\right)$, $\varphi''(u) = \delta^r$, то

$$\int\limits_0^{\frac{1}{\delta}} u^{1-\alpha}|d\varphi'(u)| = \int\limits_0^{\frac{1}{\delta}} u^{1-\alpha}d\varphi'(u) = \delta^r \int\limits_0^{\frac{1}{\delta}} u^{1-\alpha}du = O\left(\frac{1}{\delta^{2-(r+\alpha)}}\right).$$

При $u \in \left[\frac{1}{\delta}; \frac{1}{2}\right]$, врахувавши, що $r > 2$, отримуємо

$$\varphi'(u) = \frac{2-r}{2}u^{1-r} + \frac{1-r}{\delta}u^{-r},$$

$$\varphi''(u) = \frac{(2-r)(1-r)}{2}u^{-r} - \frac{(1-r)r}{\delta}u^{-r-1} > 0, \tag{15}$$

$$\int\limits_{\frac{1}{\delta}}^{\frac{1}{2}} u^{1-\alpha}|d\varphi'(u)| = \int\limits_{\frac{1}{\delta}}^{\frac{1}{2}} u^{1-\alpha}d\varphi'(u) = O\left(1 + \frac{1}{\delta^{2-(r+\alpha)}}\right).$$

Отже,

$$\int\limits_0^{\frac{1}{2}} u^{1-\alpha}|d\varphi'(u)| = O\left(1 + \frac{1}{\delta^{2-(r+\alpha)}}\right). \tag{16}$$

Оцінимо другий інтеграл із (13). Оскільки підінтегральна функція є неперервною на $\left[\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right]$, а отже є обмеженою, то

$$\int\limits_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} |u-1|^{1-\alpha}|d\varphi'(u)| = O(1). \tag{17}$$

Оцінимо третій інтеграл із (13). Враховуючи (15), а також те, що $r > 2$, отримуємо

$$\int\limits_{\frac{3}{2}}^{\infty} (u-1)|d\varphi'(u)| \leq \int\limits_{\frac{3}{2}}^{\infty} ud\varphi'(u) = O(1).$$

Для того, щоб оцінити перший інтеграл з (14) розіб'ємо проміжок $[0;\infty)$ на три частини: $\left[0;\frac{1}{\delta}\right]$, $\left[\frac{1}{\delta};1\right]$ та $[1;\infty)$.

$$\int\limits_0^{\frac{1}{\delta}}\frac{|\varphi(u)|}{u^{1+\alpha}}du=\delta^r\int\limits_0^{\frac{1}{\delta}}\frac{\left(\frac{u^2}{2}+\frac{u}{\delta}\right)}{u^{1+\alpha}}du=O\left(\frac{1}{\delta^{2-(r+\alpha)}}\right), \tag{18}$$

$$\int\limits_{\frac{1}{\delta}}^{1}\frac{|\varphi(u)|}{u^{1+\alpha}}du=\int\limits_{\frac{1}{\delta}}^{1}\frac{\left(\frac{u^{2-r}}{2}+\frac{u^{1-r}}{\delta}\right)}{u^{1+\alpha}}du=O\left(1+\frac{1}{\delta^{2-(r+\alpha)}}\right), \tag{19}$$

$$\int\limits_1^{\infty}\frac{|\varphi(u)|}{u^{1+\alpha}}du=\int\limits_1^{\infty}\frac{\left(\frac{u^{2-r}}{2}+\frac{u^{1-r}}{\delta}\right)}{u^{1+\alpha}}du=O(1). \tag{20}$$

З (18)– (20) одержимо

$$\int\limits_0^{\infty}\frac{|\varphi(u)|}{u^{1+\alpha}}du=O\left(1+\frac{1}{\delta^{2-(r+\alpha)}}\right). \tag{21}$$

Оцінимо другий інтеграл з (14). Неважко переконатися, що

$$\int\limits_0^{1}\frac{|\varphi(1-u)-\varphi(1+u)|}{u^{1+\alpha}}du=\int\limits_0^{1}\frac{\varphi(1+u)-\varphi(1-u)}{u^{1+\alpha}}du=$$

$$=O\left(\frac{1}{\delta^{1-(r+\alpha)}}\right).$$

Таким чином, в силу теореми $1'$ перетворення Фур'є функції $\varphi(u)$, заданої у вигляді (3), сумовне на всій числовій осі.

Для того, щоб оцінити величину $A(\alpha,\mu)$, згідно сформульованої вище теореми $1'$, досить знайти оцінку наступних інтегралів:

$$\int\limits_0^{\frac{1}{2}}u^{1-\alpha}|d\mu'(u)|,\quad \int\limits_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}}|u-1|^{1-\alpha}|d\mu'(u)|,\quad \int\limits_{\frac{3}{2}}^{\infty}(u-1)|d\mu'(u)|, \tag{22}$$

$$\left|\sin\frac{\beta\pi}{2}\right|\int\limits_0^\infty\frac{|\mu(u)|}{u^{1+\alpha}}du,\quad \int\limits_0^1\frac{|\mu(1-u)-\mu(1+u)|}{u^{1+\alpha}}du. \tag{23}$$

Для цього спочатку покажемо, що

$$d\mu'(u)\le 0,\quad \mu(u)\le 0. \tag{24}$$

Позначимо

$$\bar\mu=1-e^{-u}-\gamma ue^{-u}-\frac{u}{\delta}-\frac{u^2}{2}.$$

Враховуючи, що мають місце нерівності

$$\gamma<1,\quad 1-\gamma<\frac{1}{\delta},\quad -1+\gamma+\frac{1}{\delta}<\frac{2}{3\delta^2}, \tag{25}$$

$$1-e^{-u}-\gamma ue^{-u}\le\frac{u}{\delta}+\frac{u^2}{2},\quad e^{-u}\le 1-u+\frac{u^2}{2},\quad e^{-u}\ge 1-u,\quad u\ge 0, \tag{26}$$

одержимо

$$|\bar\mu(u)|<\frac{1}{3\delta^2}u+\frac{1}{\delta}u^2+\frac{u^3}{2},$$

$$|\bar\mu'(u)|<\frac{2}{3\delta^2}+\frac{2}{\delta}u+\frac{3}{2}u^2,$$

$$|\bar\mu''(u)|<\frac{2}{\delta}+3u.$$

Враховуючи те, що $\mu(u)=\delta^r\bar\mu(u)$, $u\in\left[0;\frac{1}{\delta}\right]$, отримаємо нерівності (24) у випадку $u\in\left[0;\frac{1}{\delta}\right]$.

Для доведення нерівностей (24) при $u\ge\frac{1}{\delta}$ дослідимо функцію

$$\widetilde\mu(u)=\frac{1}{u^2}-\frac{e^{-u}}{u^2}-\gamma\frac{e^{-u}}{u}-\frac{1}{2}-\frac{1}{u\delta}.$$

Оскільки

$$\widetilde\mu(u)=\frac{\bar\mu(u)}{u^2},$$

$$\widetilde\mu'(u)=-\frac{2}{u^3}+\frac{2e^{-u}}{u^3}+\frac{e^{-u}}{u^2}+\gamma\frac{e^{-u}}{u^2}+\frac{1}{u^2\delta}=$$

$$= \frac{1}{u^3}\left(-2 + 2e^{-u} + (1+\gamma)ue^{-u} + \gamma u^2 e^{-u} + \frac{u}{\delta}\right),$$

$$\widetilde{\mu}''(u) = \frac{6}{u^4} - \frac{6e^{-u}}{u^4} - \frac{4e^{-u}}{u^3} - \frac{e^{-u}}{u^2} - \gamma\frac{2e^{-u}}{u^3} - 2\gamma\frac{e^{-u}}{u^2} - \gamma\frac{e^{-u}}{u} - \frac{2}{u^3\delta} =$$

$$= \frac{1}{u^4}\left(6 - 6e^{-u} - (4+2\gamma)ue^{-u} - (1+2\gamma)u^2e^{-u} - \gamma u^3 e^{-u} - \frac{2u}{\delta}\right),$$

то враховуючи те, що $\gamma > \frac{1}{\delta}$ і $e^{-u} \geq 1-u$, одержимо

$$\widetilde{\mu}''(u) < 0,$$

$$\widetilde{\mu}''(u) > \frac{1}{u^3}\left(-2 + 2 - 2u + \left(1 + 1 - \frac{1}{\delta}\right)(u - u^2) + \gamma u^2 e^{-u} + \frac{u}{\delta}\right) =$$

$$= \frac{1}{u^3}\left(\frac{u^2}{\delta} + \gamma u^2 e^{-u}\right) > 0,$$

$$\widetilde{\mu}''(u) < \frac{1}{u^4}\left(6 - 6 + 6u - \left(4 + 2 - \frac{2}{\delta}\right)(u - u^2) - \right.$$

$$\left. -(1+2\gamma)u^2e^{-u} - \gamma u^3 e^{-u} - \frac{2u}{\delta}\right) =$$

$$= \frac{1}{u^4}\left(-\frac{2u^2}{\delta} - (1+2\gamma)u^2 e^{-u} - \gamma u^3 e^{-u}\right) < 0.$$

Отже, при $u \geq \frac{1}{\delta}$, маємо

$$\mu''(u) = \left(u^{2-r}\widetilde{\mu}(u)\right)'' = (2-r)(1-r)u^{-r}\widetilde{\mu}(u) +$$

$$+2(2-r)u^{1-r}\widetilde{\mu}'(u) + u^{2-r}\widetilde{\mu}'' < 0.$$

Отже, нерівності (24) виконуються для всіх $u \geq 0$.

Використавши першу нерівність із (24) оцінимо інтеграли з (22):

$$\int\limits_0^{\frac{1}{2}} u^{1-\alpha}|d\mu'(u)| < \int\limits_0^{\frac{1}{2}} |d\mu'(u)| = -\int\limits_0^{\frac{1}{2}} d\mu'(u) = O(1), \qquad (27)$$

$$\int\limits_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} |u-1|^{1-\alpha}|d\mu'(u)| \le \int\limits_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} |d\mu'(u)| = -\mu'(u)\Big|_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} = O(1), \tag{28}$$

$$\int\limits_{\frac{3}{2}}^{\infty}(u-1)|d\mu'(u)| \le \int\limits_{\frac{3}{2}}^{\infty} u|d\mu'(u)| = -u\mu'(u)|_{\frac{3}{2}}^{\infty} + \int\limits_{\frac{3}{2}}^{\infty} u\mu'(u)du = O(1). \tag{29}$$

Для того, щоб оцінити перший інтеграл з (23) розіб'ємо проміжок $[0;\infty)$ на три частини: $\left[0;\frac{1}{\delta}\right]$, $\left[\frac{1}{\delta};1\right]$ та $[1;\infty)$. Враховуючи спочатку рівність (12) і другу нерівність з (24), а потім (25), (26), отримаємо

$$\int\limits_0^{\frac{1}{\delta}} \frac{|\mu(u)|}{u^{1+\alpha}}du = -\int\limits_0^{\frac{1}{\delta}} \frac{\mu(u)}{u^{1+\alpha}}du =$$

$$= \delta^r \int\limits_0^{\frac{1}{\delta}} \left(-1 + e^{-u} - \gamma u e^{-u} + \frac{u^2}{2} + \frac{u}{\delta}\right)\frac{du)}{u^{1+\alpha}} \le$$

$$\le \int\limits_0^{\frac{1}{\delta}} \left(\frac{1}{\delta} + \gamma - 1 + (1-\gamma)u + \frac{\gamma}{2}u^2\right)\frac{du}{u^\alpha} \le$$

$$\le \delta^r \int\limits_0^{\frac{1}{\delta}} \left(\frac{2}{3\delta^2} + \frac{u}{\delta} + \frac{u^2}{2}\right)\frac{du}{u^\alpha} = O\left(\frac{1}{\delta^{3-(r+\alpha)}}\right), \tag{30}$$

$$\int\limits_{\frac{1}{\delta}}^{1} \frac{|\mu(u)|}{u^{1+\alpha}}du \le \int\limits_{\frac{1}{\delta}}^{1} \left(\frac{1}{\delta} + \gamma - 1 + (1-\gamma)u + \frac{\gamma}{2}u^2\right)u^{-r-\alpha}du =$$

$$= O\left(1 + \frac{1}{\delta^{3-(r+\alpha)}}\right), \tag{31}$$

$$\int\limits_1^\infty \frac{|\mu(u)|}{u^{1+\alpha}} du = \int\limits_1^\infty \left(e^{-u} - 1 + \gamma u e^{-u} + \frac{u^2}{2} + \frac{u}{\delta}\right) \frac{du}{u^{1+r+\alpha}} \leq$$

$$\leq \int\limits_1^\infty \left(-1 + u + \gamma + \frac{1}{\delta}\right) \frac{du}{u^{r+\alpha}} = O(1). \tag{32}$$

З (30)–(32) одержимо:

$$\int\limits_0^\infty \frac{|\mu(u)|}{u^{1+\alpha}} du = O\left(1 + \frac{1}{\delta^{3-(r+\alpha)}}\right). \tag{33}$$

Для того, щоб оцінити другий інтеграл з (23), відмітимо, що при $\bar{\lambda}(u) = [1 + \gamma u]e^{-u} + \frac{u^2}{2} + \frac{u}{\delta}$ і $\delta \to \infty$ має місце рівність

$$\int\limits_0^1 \frac{|\mu(1-u) - \mu(1+u)|}{u^{1+\alpha}} du = \int\limits_0^1 \frac{|\overline{\lambda}(1-u) - \overline{\lambda}(1+u)|}{u^{1+\alpha}} du +$$

$$+ \left(|\mu(0)| + |\mu(1)| + \int\limits_0^{\frac{1}{2}} u^{1-\alpha} |d\mu'(u)| + \int\limits_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} |u-1|^{1-\alpha} |d\mu'(u)| + \right.$$

$$\left. + \int\limits_{\frac{3}{2}}^\infty (u-1)|d\mu'(u)| \right).$$

І оскільки

$$\int\limits_0^1 \frac{|\overline{\lambda}(1-u) - \overline{\lambda}(1+u)|}{u^{1+\alpha}} du = O(1),$$

то, враховуючи співвідношення (27) – (29), отримаємо

$$\int\limits_0^1 \frac{|\mu(1-u)-\mu(1+u)|}{u^{1+\alpha}}du = O(1). \qquad (34)$$

Підставляючи (27)–(29), (33)–(34) в (9), одержимо

$$A(\alpha,\mu) = O\left(1+\frac{1}{\delta^{3-(r+\alpha)}}\right). \qquad (35)$$

Враховуючи інтегральне представлення (7) і те, що $f(x)\in W^r_\beta H^\alpha$, одержимо

$$\mathcal{E}\left(W^r_\beta H^\alpha; B_\delta\right)_C = \sup_{f\in W^r_\beta H^\alpha}\left\|\frac{1}{\delta^r}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\Big(f^r_\beta\big(x+\frac{t}{\delta}\big)-f^r_\beta(x)\Big)\widehat{\tau}_\beta(t)dt\right\|_C =$$

$$= \sup_{f\in W^r_\beta H^\alpha}\left\|\frac{1}{\delta^r}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\Big(f^r_\beta\big(x+\frac{t}{\delta}\big)-f^r_\beta(x)\Big)(\widehat{\varphi}_\beta(t)+\widehat{\mu}_\beta(t))dt\right\|_C \leq$$

$$\leq \sup_{f\in W^r_\beta H^\alpha}\left\|\frac{1}{\delta^r}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\Big(f^r_\beta\big(x+\frac{t}{\delta}\big)-f^r_\beta(x)\Big)\widehat{\varphi}_\beta(t)dt\right\|_C +$$

$$+\frac{1}{\delta^{r+\alpha}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}|t|^\alpha|\widehat{\mu}_\beta(t)|dt. \qquad (36)$$

Звідси, враховуючи (8), будемо мати

$$\mathcal{E}\left(W^r_\beta H^\alpha; B_\delta\right)_C = \sup_{f\in W^r_\beta H^\alpha}\left\|\frac{1}{\delta^r}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\Big(f^r_\beta\big(x+\frac{t}{\delta}\big)-f^r_\beta(x)\Big)\widehat{\varphi}_\beta(t)dt\right\|_C +$$

$$+O\left(\frac{1}{\delta^{r+\alpha}}A(\alpha,\mu)\right), \quad \delta\to\infty. \qquad (37)$$

Згідно із співвідношенням (5), ряд Фур'є функції

$$f_{\varphi}(x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \Big(f_{\beta}^{r}\big(x + \frac{t}{\delta}\big) - f_{\beta}^{r}(x) \Big) \widehat{\varphi}_{\beta}(t)dt$$

має вигляд

$$S[f_{\varphi}] = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{k^2}{2\delta^{2-r}} + \frac{k}{\delta^{2-r}} \right) (a_k(f) \cos kx + b_k(f) \sin kx).$$

Тому

$$f_{\varphi}(x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \Big(f_{\beta}^{r}\big(x + \frac{t}{\delta}\big) - f_{\beta}^{r}(x) \Big) \widehat{\varphi}_{\beta}(t)dtt = \frac{1}{\delta^{2-r}} \left(\frac{f_0^{(2)}(x)}{2} + f_0^{(1)}(x) \right). \tag{38}$$

Підставляючи (38) в (37) отримуємо, що при $\delta \to \infty$

$$\mathcal{E}(W_{\beta}^{r} H^{\alpha}; B_{\delta})_C = \frac{1}{\delta^2} \sup_{f \in W_{\beta}^{r} H^{\alpha}} \left\| \frac{f_0^{(2)}(x)}{2} + f_0^{(1)}(x) \right\|_C +$$

$$+ O\left(\frac{1}{\delta^{r+\alpha}} A(\alpha, \mu) \right). \tag{39}$$

Враховуючи також оцінку (35), одержимо (10). Теорему доведено.

1. *Степанец А.И.* Классификация и приближение периодических функций. — К.: Наук. думка, 1987. — 268 с.
2. *Каниев С.* Об уклонении бигармонических в круге функций от их граничных значений // Докл. АН СССР. — 1963 — **153**, № 5 — С. 995–998.
3. *P.Pych.* On a biharmonic function in unit disk // Ann.pol.math. — 1968. — **20**, № 3 — P. 203–213.
4. *Фалалеев Л.П.* Полное асимптотическое разложение для верхней грани уклонения функций из $Lip_1 1$ от одного сингулярного интеграла // Теоремы вложения и их приложения: Материалы всесоюзного симпозиума. — Алма-Ата: "Наука"КазССР, 1976. — С. 163–167.

5. *Аманов Т.И., Фалалеев Л.П.* Приближение дифференцируемых функций операторами типа Абеля-Пуассона // 5-ое Советско-Чехословацкое совещание по применению методов теории функций и функционального анализа к задачам математической физики (Алма-Ата, 1976): Тр. совещания. — Новосибирск, 1979. — С. 13–16.
6. *Жигалло К.М., Харкевич Ю.І.* Наближення диференційовних періодичних функцій їх бігармонійними інтегралами Пуассона // Укр. мат. журн. — 2002. — **54**, № 9 — С. 1213–1219.
7. *Жигалло К.М., Харкевич Ю.І.* Наближення спряжених диференційовних функцій бігармонійними інтегралами Пуассона // Укр. мат. журн. — 2009. — **61**, № 3 — С. 333–345.
8. *Баусов Л.И.* Линейные методы суммирования рядов Фурье с заданными прямоугольными матрицами, II//Изв. вузов. — 1996. — **46**, № 3 — С. 15–31.
9. *Жигалло К.М., Харкевич Ю.І.* Наближення бігармонійними інтегралами Пуассона класів (ψ, β)– диференційовних функцій в інтегральній метриці // Проблеми теорії наближення функцій та суміжні питання: Пр. Ін-ту математики НАН України. — 2004. — **1**, № 1. — С. 144–170.

Отримано 12.01.2010

Волинський національний університет імені Лесі Українки

УДК 517.5

©2010. **Новиков О.А., Шулик Т.В., Ровенская О.Г.**

Приближение аналитических функций r–повторными суммами Валле Пуссена

Получены асимптотические формулы для верхних граней уклонений тригонометрических полиномов, порождаемых повторным методом суммирования Валле Пуссена, взятых по классам аналитических периодических функций действительной переменной.

There were obtained asymptotic equalities for upper bounds of the deviations of the r–repeated Vallee Poussin's sums taken over classes of Poisson's integrals. These equalities, in corresponding cases, guarantee the solvability of the Kolmogorov-Nikol'skii's problem for the repeated Vallee Poussin's sums on the classes of analytic functions.

Следуя А.И. Степанцу [1], обозначим C^q_β классы непрерывных 2π-периодических функций $f(\cdot)$, которые можно представить в виде свертки

$$f(x) = A_0 + \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} \varphi(x+t) P^q_\beta(t)\ dt,$$

в которой

$$P^q_\beta(t) = \sum_{k=1}^{\infty} q^k \cos(kt + \frac{\beta\pi}{2}), \qquad q \in (0;1),\ \beta \in R$$

— ядро Пуассона.

Известно (см., например, [2]), что классы C^q_β, которые принято называть классами интегралов Пуассона, состоят из функций f, которые являются сужениями на действительную ось функций $F(z)$, аналитических в полосе $|\mathrm{Im} z| \le \ln\frac{1}{q}$.

Обозначим через $S_n(f;x)$ частичные суммы ряда Фурье. Применяя к суммам $S_n(f;x)$ метод суммирования Валле Пуссена (см. [2, с. 47]), получаем суммы Валле Пуссена функции $f \in L$

$$V_{n,p}(f,x) = \frac{1}{p} \sum_{k=n-p}^{n-1} S_k(f,x).$$

Применяя метод суммирования Валле Пуссена r раз, получаем следующий метод построения тригонометрических полиномов. Пусть $p_1,\ p_2, ..., p_r$ — произвольные натуральные числа такие, что $\sum\limits_{k=1}^{r} p_k < n$. Функции $f \in L$ поставим в соответствие последовательность тригонометрических многочленов

$$V_{n,p_1,p_2,...,p_r}(f,x) = V^{(r)}_{n,\overline{p}}(f,x) =$$
$$= \frac{1}{p_1} \sum_{k_1=n-p_1}^{n-1} \frac{1}{p_2} \sum_{k_2=k_1-p_2+1}^{k_1} ... \frac{1}{p_r} \sum_{k_r=k_{r-1}-p_r+1}^{k_{r-1}} S_{k_r}(f,x), \qquad (1)$$

которые будем называть r-повторними суммами Валле Пуссена (в случае $r=2$ см. [3]).

Задача приближения классов интегралов Пуассона имеет свою историю, связанную с известными именами. В 1946 году С.М. Никольский [4] показал, что для верхних граней уклонений частных сум Фурье, взятых по классам $C^q_{\beta,\infty}$,

$$\mathcal{E}\left(C^q_{\beta,\infty}; S_n\right) \overset{\text{df}}{=} \sup_{f \in C^q_{\beta,\infty}} ||f(\cdot) - S_n(f;\cdot)||_C,$$

имеет место асимптотическое равенство

$$\mathcal{E}\left(C^q_{\beta,\infty}; S_n\right) = \frac{8q^n}{\pi^2} \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{du}{\sqrt{1-q^2\sin^2 u}} + O(1)\frac{q^n}{n}, \ \ q = e^{-\alpha},$$

где

$$K(q) = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{du}{\sqrt{1-q^2\sin^2 u}}$$

— полный эллиптический интеграл первого рода.

В 1980 году С.Б. Стечкин [5] уточнил остаточный член в этой формуле, показав, что он равен $O(1)q^n(1-q)^{-2}n^{-1}$.

Аналогичная задача для классов $C^q_\beta H_\omega$ была решена в 2000 году А.И. Степанцом. В работе [1] было показано, что при $n \to \infty$ выполняется равенство

$$\mathcal{E}\left(C^q_\beta H_\omega; S_n\right) = \frac{4q^n}{\pi^2} K(q)\theta_n(\omega) \int\limits_0^{\pi/2} \omega\left(\frac{2t}{n}\right) \sin t\; dt + \frac{O(1)q^n}{(1-q)^2 n}\omega(1/n), \tag{2}$$

где $\theta_n(\omega) \in [1/2; 1]$, причем $\theta_n(\omega) = 1$, если $\omega(t)$ — выпуклый модуль непрерывности.

В работе [6] (см. также [7, с. 218], [8]) для верхних граней отклонений сум Валле Пуссена на классах $C^q_{\beta,\infty}$ получены асимптотические формулы

$$\mathcal{E}\left(C^q_\beta H_\omega; V_{n,p}\right) = \frac{2\theta_n(\omega)q^{n-p+1}}{\pi p(1-q^2)} \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \omega\left(\frac{2t}{n-p}\right) \sin t dt +$$

$$+O(1)\omega\left(\frac{1}{n-p}\right)\left(\frac{q^{n-p+1}}{p(n-p)(1-q)^3} + \frac{q^n}{p(1-q^2)}\right), 1 < p < n, \tag{3}$$

$$\mathcal{E}\left(C^q_{\beta,\infty}; V_{n,p}\right) = \frac{4q^{n-p+1}}{\pi p(1-q^2)} + O(1)\left(\frac{q^{n-p+1}}{p(n-p)(1-q)^3} + \frac{q^n}{p(1-q^2)}\right). \tag{4}$$

А.С. Сердюком [9] также было показано, что имеет место более общий результат, чем формула (4):

$$\mathcal{E}\left(C^q_{\beta,\infty}; V_{n,p}\right) = \frac{q^{n-p+1}}{p}\left(\frac{4}{\pi^2}K_{p,q} + O(1)\left(\frac{q}{(n-p+1)(1-q)^s}\right)\right),$$

где

$$K_{p,q} = \int\limits_0^\pi \frac{\sqrt{1-2q^p\cos pt + q^{2p}}}{1-2q\cos pt + q^2}dt, \qquad s = s(p) = \begin{cases} 1, & p = 1; \\ 3, & p = 2, 3, \dots. \end{cases}$$

В данной работе получены интегральные представления величин

$$\delta_{n,p_1,p_2,\dots,p_r}(f;x) = \delta^{(r)}_{n,\overline{p}}(f;x) = |f(x) - V^{(r)}_{n,\overline{p}}(f;x)|.$$

Нами доказано следующее утверждение.

Теорема. *Пусть $q \in (0;1)$, $\beta \in R$, $\sum\limits_{k=1}^{r} p_k < n$. Тогда для всякой функции $f \in C^q_\beta$ в каждой точке $x \in [-\pi;\pi]$ справедливо равенство*

$$\delta^{(r)}_{n,\overline{p}}(f;x) = \frac{1}{\pi \prod\limits_{i=1}^{r} p_i} \int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{f^q_\beta(x+t)}{(1-2q\cos t + q^2)^{r+1}} \sum_{\alpha \subset \overline{r}} (-1)^{(r-|\alpha|)} \times$$

$$\times \sum_{\nu=0}^{r+1} (-1)^\nu C^\nu_{r+1} q^{n-1-\sum\limits_{j\in\alpha} p_j + r + \nu} \cos[(n-1-\sum_{j\in\alpha} p_j + r - \nu)t + \frac{\beta\pi}{2}], \tag{5}$$

где $|\alpha|$ – количество элементов множества α, а $\overline{r} = \{1,2,\dots,r\}$.

Доказательство. Положим для удобства $k_0 = n-1$. В силу соотношения (1) имеем

$$\delta_{k_0,p_1,p_2,\dots,p_r}(f;x) =$$

$$= \frac{1}{p_1} \sum_{k_1=k_0-p_1+1}^{k_0} \frac{1}{p_2} \sum_{k_2=k_1-p_2+1}^{k_1} \dots \frac{1}{p_r} \sum_{k_r=k_{r-1}-p_r+1}^{k_{r-1}} (f(x) - S_{k_r}(f,x)) =$$

$$= \frac{1}{p_1} \sum_{k_1=k_0-p_1+1}^{k_0} \frac{1}{p_2} \sum_{k_2=k_1-p_2+1}^{k_1} \dots \frac{1}{p_{r-1}} \sum_{k_{r-1}=k_{r-2}-p_r}^{k_{r-2}} \delta_{k_{r-1}+1,p_r}(f,x) = \dots$$

$$\dots = \frac{1}{p_1} \sum_{k_1=k_0-p_1+1}^{k_0} \delta_{k_1+1,p_2,p_3,\dots,p_r}(f,x). \tag{6}$$

В работе [3] показано, что при $r=2$ справедлива формула

$$\delta_{n,p_1,p_2}(f,x) = \delta^{(r)}_{n,\overline{p}}(f,x) =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f_\beta^q(x+t)\left[\Sigma_1^{(r)}\cos(\beta\pi/2) - \Sigma_2^{(r)}\sin(\beta\pi/2)\right]dt, \qquad (7)$$

где

$$\Sigma_1^{(r)} = \Sigma_1^{(r)}(t,q,n) = \frac{\Gamma^{r+1}(t,q)}{\prod\limits_{i=1}^{r} p_i}\sum_{\overline{\alpha}\subset\overline{r}}(-1)^{(r-|\alpha|)}\times$$

$$\times\sum_{\nu=0}^{r+1}(-1)^\nu C_{r+1}^\nu q^{n-1-\sum\limits_{j\in\alpha}p_j+r+\nu}\cos(n-1-\sum_{j\in\alpha}p_j+r-\nu)t, \qquad (8)$$

$$\Sigma_2^{(r)} = \Sigma_2^{(r)}(t,q,n) = \frac{\Gamma^{r+1}(t,q)}{\prod\limits_{i=1}^{r} p_i}\sum_{\overline{\alpha}\subset\overline{r}}(-1)^{(r-|\alpha|)}\times$$

$$\times\sum_{\nu=0}^{r+1}(-1)^\nu C_{r+1}^\nu q^{n-1-\sum\limits_{j\in\alpha}p_j+r+\nu}\sin(n-1-\sum_{j\in\alpha}p_j+r-\nu)t, \qquad (9)$$

$\overline{r} = \{1,2,...,r\}$, $\Gamma(t,q) = (1-2q\cos t+q^2)^{-1}$, $|\alpha|$– количество элементов множества α.

Воспользуемся методом математической индукции, чтобы показать, что эти соотношения справедливы для любого $r \in \mathbb{N}$. Предположим, что для $p_0, p_1, p_2, ..., p_r$ выполнены условия: $p_i \in \mathbb{N}, i = 0,1,2,...,r$, $\sum\limits_{i=0}^{r} p_i < n$ и имеет место соотношение (8). Имея в виду соотношение (6), отправляясь от предположения справедливости соотношения (8) для числа r, найдем выражение для $\Sigma_1^{(r+1)}$. Имеем

$$\Sigma_1^{(r+1)}(t,q,k_0) =$$

$$= \frac{1}{p_0}\sum_{k_1=k_0-p_0+1}^{k_0}\Sigma_1^{(r)}(t,q,k+1) = \frac{\Gamma^{r+1}(t,q)}{p_0\prod\limits_{i=1}^{r}p_i}\sum_{k=k_0-p_0+1}^{k_0}\sum_{\overline{\alpha}\subset\overline{r}}(-1)^{(r-|\overline{\alpha}|)}\times$$

$$\times\sum_{\nu=0}^{r+1}(-1)^\nu C_{r+1}^\nu q^{k-\sum\limits_{j\in\overline{\alpha}}p_j+r+\nu}\cos(k-\sum_{j\in\overline{\alpha}}p_j+r-\nu)t =$$

$$= \frac{\Gamma^{r+1}(t,q)}{2\prod\limits_{i=0}^{r} p_i} \sum_{\overline{\alpha}\subset\overline{r}} (-1)^{(r-|\overline{\alpha}|)} \sum_{\nu=0}^{r+1} (-1)^{\nu} C_{r+1}^{\nu} \sum_{k=k_0-p_0+1}^{k_0} q^{k-\sum\limits_{j\in\overline{\alpha}} p_j+r+\nu} \times$$

$$\times \left(e^{i(k-\sum\limits_{j\in\overline{\alpha}} p_j+r-\nu)t} + e^{-i(k-\sum\limits_{j\in\overline{\alpha}} p_j+r-\nu)t} \right).$$

Применяя формулу суммы элементов бесконечной убывающей геометрической прогрессии, получаем

$$\sum_{k=k_0-p_0+1}^{k_0} \left(qe^{it}\right)^{k-\sum\limits_{j\in\overline{\alpha}} p_j+r-\nu} =$$

$$= \left(qe^{it}\right)^{k_0+1-p_0-\sum\limits_{j\in\overline{\alpha}} p_j+r-\nu} \frac{1}{1-qe^{it}} - \left(qe^{it}\right)^{k_0+1-\sum\limits_{j\in\overline{\alpha}} p_j+r-\nu} \frac{1}{1-qe^{it}},$$

$$\sum_{k=k_0+1-p_0}^{k_0} \left(qe^{-it}\right)^{k-\sum\limits_{j\in\overline{\alpha}} p_j+r-\nu} =$$

$$= \left(qe^{-it}\right)^{k_0+1-p_0-\sum\limits_{j\in\overline{\alpha}} p_j+r-\nu} \frac{1}{1-qe^{-it}} - \left(qe^{-it}\right)^{k_0+1-\sum\limits_{j\in\overline{\alpha}} p_j+r-\nu} \frac{1}{1-qe^{-it}}.$$

Поэтому, выполняя элементарные преобразования, получаем

$$\sum_{k=k_0-p_0+1}^{k_0} \left(qe^{it}\right)^{k-\sum\limits_{j\in\overline{\alpha}} p_j+r-\nu} + \left(qe^{-it}\right)^{k-\sum\limits_{j\in\overline{\alpha}} p_j+r-\nu} =$$

$$= \left\{ q^{k_0+1-p_0-\sum\limits_{j\in\overline{\alpha}} p_j+r-\nu} \cos{(k_0+1-p_0-\sum_{j\in\overline{\alpha}} p_j+r-\nu)t} - \right.$$

$$-q^{k_0+1-p_0+1-\sum\limits_{j\in\overline{\alpha}} p_j+r-\nu} \cos{(k_0+1-p_0-1-\sum_{j\in\overline{\alpha}} p_j+r-\nu)t} -$$

$$-q^{k_0+1-\sum\limits_{j\in\overline{\alpha}} p_j+r-\nu} \cos{(k_0+1-\sum_{j\in\overline{\alpha}} p_j+r-\nu)t} +$$

$$\left. +q^{k_0+1-\sum\limits_{j\in\overline{\alpha}} p_j+r-\nu+1} \cos{(k_0+1-\sum_{j\in\overline{\alpha}} p_j+r-\nu-1)} \right\} \frac{1}{1-2q\cos t+q^2}.$$

Таким образом,

$$\Sigma_1^{(r+1)} = \frac{\Gamma^{r+1}(t,q)}{\prod\limits_{i=0}^{r} p_i} \sum_{\overline{\alpha}\subset\overline{r}} (-1)^{r-|\overline{\alpha}|} \sum_{\nu=0}^{r+1} (-1)^{\nu} C_{r+1}^{\nu} \times$$

$$\times \Bigg\{ q^{k_0+1-p_0-\sum\limits_{j\in\overline{\alpha}} p_j + r+\nu} \cos\,(k_0+1-p_0-\sum_{j\in\overline{\alpha}} p_j + r-\nu)t -$$

$$-q^{k_0+2-p_0-\sum\limits_{j\in\overline{\alpha}} p_j + r+\nu} \cos\,(k_0-p_0-\sum_{j\in\overline{\alpha}} p_j + r-\nu)t -$$

$$-q^{k_0+1-\sum\limits_{j\in\overline{\alpha}} p_j + r+\nu} \cos\,(k_0+1-\sum_{j\in\overline{\alpha}} p_j + r-\nu)t +$$

$$+q^{k_0+2-\sum\limits_{j\in\overline{\alpha}} p_j + r+\nu} \cos\,(k_0-\sum_{j\in\overline{\alpha}} p_j + r-\nu)t \Bigg\} \frac{1}{1-2q\cos t+q^2} =$$

$$= \frac{\Gamma^{r+1}(t,q)}{\prod\limits_{i=0}^{r} p_i} \sum_{\overline{\alpha}\subset\overline{r}} (-1)^{(r-|\overline{\alpha}|)} \times$$

$$\times \Bigg\{ C_{r+1}^{0} [q^{k_0+1-p_0-\sum\limits_{j\in\overline{\alpha}} p_j + r} \cos\,(k_0+1-p_0-\sum_{j\in\overline{\alpha}} p_j + r)t] +$$

$$+\sum_{\nu=1}^{r+1} (-1)^{\nu} C_{r+1}^{\nu} [q^{k_0+1-p_0-\sum\limits_{j\in\overline{\alpha}} p_j + r+\nu} \cos\,(k_0+1-p_0-\sum_{j\in\overline{\alpha}} p_j + r-\nu)t] +$$

$$+\sum_{\nu=1}^{r+1} (-1)^{\nu} C_{r+1}^{\nu-1} [q^{k_0+1-p_0-\sum\limits_{j\in\overline{\alpha}} p_j + r+\nu} \cos\,(k_0+1-p_0-\sum_{j\in\overline{\alpha}} p_j + r-\nu)t] +$$

$$+(-1)^{r+2} C_{r+1}^{r+1} [q^{k_0+1-p_0-\sum\limits_{j\in\overline{\alpha}} p_j + r+r+2} \cos\,(k_0+1-p_0-\sum_{j\in\overline{\alpha}} p_j + r-r-2)t] -$$

$$-C_{r+1}^{0} [q^{k_0+1-\sum\limits_{j\in\overline{\alpha}} p_j + r} \cos\,(k_0+1-\sum_{j\in\overline{\alpha}} p_j + r)t] -$$

$$-\sum_{\nu=1}^{r+1}(-1)^{\nu}C_{r+1}^{\nu}[q^{k_0+1-\sum\limits_{j\in\overline{\alpha}}p_j+r+\nu}\cos{(k_0+1-\sum_{j\in\overline{\alpha}}p_j+r-\nu)t}]-$$

$$-\sum_{\nu=1}^{r+1}(-1)^{\nu}C_{r+1}^{\nu-1}[q^{k_0+1-\sum\limits_{j\in\overline{\alpha}}p_j+r+\nu}\cos{(k_0+1-\sum_{j\in\overline{\alpha}}p_j+r-\nu)t}]-$$

$$\left.-(-1)^{r+2}C_{r+1}^{r+1}[q^{k_0+1-\sum\limits_{j\in\overline{\alpha}}p_j+r+r+2}\cos{(k_0+1-\sum_{j\in\overline{\alpha}}p_j+r-r-2)t}]\right\}\times$$

$$\times\frac{1}{1-2q\cos t+q^2}=\frac{\Gamma^{r+2}(t,q)}{\prod\limits_{i=0}^{r}p_i}\sum_{\overline{\alpha}\subset\overline{r}}(-1)^{(r-|\overline{\alpha}|)}\times$$

$$\times\left\{C_{r+1}^{0}[q^{k_0+1-p_0-\sum\limits_{j\in\overline{\alpha}}p_j+r}\cos{(k_0+1-p_0-\sum_{j\in\overline{\alpha}}p_j+r)t}]+\right.$$

$$+\sum_{\nu=1}^{r+1}(-1)^{\nu}(C_{r+1}^{\nu}+C_{r+1}^{\nu-1})[q^{k_0+1-p_0-\sum\limits_{j\in\overline{\alpha}}p_j+r+\nu}\cos{(k_0+1-p_0-\sum_{j\in\overline{\alpha}}p_j+r-\nu)t}]+$$

$$+(-1)^{r+2}C_{r+1}^{r+1}[q^{k_0+1-p_0-\sum\limits_{j\in\overline{\alpha}}p_j+r+r+2}\cos{(k_0+1-p_0-\sum_{j\in\overline{\alpha}}p_j+r-r-2)t}]-$$

$$-C_{r+1}^{0}[q^{k_0+1-\sum\limits_{j\in\overline{\alpha}}p_j+r}\cos{(k_0+1-\sum_{j\in\overline{\alpha}}p_j+r)t}]-$$

$$-\sum_{\nu=1}^{r+1}(-1)^{\nu}(C_{r+1}^{\nu}+C_{r+1}^{\nu-1})[q^{k_0+1-\sum\limits_{j\in\overline{\alpha}}p_j+r+\nu}\cos{(k_0+1-\sum_{j\in\overline{\alpha}}p_j+r-\nu)t}]-$$

$$\left.-(-1)^{r+2}C_{r+1}^{r+1}[q^{k_0+1-\sum\limits_{j\in\overline{\alpha}}p_j+r+r+2}\cos{(k_0+1-\sum_{j\in\overline{\alpha}}p_j+r-r-2)t}]\right\}.$$

Учитывая, что $k_0+1=n$ и

$$C_{r+1}^{\nu}+C_{r+1}^{\nu-1}=\frac{(r+1)!}{(r+1-\nu)!\nu!}+\frac{(r+1)!}{(r+1-(\nu-1))!(\nu-1)!}=$$

$$= \frac{(r+1)!(r+1-(\nu-1)) + (r+1)!\nu}{(r+1-(\nu-1))!\nu!} =$$

$$= \frac{(r+1)!(r+1-(\nu-1)+\nu)}{(r+1-(\nu-1))!\nu!} = \frac{(r+1)!(r+2)}{(r+2-\nu))!\nu!} = C_{r+2}^{\nu},$$

$$C_{r+1}^{0} = 1 = C_{r+2}^{0}, C_{r+1}^{r+1} = 1 = C_{r+2}^{r+2},$$

получаем

$$\Sigma_1^{(r+1)} =$$

$$= \frac{\Gamma^{r+2}(t,q)}{\prod\limits_{i=0}^{r} p_i} \sum_{\overline{\alpha}\subset\overline{r}} (-1)^{(r-|\overline{\alpha}|)} \Bigg\{ C_{r+2}^{0} [q^{n-p_0-\sum\limits_{j\in\overline{\alpha}} p_j + r} \cos{(n-p_0-\sum_{j\in\overline{\alpha}} p_j + r)t}] +$$

$$+ \sum_{\nu=1}^{r+1} (-1)^{\nu} C_{r+2}^{\nu} [q^{n-p_0-\sum\limits_{j\in\overline{\alpha}} p_j + r + \nu} \cos{(n-p_0-\sum_{j\in\overline{\alpha}} p_j + r - \nu)t}] +$$

$$+ (-1)^{r+2} C_{r+2}^{r+2} [q^{n-p_0-\sum\limits_{j\in\overline{\alpha}} p_j + r + r + 2} \cos{(n-p_0-\sum_{j\in\overline{\alpha}} p_j + r - r - 2)t}] -$$

$$- C_{r+2}^{0} [q^{n-\sum\limits_{j\in\overline{\alpha}} p_j + r} \cos{(n-\sum_{j\in\overline{\alpha}} p_j + r)t}] -$$

$$- \sum_{\nu=1}^{r+1} (-1)^{\nu} C_{r+2}^{\nu} [q^{n-\sum\limits_{j\in\overline{\alpha}} p_j + r + \nu} \cos{(n-\sum_{j\in\overline{\alpha}} p_j + r - \nu)t}] -$$

$$- (-1)^{r+2} C_{r+2}^{r+2} [q^{n-\sum\limits_{j\in\overline{\alpha}} p_j + r + r + 2} \cos{(n-\sum_{j\in\overline{\alpha}} p_j + r - r - 2)t}] \Bigg\} =$$

$$= \frac{\Gamma^{r+2}(t,q)}{\prod\limits_{i=0}^{r} p_i} \sum_{\overline{\alpha}\subset\overline{r}} (-1)^{(r-|\overline{\alpha}|)} \times$$

$$\times \Bigg\{ \sum_{\nu=0}^{r+2} (-1)^{\nu} C_{r+2}^{\nu} [q^{n-p_0-\sum\limits_{j\in\overline{\alpha}} p_j + r + \nu} \cos{(n-p_0-\sum_{j\in\overline{\alpha}} p_j + r - \nu)t}] -$$

$$-\sum_{\nu=0}^{r+2}(-1)^{\nu}C_{r+2}^{\nu}[q^{n-\sum\limits_{j\in\overline{\alpha}}p_j+r+\nu}\cos\,(n-\sum_{j\in\overline{\alpha}}p_j+r-\nu)t]\Bigg\}=$$

$$=\frac{\Gamma^{(r+1)+1}(t,q)}{\prod\limits_{i=0}^{r}p_i}\sum_{\overline{\alpha}\subset\overline{r+1}}(-1)^{(r+1-|\overline{\alpha}|)}\sum_{\nu=0}^{(r+1)+1}(-1)^{\nu}C_{(r+1)+1}^{\nu}[q^{n-1-\sum\limits_{j\in\overline{\alpha}}p_j+(r+1)+\nu}\times$$

$$\times\cos\,(n-1-\sum_{j\in\overline{\alpha}}p_j+(r+1)-\nu)t].$$

Таким образом, для всякого натурального r справедлива формула (8). Справедливость (9) для всякого $r\in\mathbb{N}$ доказывается аналогично. Следовательно, для всякого $r\in\mathbb{N}$ справедливо и соотношение (7) .

Объединяя соотношения (7)–(9), приходим к формуле (5).

ТЕОРЕМА. Пусть $\alpha>0, q=e^{-\alpha}, \beta\in R,\ \sum\limits_{k=1}^{r}p_k\overset{\mathrm{df}}{=}\Sigma_p<n.$ Тогда при $n-\Sigma_p\to\infty$ справедливо равенство

$$\mathcal{E}\left(C_{\beta,\infty}^{\alpha};V_{n,p}^{(r)}\right)=\frac{4q^{n-\Sigma_p+r-1}}{\pi\prod\limits_{i=1}^{r}p_i}\int\limits_0^{\pi}\Gamma^{\frac{r+1}{2}}(x)dx+$$

$$+O(1)\left(\frac{q^{n-\Sigma_p+r}}{(n-\Sigma_p+r-1)(1-q)^{r+2}\prod\limits_{i=1}^{r}p_i}+\frac{\sum\limits_{\alpha\subset\overline{r-1}}q^{n-1-\sum\limits_{j\in\alpha}p_j+r}}{(1-q)^{r+1}\prod\limits_{i=1}^{r}p_i}\right),\tag{10}$$

где $\Gamma(x)=1-2q\cos x+q^2$.

Доказательство.

$$\delta_{n,\overline{p}}^{(r)}(f;x)=\frac{1}{\pi\prod\limits_{i=1}^{r}p_i}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\frac{f_{\beta}^{q}(x+t)}{(1-2q\cos t+q^2)^{r+1}}\times$$

$$\times\sum_{\alpha\subset\overline{r}}(-1)^{(r-|\alpha|)}\sum_{\nu=0}^{r+1}(-1)^{\nu}C_{r+1}^{\nu}q^{n-1-\sum\limits_{j\in\alpha}p_j+r+\nu}\times$$

$$\times\left(\cos[(n-1-\sum_{j\in\alpha}p_j+r)t+\frac{\beta\pi}{2}]\cos\nu t+\right.$$

$$\left.+\sin[(n-1-\sum_{j\in\alpha}p_j+r)t+\frac{\beta\pi}{2}]\sin\nu t\right)=$$

$$=\frac{1}{\pi\prod\limits_{i=1}^{r}p_i}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\frac{f_\beta^q(x+t)}{(1-2q\cos t+q^2)^{r+1}}\sum_{\alpha\subset\overline{r}}(-1)^{(r-|\alpha|)}q^{n-1-\sum\limits_{j\in\alpha}p_j+r}\times$$

$$\times\left\{\cos[(n-1-\sum_{j\in\alpha}p_j+r)t+\frac{\beta\pi}{2}]\sum_{\nu=0}^{r+1}(-1)^\nu C_{r+1}^\nu q^\nu\cos\nu t+\right.$$

$$\left.+\sin[(n-1-\sum_{j\in\alpha}p_j+r)t+\frac{\beta\pi}{2}]\sum_{\nu=1}^{r+1}(-1)^\nu C_{r+1}^\nu q^\nu\sin\nu t\right\}. \qquad (11)$$

Введем обозначения

$$b_m^{q,\beta}(t)=\frac{\sum\limits_{\nu=0}^{r+1}(-1)^\nu C_{r+1}^\nu q^\nu\cos\nu t}{(1-2q\cos t+q^2)^{r+1}}\cos(mt+\frac{\beta\pi}{2})+$$

$$+\frac{\sum\limits_{\nu=1}^{r+1}(-1)^\nu C_{r+1}^\nu q^\nu\sin\nu t}{(1-2q\cos t+q^2)^{r+1}}\sin(mt+\frac{\beta\pi}{2}).$$

Тогда на основании (11) получаем

$$\delta_{n,p}^{(r)}(f,x)=\frac{q^{n-\Sigma_p+r-1}}{\pi\prod\limits_{i=1}^{r}p_i}\int\limits_{-\pi}^{\pi}f_\beta^q(x+t)b_{n-\Sigma_p+r-1}^{q,\beta}(t)dt+$$

$$+O(1)\frac{1}{\pi\prod\limits_{i=1}^{r}p_i}\left(\sum_{\alpha\subset\overline{r-1}}q^{n-1-\sum\limits_{j\in\alpha}p_j+r}\int\limits_{-\pi}^{\pi}|f_\beta^q(x+t)b_{n-1-\sum\limits_{j\in\alpha}p_j+r}^{q,\beta}(t)|dt\right). \qquad (12)$$

Изучим функцию $b_m^{q,\beta}(t)$. Воспользуемся известной формулой

$$A\cos x + B\sin x = \sqrt{A^2+B^2}\cos(x-\theta),$$

где

$$\sin\theta = \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}; \quad \cos\theta = \frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}.$$

Выполняя элементарные преобразования, получаем

$$\left(\sum_{\nu=0}^{r+1}(-1)^\nu C_{r+1}^\nu q^\nu \cos\nu t\right)^2 + \left(\sum_{\nu=1}^{r+1}(-1)^\nu C_{r+1}^\nu q^\nu \sin\nu t\right)^2 =$$

$$= (1-2q\cos t + q^2)^{r+1};$$

$$\operatorname{arctg}\left(\frac{-\sum\limits_{\nu=1}^{r+1}(-1)^\nu C_{r+1}^\nu q^\nu \sin\nu t}{\sum\limits_{\nu=0}^{r+1}(-1)^\nu C_{r+1}^\nu q^\nu \cos\nu t}\right) = (r+1)\operatorname{arctg}\frac{q\sin t}{1-q\cos t}.$$

Поэтому

$$b_m^{q,\beta}(t) = \frac{\sqrt{(1-2q\cos t+q^2)^{r+1}}}{(1-2q\cos t+q^2)^{r+1}}\cos(mt+\frac{\beta\pi}{2}+(r+1)\xi(t)) =$$

$$= \Gamma^{\frac{r+1}{2}}(t)\cos(mt+\frac{\beta\pi}{2}+(r+1)\xi(t)),$$

где

$$\Gamma(t) = 1-2q\cos t+q^2, \quad \xi(t) = \operatorname{arctg}\frac{q\sin t}{1-q\cos t}.$$

Найдем нули функции $\cos(mt+\frac{\beta\pi}{2}+\Phi(t))$. Для этого изучим свойства функции $\xi(t)$. Поскольку $1-2q\cos t+q^2>0$, то функция $b_m^{q,\beta}(t)$ обращается в нуль на промежутке $(0;\pi)$ с изменением знака в точках t_k, удовлетворяющих условию

$$mt_k + \frac{\beta\pi}{2} + (r+1)\xi(t_k) = k\pi, \;\; k=1,2,...m-1.$$

Так как $\xi'(t) = (-q^2 + q\cos t)\Gamma(t)$, то на промежутке $[-\pi;\pi]$ функция $\xi(t)$ имеет максимум в точке $t = \arccos q$ и минимум в точке $t = -\arccos q$. Поэтому для всякого $t \in [-\pi;\pi]$ выполняется $|\xi(t)| \le \mathrm{arctg}\frac{1}{\sqrt{1-q^2}}$ и для всякого $k = 1, 2, ..., m-1$ выполняется $|\xi(t_{k+1}) - \xi(t_k)| \le 2\mathrm{arctg}\frac{1}{\sqrt{1-q^2}} < \pi$.

Следовательно,

$$t_{k+1} - t_k = \frac{\pi}{m} - (r+1)\frac{\xi(t_{k+1}) - \xi(t_k)}{m} \le \frac{(r+2)\pi}{m}. \tag{13}$$

С другой стороны, для всякого $k = 1, 2, ..., m-1$ существует $c_k \in (t_k; t_{k+1})$ такая, что $\xi(t_{k+1}) - \xi(t_k) = \xi'(c_k)(t_{k+1} - t_k)$. Так как $\xi''(t) = (q^3 - q)\Gamma^2(t)\sin t$, то для всякого $t \in [-\pi;\pi]$ выполняется $|\xi'(t)| \le \xi'(0) = \frac{q}{1-q}$ и для всякого $k = 1, 2, ..., m-1$

$$\xi(t_{k+1}) - \xi(t_k) \le \frac{q}{1-q}(t_{k+1} - t_k). \tag{14}$$

Поэтому разность длин соседних промежутков $[t_k; t_{k+1}]; [t_{k+1}; t_{k+2}]$ не превосходит

$$|(t_{k+2} - t_{k+1}) - (t_{k+1} - t_k)| \le (r+1)\frac{|\xi(t_{k+2}) - \xi(t_{k+1})| + |\xi(t_{k+1}) - \xi(t_k)|}{m} \le$$

$$\le \frac{2(r+1)(r+2)\pi q}{m^2(1-q)}.$$

Функция $b_m^{q,\beta}(t)$ на промежутках $[t_k; t_{k+1}]$; $[t_{k+1}; t_{k+2}]$ сохраняет знаки, причем, справа и слева от t_{k+1} эти знаки различные.

Таким образом, функцию $\mathrm{sign} b_m^{q,\beta}(t)$ в промежутке $[t_k; t_{k+2}]$ можно изменить на множестве, мера которого $\le \frac{2(r+1)(r+2)\pi q}{(1-q)m^2}$, так, что полученная функция $b_{m,1}^{q,\beta}(t)$ будет обладать свойством:

$$\int\limits_{t_k}^{t_{k+2}} b_{m,1}^{q,\beta}(t)dt = 0.$$

В силу соотношений (13) и (14), для достаточно больших m справедливо неравенство

$$t_{k+1}-t_k \geq \frac{\pi}{m}-\frac{r+1}{m}|\xi(t_{k+1})-\xi(t_k)| \geq \frac{\pi}{m}-\frac{2(r+1)(r+2)\pi q}{m^2(1-q)} \geq \frac{\pi}{2m}.$$

Поэтому количество промежутков, на которых функция $b^{q,\beta}_{m,1}(t)$, $t\in(-\pi;\pi)$, изменяет знак $\leq 4m$.

Следовательно, существует функция $b^{q,\beta}_{m,1}(t)$, построенная на $(-\pi;\pi)$, которая обладает свойством

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} b^{q,\beta}_{m,1}(t)dt = 0$$

и отличается от $\operatorname{sign} b^{q,\beta}_{m}(t)$ на множестве, мера которого не превосходит $\frac{8(r+1)(r+2)\pi q}{m(1-q)}$.

Таким образом,

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} \left|b^{q,\beta}_{m}(t)\right| dt = \int\limits_{-\pi}^{\pi} b^{q,\beta}_{m}(t) \operatorname{sign}\left(b^{q,\beta}_{m}(t)\right) dt =$$

$$= \int\limits_{-\pi}^{\pi} b^{q,\beta}_{m}(t)[b^{q,\beta}_{m,1}(t) + O(1)\frac{q}{m(1-q)}]dt$$

и, учитывая, что

$$|b^{q,\beta}_{m}(t)| = \frac{|\cos(mt+\frac{\beta\pi}{2}+(r+1)\xi(t))|}{(1-2q\cos t+q^2)^{\frac{r+1}{2}}} \leq \frac{1}{(1-q)^{r+1}},$$

находим

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} \left|b^{q,\beta}_{m}(t)\right| dt = \int\limits_{-\pi}^{\pi} b^{q,\beta}_{m}(t) b^{q,\beta}_{m,1}(t) + O(1)\frac{q}{m(1-q)^{r+2}} dt.$$

Учитывая, что $\forall \varphi \in S_M^0$

$$\left|\int\limits_{-\pi}^{\pi} \varphi(x+t) b_m^{q,\beta}(t)dt\right| \leq \int\limits_{-\pi}^{\pi} \left|b_m^{q,\beta}(t)\right|dt,$$

получаем

$$\sup_{f\in C^{\alpha}_{\beta,\infty}} \frac{1}{\pi\prod\limits_{i=1}^{r} p_i}\left(\sum_{\alpha\subset\overline{r-1}} q^{n-1-\sum\limits_{j\in\alpha} p_j+r}\int\limits_{-\pi}^{\pi}|f_\beta^q(x+t) b^{q,\beta}_{n-1-\sum\limits_{j\in\alpha} p_j+r}(t)|dt\right)=$$

$$= O(1)\frac{1}{\pi\prod\limits_{i=1}^{r} p_i}\left(\sum_{\alpha\subset\overline{r-1}} q^{n-1-\sum\limits_{j\in\alpha} p_j+r}\int\limits_{-\pi}^{\pi}|b^{q,\beta}_{n-1-\sum\limits_{j\in\alpha} p_j+r}(t)|dt\right).$$

А принимая во внимание, что $b^{q,\beta}_{m,1}(t) \in S^0_M$, заключаем

$$\frac{q^{n-\Sigma_p+r-1}}{\pi\prod\limits_{i=1}^{r} p_i}\int\limits_{-\pi}^{\pi}|b^{q,\beta}_{n-\Sigma_p+r-1}(t)|dt \geq$$

$$\geq \sup_{f\in C^{\alpha}_{\beta,\infty}}\left(\frac{q^{n-\Sigma_p+r-1}}{\pi\prod\limits_{i=1}^{r} p_i}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f_\beta^q(x+t) b^{q,\beta}_{n-\Sigma_p+r-1}(t)dt\right) \geq$$

$$\geq \frac{q^{n-\Sigma_p+r-1}}{\pi\prod\limits_{i=1}^{r} p_i}\int\limits_{-\pi}^{\pi} b^{q,\beta}_{n-\Sigma_p+r-1}(t) b^{q,\beta}_{n-\Sigma_p+r-1,1}(t)dt =$$

$$= \frac{q^{n-\Sigma_p+r-1}}{\pi\prod\limits_{i=1}^{r} p_i}\left(\int\limits_{-\pi}^{\pi}|b^{q,\beta}_{n-\Sigma_p+r-1}(t)|dt + O(1)\frac{q}{(n-\Sigma_p+r-1)(1-q)^{r+2}}\right).$$

Поэтому

$$\sup_{f\in C^{\alpha}_{\beta,\infty}}\left(\frac{q^{n-\Sigma_p+r-1}}{\pi\prod\limits_{i=1}^{r}p_i}\int\limits_{-\pi}^{\pi}f^{q}_{\beta}(x+t)b^{q,\beta}_{n-\Sigma_p+r-1}(t)dt\right)=$$

$$=\frac{q^{n-\Sigma_p+r-1}}{\pi\prod\limits_{i=1}^{r}p_i}\left(\int\limits_{-\pi}^{\pi}|b^{q,\beta}_{n-\Sigma_p+r-1}(t)|dt+O(1)\frac{q}{(n-\Sigma_p+r-1)(1-q)^{r+2}}\right).$$

Таким образом, в силу соотношения (12) при $p_i\in N$, $i=1,2,...,r$, $\sum\limits_{i=1}^{r}p_i<n$, справедливо соотношение

$$\mathcal{E}\left(C^{\alpha}_{\beta,\infty};V^{(r)}_{n,p}\right)=\frac{q^{n-\Sigma_p+r-1}}{\pi\prod\limits_{i=1}^{r}p_i}\int\limits_{-\pi}^{\pi}|b^{q,\beta}_{n-\Sigma_p+r-1}(t)|dt+$$

$$+O(1)\left(\frac{q^{n-\Sigma_p+r}}{(n-\Sigma_p+r-1)(1-q)^{r+2}\prod\limits_{i=1}^{r}p_i}+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{\prod\limits_{i=1}^{r}p_i}\sum_{\alpha\subset\overline{r-1}}q^{n-1-\sum\limits_{j\in\alpha}p_j+r}\int\limits_{-\pi}^{\pi}|b^{q,\beta}_{n-1-\sum\limits_{j\in\alpha}p_j+r}(t)|dt\right). \qquad (15)$$

Вычислим интеграл $J_m=\int\limits_{-\pi}^{\pi}|b^{q,\beta}_{m}(t)|dt, m\in N$.

Имеем

$$b^{q,\beta}_{m}(t)=\frac{\sum\limits_{\nu=0}^{r+1}(-1)^{\nu}C^{\nu}_{r+1}q^{\nu}\cos\nu t}{(1-2q\cos t+q^2)^{r+1}}\cos(mt+\frac{\beta\pi}{2})+$$

$$+\frac{\sum\limits_{\nu=1}^{r+1}(-1)^\nu C_{r+1}^\nu q^\nu \sin\nu t}{(1-2q\cos t+q^2)^{r+1}}\sin(mt+\frac{\beta\pi}{2})=$$

$$=\sum_{\nu=0}^{r+1}(-1)^\nu C_{r+1}^\nu q^\nu \cos((m-\nu)t+\frac{\beta\pi}{2})\Gamma^{r+1}(t).$$

Следовательно,

$$J_m=\int\limits_{-\pi}^{\pi}\left|b_m^{q,\beta}(t)\right|dt=$$

$$=\int\limits_0^{2\pi}\left|\sum_{\nu=0}^{r+1}(-1)^\nu C_{r+1}^\nu q^\nu \cos((m-\nu)t+\frac{\beta\pi}{2})\Gamma^{r+1}(t)\right|=$$

$$=\frac{1}{m}\sum_{k=0}^{m-1}\int\limits_{2k\pi}^{(2k+1)\pi}\left|\sum_{\nu=0}^{r+1}(-1)^\nu C_{r+1}^\nu q^\nu \cos((1-\frac{\nu}{m})t+\frac{\beta\pi}{2})\Gamma^{r+1}\left(\frac{t}{m}\right)\right|dt=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\sum_{k=0}^{m-1}\frac{2\pi}{m}\left|\sum_{\nu=0}^{r+1}(-1)^\nu C_{r+1}^\nu q^\nu \cos((t-\frac{\nu(t+2k\pi)}{m})+\frac{\beta\pi}{2})\times\right.$$

$$\left.\times\Gamma^{r+1}\left(\frac{t+2k\pi}{m}\right)\right|dt. \qquad (16)$$

При фиксированных t,β,q,m положим

$$F(x)=\left|\sum_{\nu=0}^{r+1}(-1)^\nu C_{r+1}^\nu q^\nu \cos((t-\nu(\frac{t}{m}+x))+\frac{\beta\pi}{2})\Gamma^{r+1}\left(\frac{t}{m}+x\right)\right|.$$

Легко заметить, что под знаком интеграла в соотношении (16) стоит интегральная сумма, составленная для функции $F(x)$ и отвечающая разбиению $x_k=\frac{2k\pi}{m},\Delta x_k=\frac{2\pi}{m},k=0,1,...m-1$, отрезка $[0;2\pi]$.

Но

$$\left|\int\limits_0^{2\pi}F(x)dx-\sum_{k=0}^{m-1}F(x_k)\frac{2\pi}{m}\right|\leq\sum_{k=0}^{m-1}\int\limits_{x_k}^{x_{k+1}}|F(x)-F(x_k)|dx\leq 2\pi\omega\left(F;\frac{2\pi}{m}\right),$$

где $\omega(F;t)$ – модуль непрерывности функции $F(x)$. Производная $F'(x)$ существует и ограничена всюду, за исключением точек, где $F(x)=0$. Поэтому функция $F(x)$ принадлежит классу KH^1, где K – постоянная, которую можно выбрать независящей ни от t, ни от β, ни от m. Поэтому

$$\left|\int\limits_0^{2\pi} F(x)dx-\sum_{k=0}^{m-1}F(x_k)\frac{2\pi}{m}\right|<(2\pi)^2\frac{K}{m}.$$

Таким образом,

$$J_m=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\left|\sum_{\nu=0}^{r+1}(-1)^\nu C_{r+1}^\nu q^\nu\cos((t-\nu(\frac{t}{m}+x))+\frac{\beta\pi}{2})\times\right.$$

$$\left.\times\Gamma^{r+1}(\frac{t}{m}+x)\right|dxdt.$$

Переходя к новым переменным, и учитывая 2π-периодичность подинтегральной функции, имеем

$$J_m=\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\pi}\left|\sum_{\nu=0}^{r+1}(-1)^\nu C_{r+1}^\nu q^\nu\cos(t-\nu x)\Gamma^{r+1}(x)\right|dt+O\left(\frac{1}{m}\right).$$

Поскольку при фиксированном $x\in(0;2\pi)$

$$\sum_{\nu=0}^{r+1}(-1)^\nu C_{r+1}^\nu q^\nu\cos(t-\nu x)=\sum_{\nu=0}^{r+1}(-1)^\nu C_{r+1}^\nu q^\nu\cos\nu x\cos t+$$

$$+\sum_{\nu=0}^{r+1}(-1)^\nu C_{r+1}^\nu q^\nu\sin\nu x\sin t=\Gamma^{-\frac{r+1}{2}}\cos(t+(r+1)\xi(x)),$$

то функция $\sum\limits_{\nu=0}^{r+1}(-1)^\nu C_{r+1}^\nu q^\nu\cos(t-\nu x)$, как функция переменной t, при фиксированном $x\in(0;2\pi)$ обращается в нуль с переменой знака только в точках вида $t_0 + k\pi, k = 0, \pm 1, \pm 2, ...$, где $t_0 = \pi/2 + (r+1)\xi(x)$. Поэтому, принимая во внимание, что

$$\cos t_0 = -\sum_{\nu=1}^{r+1}(-1)^\nu C_{r+1}^\nu q^\nu \sin x \Gamma^{\frac{r+1}{2}}(x),$$

$$\sin t_0 = \sum_{\nu=0}^{r+1}(-1)^\nu C_{r+1}^\nu q^\nu \cos x \Gamma^{\frac{r+1}{2}}(x),$$

$\forall x \in (0; 2\pi)$ находим

$$\int_0^{2\pi}\left|\sum_{\nu=0}^{r+1}(-1)^\nu C_{r+1}^\nu q^\nu \cos(t-\nu x)\right| dt =$$

$$= \left|\int_{t_0}^{t_0+\pi}\left(\sum_{\nu=0}^{r+1}(-1)^\nu C_{r+1}^\nu q^\nu \cos(t-\nu x)\right)dt -\right.$$

$$\left.- \int_{t_0+\pi}^{t_0+2\pi}\left(\sum_{\nu=0}^{r+1}(-1)^\nu C_{r+1}^\nu q^\nu \cos(t-\nu x)\right)dt\right| =$$

$$= 4\left|\sum_{\nu=0}^{r+1}(-1)^\nu C_{r+1}^\nu q^\nu \sin(t_0-\nu x)\right| =$$

$$= 4\left|\sin t_0 \sum_{\nu=0}^{r+1}(-1)^\nu C_{r+1}^\nu q^\nu \cos \nu x - \cos t_0 \sum_{\nu=1}^{r+1}(-1)^\nu C_{r+1}^\nu q^\nu \sin \nu x\right| =$$

$$= 4\left|\left(\sum_{\nu=0}^{r+1}(-1)^\nu C_{r+1}^\nu q^\nu \cos \nu x\right)^2 + \left(\sum_{\nu=1}^{r+1}(-1)^\nu C_{r+1}^\nu q^\nu \sin \nu x\right)^2\right| \Gamma^{\frac{r+1}{2}}(x) =$$

$$= 4\Gamma^{-\frac{r+1}{2}}(x).$$

Следовательно,

$$J_m = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}[4\Gamma^{-\frac{r+1}{2}}(x)]\Gamma^r(x)dx + O\left(\frac{1}{m}\right) = \frac{4}{\pi}\int_0^{\pi}\Gamma^{\frac{r+1}{2}}(x)dx + O\left(\frac{1}{m}\right).$$

Нетрудно заметить, что

$$\int\limits_0^\pi \frac{dt}{\left(\sqrt{1-2q\cos t+q^2}\right)^{r+1}} = O(1)\frac{1}{\left(\sqrt{1-2q+q^2}\right)^{r+1}} = O(1)\frac{1}{(1-q)^{r+1}}.$$

Поэтому для $m = n-1-\sum\limits_{j\in\alpha} p_j + r, \alpha \subset \overline{r-1}$

$$J_m = O(1)\left(\frac{1}{(1-q)^{r+1}} + \frac{1}{m}\right).$$

Имея в виду соотношение (15), получаем

$$\mathcal{E}\left(C^\alpha_{\beta,\infty}; V^{(r)}_{n,p}\right) = \frac{q^{n-\Sigma_p+r-1}}{\prod\limits_{i=1}^r p_i} J_{n-\Sigma_p+r-1} +$$

$$+O(1)\left(\frac{q^{n-\Sigma_p+r}}{(n-\Sigma_p+r-1)(1-q)^{r+2}\prod\limits_{i=1}^r p_i} + \frac{1}{\prod\limits_{i=1}^r p_i}\sum_{\alpha\subset\overline{r-1}} J_{n-1-\sum\limits_{j\in\alpha} p_j+r}\right) =$$

$$= \frac{4q^{n-\Sigma_p+r-1}}{\pi\prod\limits_{i=1}^r p_i}\int\limits_0^\pi \Gamma^{\frac{r+1}{2}}(x)dx +$$

$$+O(1)\left(\frac{q^{n-\Sigma_p+r}}{(n-\Sigma_p+r-1)(1-q)^{r+2}\prod\limits_{i=1}^r p_i} + \frac{\sum\limits_{\alpha\subset\overline{r-1}} q^{n-1-\sum\limits_{j\in\alpha} p_j+r}}{(1-q)^{r+1}\prod\limits_{i=1}^r p_i}\right).$$

Теорема доказана.

1. *Степанец А.И.* Приближение аналитических непрерывных функций // Мат. сборник. — 2001. — **192,** № 1. — С. 113 – 138.
2. *Степанец А.И.* Классификация и приближение периодических функций, – Киев: Наук. думка, 1987.– 268 с.

3. *Рукасов В.И., Новиков О.А., Ровенская О.Г.* Интегральные представления уклонений средних сумм Фурье на классах $C^{\alpha}_{\beta,\infty}$// Вісник Слов'янського державного педагогічного університету. Математика. — 2008. **1(3)**. — С. 33 – 41.
4. *Никольский С.М.* Приближение функций тригонометрическими полиномами в среднем// Изв. АН СССР. Сер.мат. – 1946. – **10**, № 3.– С.207 – 256.
5. *Стечкин С.Б.* Оценка остатка ряда Фурье для дифференцируемых функций // Тр. Мат. ин-та им. В.А. Стеклова АН СССР. — 1980. — **145.** — С. 126 – 151.
6. *Рукасов В.І., Чайченко С.О.* Наближення аналітичних періодичних функцій сумами Валле-Пуссена // Укр. мат. журн. — 2002. — **54,** № 12. — С. 1653 – 1668.
7. *Степанец А.И., Рукасов В.И., Чайченко С.О.* Приближения суммами Валле Пуссена // Праці Ін-ту математики НАН України. — 2007. Т. 68. — 368 с.
8. *Рукасов В.И., Новиков О.А.* Приближение аналитических функций суммами Валле–Пуссена // Ряды Фурье: теория и приложения. — Киев: Ин-т математики НАН Украины, 1998. – С. 228 – 241.
9. *Сердюк А.С.* Наближення інтегралів Пуасона сумами Валле Пуссена // Укр. мат. журн. – 2004. – **56** №1. – С. 97–107.

Отримано 27.04.09

Славянский государственный педагогический университет
sgpi@slav.dn.ua

УДК 517.5

©2010. **Савчук В.В., Чайченко С.О.**

НАБЛИЖЕННЯ СУМАМИ ВАЛЛЕ ПУССЕНА НА КЛАСАХ АНАЛІТИЧНИХ У КРУЗІ ФУНКЦІЙ

Для точних верхніх меж відхилень сум Валле Пуссена на класах ψ-інтегралів функцій комплексної змінної знайдено асимптотичні рівності. Розглянуто випадок, коли елементи послідовностей $\psi(k)$, які визначають клас, що наближується, є повільно спадними.

For the exact upper bounds of the deviations of Vallee Poussin's sums on classes ψ-integrals functions of complex variable the asymptotic equality are found. There was considered a case, when elements of sequences $\psi(k)$, that determine a class which is approximated, slowly decreased.

Нехай $\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} : \ |z| = 1\}$ — одиничне коло комплексної площини $\mathbb{C}$ і $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : \ |z| < 1\}$ — внутрішність одиничного кола $\mathbb{T}$. Як звичайно, через $C(\mathbb{T})$ будемо позначати простір неперервних функцій φ, визначених на $\mathbb{T}$, з нормою

$$\|\varphi\|_{C(\mathbb{T})} = \max_{z\in\mathbb{T}} |\varphi(z)|,$$

через $L(\mathbb{T})$ — простір сумовних на $\mathbb{T}$ функцій, норма в якому визначається рівністю

$$\|\varphi\|_{L(\mathbb{T})} = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\mathbb{T}} |\varphi(w)| \ |dw| = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{0}^{2\pi} |\varphi(e^{it})| \ dt,$$

а через $L_\infty(\mathbb{T})$ — простір функцій φ, істотно обмежених на $\mathbb{T}$, з нормою

$$\|\varphi\|_{L_\infty(\mathbb{T})} = \operatorname*{ess\,sup}_{z\in\mathbb{T}} |\varphi(z)|.$$

Виконано за часткової підтримки Німецького фонду наукових досліджень (DFG) у рамках проекту 436 UKR 113/103/0-1).

Нехай далі $\psi = \{\psi_k\}_{k=0}^{\infty}$, $(\psi_0 = 1)$ — довільна послідовність комплексних чисел, функція $f \in L(\mathbb{T})_+$, де $L(\mathbb{T})_+$ — підмножина функцій із класу $L(\mathbb{T})$, що мають ряди Фур'є степеневого типу, і

$$S[f] = \sum_{k=0}^{\infty} \widehat{f}(k) e^{ikt} \tag{1}$$

— ряд Фур'є функції f. Якщо ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} \psi_k \widehat{f}(k) e^{ikt}$$

є рядом Фур'є деякої функції $g \in L(\mathbb{T})_+$, то її називають ψ-інтегралом функції f і позначають $\mathcal{J}^{\psi}(f)$ [1, с. 261]. Множина ψ-інтегралів усіх функцій $f \in L(\mathbb{T})_+$ позначається через $L^{\psi}(\mathbb{T})_+$; якщо $\mathfrak{N}$ — деяка підмножина $L(\mathbb{T})_+$, то символом $L^{\psi}\mathfrak{N}(\mathbb{T})_+$ позначається множина ψ-інтегралів усіх функцій із $\mathfrak{N}$. Покладають $C^{\psi}(\mathbb{T})_+ = L^{\psi}(\mathbb{T})_+ \cap C(\mathbb{T})$.

Якщо для заданої функції $F \in L^{\psi}(\mathbb{T})_+$ указано таку функцію $f \in L(\mathbb{T})_+$, що майже скрізь на $\mathbb{T}$ виконується рівність $F(e^{it}) = \mathcal{J}^{\psi} f(e^{it})$, то функцію f природно називати ψ-похідною функції F. При цьому використовують позначення $f = D^{\psi} F = F^{\psi}$.

У ролі наближуючих агрегатів для функцій з класів $C^{\psi}(\mathbb{T})_+$ будемо використовувати поліноми, що визначаються у такий спосіб. Нехай $\Lambda = \|\lambda_k^{(n)}\|$, $n = 1, 2, \ldots, n$, $k = 0, 1, \ldots, n$, — довільна нескінченна трикутна числова матриця. Кожній функції $f \in C^{\psi}(\mathbb{T})_+$ на основі її розкладу в ряд Фур'є (1) поставимо у відповідність поліном $U_n(f; e^{it}; \Lambda)$ вигляду

$$U_n(f; e^{it}; \Lambda) = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k^{(n)} \widehat{f}(k) e^{ikt}. \tag{2}$$

У монографії [1, с. 268] наведено інтегральне зображення для величин

$$\delta_n(f; e^{it}; \Lambda) = f(e^{it}) - U_n(f; e^{it}; \Lambda)$$

на класах $C^{\psi}(\mathbb{T})_+$.

Теорема 1. Нехай $\Lambda = \|\lambda_k^{(n)}\|$, $n = 1, 2, \ldots, n$, $k = 0, 1, \ldots, n$, — фіксована нескінченна трикутна числова матриця, $\{\psi_k\}_{k=0}^{\infty}$ ($\psi_0 = 1$, $|\psi_k| > 0$) — довільна послідовність комплексних чисел, $\lambda_n(\cdot)$ і $\psi(\cdot) = \psi_1(\cdot) + i\psi_2(\cdot)$ — функції, неперервні на півосі $\mathbb{R}^+$ і такі, що $\lambda_n(k) = \lambda_k^{(n)}$ і $\psi(k) = \psi_k$. Тоді, якщо косинус-перетворення Фур'є функції $\tau_n(v) = (1 - \lambda_n(v))\psi(v)$ є сумовним на дійсній осі ($\widehat{\tau}_n(\cdot)_+ \in L(\mathbb{R})$), то для довільної функції $f \in C^{\psi}(\mathbb{T})_+$ у кожній точці кола $\mathbb{T}$ виконується рівність

$$\delta_n(f; e^{it}; \Lambda) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f^{\psi}(e^{i(t+\theta)})\widehat{\tau}_n(\theta)\, d\theta, \qquad (3)$$

у якій

$$\widehat{\tau}_n(\theta) = \widehat{\tau}_n(\theta)_+ = \frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{\infty} \tau_n(v)\cos\theta v\, dv.$$

Скориставшись теоремою 1, знайдемо інтегральні зображення для величин

$$r^*_{n,p}(f; e^{it}) = f(e^{it}) - V^*_{n,p}(f; e^{it}),$$

де $V^*_{n,p}(f; e^{it})$ — тригонометричні поліноми вигляду (2) за умови, що

$$\lambda_k^{(n)} = \lambda^*_{n,p}(k) = \begin{cases} 1, & 0 \le k \le n-p, \\ (1 - \frac{k-n+p}{p})\frac{\psi(n)}{\psi(k)}, & n-p+1 \le k \le n-1, \\ 0, & n \le k. \end{cases}$$

Для цього покладемо

$$\lambda^*_{n,p}(v) = \begin{cases} 1, & 0 \le v < n-p, \\ (1 - \frac{v-n+p}{p})\frac{\psi(n)}{\psi(v)}, & n-p \le v < n, \\ 0, & n \le v. \end{cases} \qquad (4)$$

Нехай, як звичайно, (див., наприклад, [2, с. 159]) $\mathfrak{M}$ — множина неперервних на півосі $\mathbb{R}^+$ додатних функцій ψ, опуклих донизу і спадаючих до нуля на нескінченності.

Якщо $\psi \in \mathfrak{M}$, то (див. монографію [3, с. 88]) косинус-перетворення Фур'є функції $\tau^*_{n,p}(\cdot) = (1 - \lambda^*_{n,p}(\cdot))\psi(\cdot)$ є сумовним на дійсній осі $(\tau^*_{n,p}(\cdot)_+ \in L(\mathbb{R}))$. Враховуючи цей факт, одержуємо таке твердження.

Теорема 2. Нехай $n, p \in \mathbb{N}$, $p < n$ і функція $\lambda^*_{n,p}(v)$ визначається формулою (4). Тоді, якщо $\psi = \psi_1 + i\psi_2$ і ψ_1, $\psi_2 \in \mathfrak{M}$, то для довільної функції $f \in C^\psi(\mathbb{T})_+$ у кожній точці кола $\mathbb{T}$

$$r^*_{n,p}(f; e^{it}) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f^\psi(e^{i(t+\theta)})\widehat{\tau}^*_{n,p}(\theta)\, d\theta, \tag{5}$$

де

$$\widehat{\tau}^*_{n,p}(\theta) = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^\infty (1 - \lambda^*_{n,p}(v))(\psi_1(v) + i\psi_2(v))\cos\theta v\, dv. \tag{6}$$

Нехай виконуються всі умови теореми 2. Покладемо

$$\xi_{n-p}(f; e^{it}) = f(e^{it}) - T_{n-p}(e^{it}), \quad T_{n-p} \in \mathcal{T}_{n-p},$$

де $\mathcal{T}_{n-p}$ — множина тригонометричних поліномів порядку не вищого за $n - p$. Тоді співвідношення (5) з урахуванням рівності

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \widehat{\tau}^*_{n,p}(\theta) T_{n-p}(e^{i(t+\theta)})\, d\theta = 0,$$

можна записати у вигляді

$$r^*_{n,p}(f; e^{it}) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \xi_{n-p}(f; e^{it})\widehat{\tau}^*_{n,p}(\theta)\, d\theta.$$

Оскільки згідно з (4)

$$(1 - \lambda^*_{n,p}(v))\psi(v) = \begin{cases} 0, & 0 \le v < n - p, \\ \frac{v-n+p}{p}\ \psi(n), & n - p \le v < n, \\ \psi(v), & n \le v, \end{cases}$$

то формула (6) може бути записаною таким чином

$$\widehat{\tau}^*_{n,p}(\theta) = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^\infty (1-\lambda^*_{n,p}(v))\psi(v)\cos\theta v\ dv =$$

$$= \frac{\psi(n)}{\pi p}\int\limits_{n-p}^{n}(v-n+p)\cos\theta v\ dv + \frac{1}{\pi}\int\limits_n^\infty \psi(v)\cos\theta v\ dv.$$

Інтегруючи за частинами в останній рівності і виконуючи елементарні перетворення, знаходимо

$$\widehat{\tau}^*_{n,p}(\theta) = \frac{\psi(n)}{\pi p}\frac{\cos n\theta - \cos(n-p)\theta}{\theta^2} - \frac{1}{\pi\theta}\int\limits_n^\infty \psi'(v)\sin\theta v\ dv. \qquad (7)$$

Зіставляючи тепер співвідношення (7) і формулу (6) з теореми 2 отримуємо такий наслідок.

Наслідок 1. Нехай $n,p\in\mathbb{N},\ p<n$, $\Delta(f^\psi;e^{it})$ є або $f^\psi(e^{it})$, або $\xi(f^\psi;e^{it})$. Тоді, якщо $\psi=\psi_1+i\psi_2$, де $\psi_1,\ \psi_2\in\mathfrak{M}$, то для довільної функції $f\in C^\psi(\mathbb{T})_+$ у кожній точці кола $\mathbb{T}$ виконується рівність

$$r^*_{n,p}(f;e^{it}) = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\Delta(f^\psi;e^{i(t+\theta)})\left[\frac{\psi(n)}{\pi p}\frac{\cos n\theta-\cos(n-p)\theta}{\theta^2} - \right.$$

$$\left. -\frac{1}{\pi\theta}\int\limits_n^\infty \psi'(v)\sin\theta v\ dv\right] d\theta. \qquad (8)$$

У цій роботі функції ψ_1 і ψ_2, що визначають класи $C^\psi(\mathbb{T})_+$, будуть обиратися з множини $\mathfrak{M}_0$, яка означається у такий спосіб (див., наприклад, [2, с. 160]).

Кожній функції $\psi\in\mathfrak{M}$ поставимо у відповідність пару функцій

$$\eta(t)=\eta(\psi;t)=\psi^{-1}\left(\frac{1}{2}\psi(t)\right) \quad \mu(t)=\mu(\psi;t)=\frac{t}{\eta(t)-t}, \quad t\geq 1.$$

Тоді

$$\mathfrak{M}_0 = \{\psi : \psi \in \mathfrak{M}, \quad 0 < \mu(\psi; t) \le K < \infty\}, \quad K = K(\psi) = \mathrm{const}.$$

Скориставшись наслідком 1 переконаємось у справедливості такого твердження.

Теорема 3. Нехай $\psi = \psi_1 + i\psi_2,\ \psi_1, \psi_2 \in \mathfrak{M}_0$. Тоді для довільної функції $f \in C^{\psi}(\mathbb{T})_+$ і довільного поліному $T_{n-p} \in \mathcal{T}_{n-p}$ в кожній точці кола $\mathbb{T}$, при $n, p \in \mathbb{N}, p < n$

$$r^*_{n,p}(f; e^{it}) = -\psi(n) V_{n,p}(f^{\psi} - T_{n-p}; e^{it}) + O(1)\psi(n)\|f^{\psi} - T_{n-p}\|_{C(\mathbb{T})}, \quad (9)$$

де

$$V_{n,p}(\varphi; e^{it}) = \sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k^{(n,p)} \widehat{\varphi}(k) e^{ikt},$$

$$\lambda_k^{(n,p)} = \begin{cases} 1, & 0 \le k \le n-p, \\ \frac{n-k}{p}, & n-p+1 \le k \le n-1, \end{cases} \quad (10)$$

— суми Валле Пуссена, а $O(1)$ — величина, рівномірно обмежена по n, p і f.

Зауважимо, що теорема 3 дозволяє величини відхилень $r^*_{n,p}(f; e^{it})$ виразити через відповідні суми Валле Пуссена ψ-похідної функції f.

Доведення теореми 3 виконаємо для випадку, коли $\Delta(f; e^{it}) = f^{\psi}(e^{it})$. В іншому випадку воно є аналогічним.

Нехай $0 < \rho < 1$. Розглянемо тотожність

$$\int_{-\infty}^{\infty} f^{\psi}(\rho e^{i(t+\theta)}) \frac{\cos n\theta - \cos(n-p)\theta}{\theta^2}\, d\theta =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\widehat{f}(k)}{\psi(k)} \rho^k e^{ik(t+\theta)} \frac{\cos n\theta - \cos(n-p)\theta}{\theta^2}\, d\theta =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\widehat{f}(k)}{\psi(k)} \rho^k e^{ikt} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ik\theta} \frac{\cos n\theta - \cos(n-p)\theta}{\theta^2}\, d\theta.$$

Оскільки виконуються рівності

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{ik\theta}\frac{\cos n\theta-\cos(n-p)\theta}{\theta^2}\,d\theta=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\cos k\theta\frac{\cos n\theta-\cos(n-p)\theta}{\theta^2}\,d\theta+$$

$$+i\int\limits_{-\infty}^{\infty}\sin k\theta\frac{\cos n\theta-\cos(n-p)\theta}{\theta^2}\,d\theta=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\cos k\theta\frac{\cos n\theta-\cos(n-p)\theta}{\theta^2}\,d\theta$$

і

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\cos k\theta\frac{\cos n\theta-\cos(n-p)\theta}{\theta^2}\,d\theta=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{k\sin k\theta\cos(n-p)\theta}{\theta}\,d\theta+$$

$$+\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{(n-p)\sin(n-p)\theta\cos k\theta}{\theta}\,d\theta-\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{k\sin k\theta\cos k\theta}{\theta}\,d\theta-$$

$$-\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{n\sin n\theta\cos k\theta}{\theta}\,d\theta=-\begin{cases}\pi p, & 0\le k\le n-p,\\ \pi(n-k), & n-p<k<n,\\ 0, & n\le k,\end{cases}\qquad(11)$$

то враховуючи формулу (10) і співвідношення

$$\lim_{\rho\to1-0}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\widehat{f}(k)}{\psi(k)}\rho^k e^{ikt}=f^{\psi}(e^{it}),$$

яке виконується в кожній точці кола $\mathbb{T}$, отримуємо

$$\frac{1}{\pi p}\int\limits_{-\infty}^{\infty}f^{\psi}(e^{i(t+\theta)})\frac{\cos n\theta-\cos(n-p)\theta}{\theta^2}\,d\theta=$$

$$=\lim_{\rho\to1-0}\frac{1}{\pi p}\int\limits_{-\infty}^{\infty}f^{\psi}(\rho e^{i(t+\theta)})\frac{\cos n\theta-\cos(n-p)\theta}{\theta^2}\,d\theta=V_{n,p}(f^{\psi};e^{it}).$$

Зіставляючи отриманий вираз і співвідношення (8), будемо мати

$$r^*_{n,p}(f;e^{it}) = -\psi(n)V_{n,p}(f^\psi;e^{i(t+\theta)})-$$

$$-\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f^\psi(e^{i(t+\theta)})\frac{1}{\theta}\int\limits_{n}^{\infty}\psi'(v)\sin\theta v\ dv\ d\theta.$$

Але, оскільки згідно зі співвідношенням (V.4.24) із монографії [2, с. 223] для довільної функції $\psi \in \mathfrak{M}_0$

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left|\frac{1}{\pi\theta}\int\limits_{n}^{\infty}\psi'(v)\sin\theta v\ dv\right| d\theta \le K\psi(n),$$

то в кожній точці кола $\mathbb{T}$ виконується оцінка

$$|r^*_{n,p}(f;e^{it}) + \psi(n)V_{n,p}(f^\psi;e^{i(t+\theta)})| \le K\psi(n),$$

і теорему доведено.

Позначимо через

$$r_{n,p}(f;e^{it}) = f(e^{it}) - V_{n,p}(f;e^{it})$$

величину відхилень сум Валле Пуссена на класах $C^\psi(\mathbb{T})_+$. Зрозуміло, що для того, щоб отримати інтегральне зображення величини $r_{n,p}(f;e^{it})$, достатньо в теоремі 1 покласти

$$\lambda_{n,p}(v) = \begin{cases} 1, & 0 \le v < n-p, \\ (1-\frac{v-n+p}{p}), & n-p \le v < n, \\ 0, & n \le v. \end{cases} \qquad (12)$$

Дійсно, якщо $\psi \in \mathfrak{M}$, то згідно [3, с. 88] косинус-перетворення Фур'є функції $\tau_{n,p}(\cdot) = (1-\lambda_{n,p}(\cdot))\psi(\cdot)$ є сумовним на дійсній осі $(\tau_{n,p}(\cdot)_+ \in L(\mathbb{R}))$. Враховуючи це, отримуємо таке твердження.

Теорема 4. Нехай $n,p \in \mathbb{N}$, $p < n$ і функція $\lambda_{n,p}(v)$ визначається формулою (12). Тоді, якщо $\psi = \psi_1 + i\psi_2$ і $\psi_1,\ \psi_2 \in \mathfrak{M}$, то для довільної функції $f \in C^{\psi}(\mathbb{T})_{+}$ у кожній точці кола $\mathbb{T}$

$$r_{n,p}(f;e^{it}) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f^{\psi}(e^{i(t+\theta)})\widehat{\tau}_{n,p}(\theta)\, d\theta, \tag{13}$$

де

$$\widehat{\tau}_{n,p}(\theta) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{\infty}(1-\lambda_{n,p}(v))(\psi_1(v)+i\psi_2(v))\cos\theta v\, dv.$$

Для отримання асимптотичної рівності для величини

$$R_{n,p}(C^{\psi}_{\infty}(\mathbb{T})_{+}) := \sup_{f\in C^{\psi}_{\infty}(\mathbb{T})_{+}} \|f(\cdot)-V_{n,p}(f;\cdot)\|_{C(\mathbb{T})}, \tag{14}$$

де

$$C^{\psi}_{\infty}(\mathbb{T})_{+} := \{f \in C^{\psi}(\mathbb{T})_{+} :\ \|f^{\psi}(\cdot)\|_{L_{\infty}(\mathbb{T})} \le 1\},$$

будемо використовувати наступний результат з роботи [4].

Лема A. Нехай B — множина функцій, аналітичних у крузі $\mathbb{D}$ і таких, що $\sup\limits_{z\in\mathbb{D}}|f(z)| \le 1$. Тоді для довільних чисел $n,p\in\mathbb{N}$, $p<n$ виконується рівність

$$\sup_{f\in B}\,\sup_{z\in\mathbb{D}}|V_{n,p}(f;z)| = \frac{1}{\pi}\ln\frac{n}{p} + O(1),$$

де $O(1)$ — величина, рівномірно обмежена щодо p і n.

Будемо вважати, що натуральні числа n і $p=p(n)$ обрані таким чином, що $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{p}{n}$ існує і дорівнює Θ. Має місце таке твердження.

Теорема 5. Нехай $\psi=\psi_1+i\psi_2$, $\psi_1,\ \psi_2\in\mathfrak{M}_0$, $n,p=p(n)\in\mathbb{N}$, $p<n$ і $0\le\Theta<1$. Тоді при $n\to\infty$ виконується асимптотична рівність

$$R_{n,p}(C^{\psi}_{\infty}(\mathbb{T})_{+}) = \frac{1}{\pi}|\psi(n)|\ln\frac{n}{p} + O(1)|\psi(n)|, \tag{15}$$

де $O(1)$ — величина, рівномірно обмежена щодо p і n.

Доведення. Покладемо $\mu_{n,p}(v) = \tau_{n,p}(v) - \tau^*_{n,p}(v)$. Тоді співвідношення (13) може бути переписаним у вигляді

$$r_{n,p}(f; e^{it}) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f^{\psi}(e^{i(t+\theta)})\widehat{\tau}^*_{n,p}(\theta)\, d\theta + \int\limits_{-\infty}^{\infty} f^{\psi}(e^{i(t+\theta)})\widehat{\mu}_{n,p}(\theta)\, d\theta =$$

$$= r^*_{n,p}(f; e^{it}) + \int\limits_{-\infty}^{\infty} f^{\psi}(e^{i(t+\theta)})\widehat{\mu}_{n,p}(\theta)\, d\theta, \qquad (16)$$

де

$$\mu_{n,p}(v) = \begin{cases} 0, & v \in [0; n-p] \cup (n; \infty), \\ \frac{v-n+p}{p}\ [\psi_i(v) - \psi_i(n)], & v \in (n-p; n]. \end{cases}$$

Беручи до уваги нерівність

$$\psi(\varepsilon\sigma) \le K\psi(\sigma), \quad \sigma \ge 1/\varepsilon,$$

яка виконується для довільної функції $\psi \in \mathfrak{M}_0$ і $0 < \varepsilon \le 1$ (см. [2, с. 175]), на підставі співвідношення (3.1.51) з книги [3, с. 135] одержуємо оцінку

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} |\widehat{\mu}_{n,p}(\theta)|\, d\theta \le K|\psi(n)|. \qquad (17)$$

Зіставляючи співвідношення (9), (16) і (17) знаходимо

$$R_{n,p}(C^{\psi}_{\infty}(\mathbb{T})_+) = |\psi(n)| \sup_{f \in C^{\psi}_{\infty}(\mathbb{T})_+} \|V_{n,p}(f^{\psi}; \cdot)\|_{L_{\infty}(\mathbb{T})} + O(1)|\psi(n)|. \quad (18)$$

Якщо $f \in C^{\psi}_{\infty}(\mathbb{T})_+$, то $f^{\psi}(\rho e^{it}) \in B$, $0 < \rho < 1$, причому майже скрізь на колі $\mathbb{T}$

$$\lim_{\rho \to 1-0} f^{\psi}(\rho e^{it}) = f^{\psi}(e^{it}).$$

З іншого боку, для довільної функції $g \in B$ в класі $C^{\psi}_{\infty}(\mathbb{T})_+$ знайдеться функція f, для якої f^{ψ} майже скрізь на колі $\mathbb{T}$ збігається з кутовими граничними значеннями функції g. Тому, згідно з лемою А при $n \to \infty$

$$\sup_{f \in C^{\psi}_{\infty}(\mathbb{T})_{+}} \|V_{n,p}(f^{\psi};\cdot)\|_{L_{\infty}(\mathbb{T})} = \sup_{f\in B}\ \sup_{z \in \mathbb{D}} |V_{n,p}(f;z)| = \frac{1}{\pi}\ln\frac{n}{p} + O(1). \tag{19}$$

Поєднуючи співвідношення (18) і (19), отримуємо формулу (15). Теорему доведено.

Зазначимо, що рівність (15) є асимптотичною у випадках, коли $\Theta = 0$. Крім того, співвідношення (15) містить низку відомих результатів. Так, при $p = 1$ (наближення сумами Тейлора) формула (15) була отримана в роботі [5]. Якщо ж $\psi_n = n^{-r},\ r > 0$, то результат теореми збігається з наслідком 1 роботи [4]. У випадку ж, коли $\psi_n = n^{-r},\ r = 1, 2, \ldots$, і $p = 1$ рівність (15) приймає вигляд

$$R_{n,p}(H^{\psi}_{\infty}) = \frac{1}{\pi}\frac{1}{n^r}\ln n + O(1)\frac{1}{n^r}.$$

Цей результат був отриманий С.Б. Стєчкіним у роботі [6] і став розповсюдженням класичного результату А.М. Колмогорова [7], щодо асимптотичної поведінки верхніх меж відхилень сум Фур'є на класах 2π-періодичних r-кратно неперервно диференційованих функцій, на випадок наближення класів аналітичних у крузі $\mathbb{D}$ функцій f, які задовольняють у цьому крузі умову $|f^{(r)}(z)| \le 1,\ r \in \mathbb{N}$, за допомогою їхніх частинних сум Тейлора.

1. Степанец А.И. Методы теории приближений: В 2 т. — К.: Ин-т математики НАН Украины, 2002. — Ч. 2. — 468 с.
2. Степанец А.И. Методы теории приближений. — К.: Ин-т математики НАН Украины, 2002. – Ч. I. — 427 с.
3. Степанец А.И., Рукасов В.И., Чайченко С.О. Приближения суммами Валле Пуссена: — Киев: Ин-т математики НАН Украины, 2007. — 386 с.
4. Тайков Л.В. О методах суммирования рядов Тейлора // Математическая жизнь в СССР. — 1962. — С. 252 – 254.
5. Савчук В.В. Асимптотика залишку ряда Тейлора для деяких класів аналітичних функцій // Ряди Фур'є: теорія і застосування. Праці Ін-ту математики НАН України / Відп. ред.: О.І. Степанець. — Київ: Ін-т математики НАН України, 1998. — С. 263 – 279.

6. Стечкин С.Б. Оценка остатка ряда Тейлора для некоторых классов аналитических функций // Изв. АН СССР, Серия математическая. — 1953 – **17.** — С. 461 – 472.
7. Kolmogoroff A. Zur Crössendordnung des Restliedes Fouriershen Reihen differenzierbarer Funktionen // Ann. Math. — 1935. — 36. — P. 521 – 526.

Отримано 28.08.2010

Інститут математики НАН України
Слов'янський державний педагогічний університет

УДК 517.5

©2010. **Сердюк А.С.**

НАБЛИЖЕННЯ ІНТЕГРАЛІВ ПУАССОНА СУМАМИ ВАЛЛЕ ПУССЕНА В РІВНОМІРНІЙ ТА ІНТЕГРАЛЬНІЙ МЕТРИКАХ

На класах інтегралів Пуассона функцій, що належать одиничним кулям просторів L_s, $1\leq s\leq\infty$, знайдено асимптотичні рівності для верхніх меж наближень сумами Валле Пуссена в рівномірній метриці. Асимптотичні рівності також установлені у випадку наближення сумами Валле Пуссена в метриках просторів L_s, $1 \leq s \leq \infty$, на класах інтегралів Пуассона функцій, що належать одиничній кулі простору L_1

On the classes of integrals of Poisson's of functions which belong to unit balls of spaces L_s, $1\leq s\leq\infty$, the asymptotic equality are found for the upper bouns of approximations by Vallee Poussin's sums in an uniform metric. Asymptotic equality is also set in the case of approximations by the Vallee Poussin's sums in the metric of spaces L_s, $1 \leq s \leq \infty$, on the classes of Poisson's integrals of functions which belong to unit balls of space L_1

Нехай L_s, $1 \leq s < \infty$ - простір 2π-періодичних сумовних у s-й степені функцій f із нормою

$$\|f\|_s = \|f\|_{L_s} = \left(\int\limits_0^{2\pi} |\, f(t)\, |^s dt \right)^{1/s};$$

L_∞ – простір 2π-періодичних вимірних і суттєво обмежених функцій, у якому норма задана формулою

$$\|f\|_\infty = \operatorname{ess}\sup_t |f(t)|;$$

C – простір 2π-періодичних неперервних функцій, норма у якому задана наступним чином:

$$\|f\|_C = \max_t |f(t)|.$$

Інтегралами Пуассона сумовної функції $\varphi(\cdot)$ називають функції $f(x)$, що означаються за допомогою рівності

$$f(x) = \frac{A_0}{2} + \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} \varphi(x-t)P_{q,\beta}(t)dt,\ A_0 \in \mathbb{R}, \tag{1}$$

у якій $P_{q,\beta}(t)$ – ядра Пуассона з параметрами $q \in (0,\,1)$ і $\beta \in \mathbb{R}$, тобто, функції вигляду

$$P_{q,\beta}(t) = \sum_{k=1}^{\infty} q^k \cos(kt - \frac{\beta\,\pi}{2}),\ \ q \in (0,1),\ \ \beta \in \mathbb{R}. \tag{2}$$

Множина всіх функцій, які допускають зображення у вигляді (1) при $\varphi \in \mathfrak{N}$, де $\mathfrak{N}$ – деяка підмножина з L_1, позначатимемо через $L^q_\beta\mathfrak{N}$. У межах цієї роботи в ролі $\mathfrak{N}$ виступатимуть множини

$$U^0_s = \{\varphi \in L_s : \|\varphi\|_s \le 1,\, \varphi \perp 1\}.$$

При цьому для зручності покладемо $L^q_{\beta,s} \overset{df}{=} L^q_{\beta,s}U^0_s$.

Нехай $f \in L$ і ряд

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k\,\cos kx + b_k\,\sin kx)$$

є рядом Фур'є функції f. Через $S_n(f;\,x)$ позначимо часткові суми Фур'є порядку n функції f:

$$S_n(f) = S_n(f;\,x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n}(a_k\,\cos kx + b_k\,\sin kx)$$

Тригонометричні поліноми вигляду

$$V_{n,p}(f) = V_{n,p}(f;x) = \frac{1}{p}\sum_{k=n-p}^{n-1} S_k(f;x)$$

називають сумами Валле Пуссена функції f з параметрами n і p. При $p = 1$ поліноми $V_{n,p}(f;x)$ є звичайними частковими сумами Фур'є $S_{n-1}(f;x)$ порядку $n-1$ функції f. Якщо ж $p = n$, то суми $V_{n,p}(f)$ перетворюються у відомі суми Фейєра $\sigma_{n-1}(f;x)$ порядку $n-1$ функції f:

$$\sigma_{n-1}(f) = \sigma_{n-1}(f;x) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} S_k(f;x).$$

Дослідження апроксимативних властивостей сум $V_{n,p}(f)$ були розпочаті Валле Пуссеном [1, 2], який вперше оцінив величини $\|f - V_{n,p}(f)\|_C$ через найкращі наближення тригонометричними поліномами в рівномірній метриці. Пізніше дослідження в даному напрямі були продовжені в роботах С.М.Нікольського [3], С.Б.Стєчкіна [4,5], В.Т.Гаврилюк [6], О.Д.Габісонії [7], А.А.Захарова [8] та ін.

Мета даної роботи полягає у знаходженні асимптотичних рівностей для величин

$$\mathcal{E}(L^q_{\beta,s}; V_{n,p})_C = \sup_{f\in L^q_{\beta,s}} \|f(x) - V_{n,p}(f;x)\|_C \tag{3}$$

і

$$\mathcal{E}(L^q_{\beta,1}; V_{n,p})_{L_s} = \sup_{f\in L^q_{\beta,1}} \|f(x) - V_{n,p}(f;x)\|_s \tag{4}$$

при $n - p \to \infty$ і довільних значеннях параметрів $1 \le s \le \infty$, $q \in (0,1)$ і $\beta \in \mathbb{R}$.

Задачу про знаходження асимптотичних рівностей для верхніх меж наближень сумами $V_{n,p}(f)$ в рівномірній метриці на тих чи інших функціональних класах вивчали багато авторів, серед яких Б.Надь [9, 10], С.М.Нікольський [11, 12], С.Б.Стєчкін [13], А.В.Єфімов [14, 15], С.О.Теляковський [16–20], О.П.Тіман [21, 22], В.І.Рукасов [23–25], Л.А.Островецький [26] та ін. ([27, 28]). Докладніше з історією цього питання можна ознайомитися, наприклад, з бібліографічних коментарів монографій [29–31] .

Зазначимо, що дана робота тісно пов'язана з роботою автора [32], в якій раніше були знайдені асимптотичні рівності для величини (3) при $s = \infty$, а також для величини (4) при $s = 1$.

Для формулювання основних результатів роботи введемо наступні позначення:

$$K_{q,p}(\theta) \overset{df}{=} 2^{-\frac{1}{\theta}} \left\| \frac{\sqrt{1-2q^p \cos pt + q^{2p}}}{1-2q\cos t + q^2} \right\|_{\theta}, \; 1\le\theta\le\infty, \; q\in(0,1), \; p\in\mathbb{N}, \tag{5}$$

$$\sigma(\theta,\, p) \overset{df}{=} \begin{cases} 1, & \text{при}\, \theta=1 \text{ і } p=1, \\ 2, & \text{при}\, 1<\theta\le\infty \text{ і } p=1, \\ 3, & \text{при}\, 1\le\theta\le\infty \text{ і } p\in\mathbb{N}\setminus\{1\}. \end{cases} \tag{6}$$

Теорема 1. *Нехай $q\in(0,1)$, $\beta\in\mathbb{R}$, $1\le s\le\infty$, $n,\, p\in\mathbb{N}$, $p\le n$. Тоді*

$$\mathcal{E}(L^q_{\beta,s}; V_{n,p})_C =$$

$$= \frac{q^{n-p+1}}{p}\left(\frac{\|\cos t\|_{s'}}{\pi^{1+1/s'}}\, K_{q,p}(s') + O(1)\frac{q\,\delta(s)}{(n-p+1)(1-q)^{\sigma(s',p)}} \right), \tag{7}$$

де

$$\delta(s) = \begin{cases} 0, & s=2\,, \\ 1, & s\in[\,1,\infty\,]\setminus\{2\}, \end{cases}$$

$s'=\frac{s}{s-1}$, величини $K_{q,p}(s')$ і $\sigma(s',p)$ означені рівностями (5) і (6) відповідно, а $O(1)$ – величина, рівномірно обмежена по параметрах $n,\, p,\, q,\, \beta,$ і s.

Доведення. Нехай $f\in L^q_{\beta,s}$, $q\in(0,1), \beta\in\mathbb{R}$, $1\le s\le\infty$. У роботі [32, с.100] для відхилення $\rho_{n,p}(f;x) \overset{df}{=} f(x) - V_{n,p}(f;x)$ було одержане інтегральне представлення вигляду

$$\rho_{n,p}(f;x) = \frac{1}{\pi\, p}\int\limits_{-\pi}^{\pi} \varphi(x-t)\mathrm{Z}_q(t)\mathcal{P}_{q,\beta,n,p}(t)dt, \tag{8}$$

у якому

$$\mathrm{Z}_q(t) \overset{df}{=} \frac{1}{\sqrt{1-2q\cos t+q^2}}, \; q\in(0,1), \tag{9}$$

$$\mathcal{P}_{q,\beta,n,p}(t) = \sum_{k=n-p+1}^{n} q^k \cos\left(kt + \theta(t) - \frac{\beta\,\pi}{2} \right), \; q\in(0,1), \; \beta\in\mathbb{R}, \tag{10}$$

$\theta(t) = \theta(q,t)$ означається формулами

$$\frac{1 - q\cos t}{\sqrt{1 - 2q\cos t + q^2}} = \cos\theta(t), \tag{11}$$

$$\frac{q\sin t}{\sqrt{1 - 2q\cos t + q^2}} = \sin\theta(t), \tag{12}$$

а функція φ пов'язана з f за допомогою рівності (1).

В силу формул (3) і (8) та інваріантності множин U_s^0 відносно зсуву аргументу одержуємо

$$\mathcal{E}(L^q_{\beta,s}; V_{n,p})_C = \frac{1}{\pi\, p} \sup_{\varphi\in U_s^0} \left\| \int\limits_{-\pi}^{\pi} \varphi(x-t)\mathrm{Z}_q(t)\mathcal{P}_{q,\beta,n,p}(t)dt \right\|_C =$$

$$= \frac{1}{\pi\, p} \sup_{\varphi\in U_s^0} \int\limits_{-\pi}^{\pi} \varphi(t)\mathrm{Z}_q(t)\mathcal{P}_{q,\beta,n,p}(t)dt. \tag{13}$$

Згідно зі співвідношеннями двоїстості (див., наприклад, [33, с.27]) для довільної функції $x \in L_{s'}$, $1 \le s' \le \infty$

$$\inf_{\lambda\in\mathbb{R}} \|x(t)-\lambda\|_{s'} = \sup\left\{ \int\limits_0^{2\pi} x(t)y(t)dt : \|y\|_s \le 1, \int\limits_0^{2\pi} y(t) = 0 \right\},\ \frac{1}{s} + \frac{1}{s'} = 1. \tag{14}$$

Застосувавши рівність (14) при $x(t) = \mathrm{Z}_q(t)\mathcal{P}_{q,\beta,n,p}(t)$ і $y(t) = \varphi(t)$, рівності (13) можна продовжити

$$\frac{1}{\pi\, p} \sup_{\varphi\in U_s^0} \int\limits_{-\pi}^{\pi} \varphi(t)\mathrm{Z}_q(t)\mathcal{P}_{q,\beta,n,p}(t)dt = \frac{1}{\pi\, p} \inf_{\lambda\in\mathbb{R}} \|\varphi(t)\mathrm{Z}_q(t)\mathcal{P}_{q,\beta,n,p}(t) - \lambda\|_{s'}. \tag{15}$$

У роботі [32, с. 101] функцію $\mathcal{P}_{q,\beta,n,p}(t)$ виду (10) було представлено наступним чином:

$$\mathcal{P}_{q,\beta,n,p}(t) = q^{n-p+1}\mathrm{Z}_q(t)\Bigg(\cos\left((n-p+1)t - \frac{\beta\pi}{2}\right)G_{p,q}(t) -$$

$$-\sin\left((n-p+1)t-\frac{\beta\pi}{2}\right)H_{p,q}(t)\Big), \tag{16}$$

де

$$G_{p,q}(t)\overset{df}{=}\cos 2\theta(t)-q^p\cos(p\,t+2\theta(t)), \tag{17}$$

$$H_{p,q}(t)\overset{df}{=}\sin 2\theta(t)-q^p\sin(p\,t+2\theta(t)). \tag{18}$$

Далі нам буде потрібним наступне твердження з роботи [34, с. 1083]

Лема 1. *Нехай* $1\le\theta\le\infty$ *і* 2π*-періодичні функції* $g(t)$ *та* $h(t)$ *мають обмежену варіацію, якщо* $\theta=1$*, або належать до класу Гельдера* $K\,H^1$*, якщо* $1<\theta\le\infty$*. Тоді для функції* $\varphi(t)=g(t)\,\cos(m\,t+\alpha)+h(t)\,\sin(m\,t+\alpha)$*,* $\alpha\in\mathbb{R}$*,* $m\in\mathbb{N}$*, виконуються асимптотичні (при* $m\to\infty$*) формули*

$$\|\varphi\|_\theta=(2\,\pi)^{-1/\theta}\,\|\cos t\|_\theta\|r\|_\theta+O(1)M\,m^{-1}, \tag{19}$$

$$\inf_{c\in\mathbb{R}}\|\varphi-c\|_\theta=(2\,\pi)^{-1/\theta}\,\|\cos t\|_\theta\|r\|_\theta+O(1)M\,m^{-1}, \tag{20}$$

$$\frac{1}{2}\sup_{h\in\mathbb{R}}\|\varphi(t+h)-\varphi(t)\|_\theta=(2\,\pi)^{-1/\theta}\,\|\cos t\|_\theta\|r\|_\theta+O(1)M\,m^{-1}, \tag{21}$$

у яких

$$r(t)=\sqrt{g^2(t)+h^2(t)}, \tag{22}$$

$$M=M_\theta=\begin{cases}\bigvee\limits_{-\pi}^{\pi}(g)+\bigvee\limits_{-\pi}^{\pi}(h), & \text{при } \theta=1\\ K+\theta^{-1}\|r\|_s^{1-\theta}\,\bigvee\limits_{-\pi}^{\pi}(r^\theta), & \text{при } 1<\theta<\infty,\\ K, & \text{при } \theta=\infty,\end{cases} \tag{23}$$

а величини $O(1)$ *рівномірно обмежені відносно усіх розглядуваних параметрів.*

Для оцінки величини, що знаходиться в правій частині формули (15), застосуємо лему 1, поклавши в її умовах $\varphi(t)=q^{-n+p-1}$, $\mathrm{Z}_q(t)\mathcal{P}_{q,\beta,n,p}(t)$, $g(t)=\mathrm{Z}_q^2(t)G_{p,q}(t)$, $h(t)=-\mathrm{Z}_q^2(t)H_{p,q}(t)$, $m=n-p+1$, $\alpha=-\frac{\beta\pi}{2}$ і $\theta=s'$.

З урахуванням того, що

$$\sqrt{\left(\mathrm{Z}_q^2(t)G_{p,q}(t)\right)^2+\left(\mathrm{Z}_q^2(t)H_{p,q}(t)\right)^2}=\mathrm{Z}_q^2(t)\sqrt{G_{p,q}^2(t)+H_{p,q}^2(t)}=$$

$$= \mathrm{Z}_q^2(t)\sqrt{1-2q^p\cos p\,t+q^{2p}} = \frac{\mathrm{Z}_q^2(t)}{\mathrm{Z}_{q^p}(p\,t)},$$

із формули (20) одержуємо

$$\inf_{\lambda\in\mathbb{R}}\|\mathrm{Z}_q(t)\mathcal{P}_{q,\beta,n,p}(t)-\lambda\|_{s'} = q^{n-p+1}\inf_{c\in\mathbb{R}}\|q^{-n+p-1}\mathrm{Z}_q(t)\mathcal{P}_{q,\beta,n,p}(t)-c\|_{s'} =$$

$$= q^{n-p+1}\left(\frac{\|\cos t\|_{s'}}{(2\pi)^{1/s'}}\left\|\frac{\mathrm{Z}_q^2(t)}{\mathrm{Z}_{q^p}(p\,t)}\right\|_{s'} + O(1)\frac{M_{s',p}}{n-p+1}\right), \qquad (24)$$

де

$$M_{s',p}=\begin{cases}\bigvee\limits_{-\pi}^{\pi}(\mathrm{Z}_q^2\,G_{p,q})+\bigvee\limits_{-\pi}^{\pi}(\mathrm{Z}_q^2\,H_{p,q}), & s'=1\\ \|(\mathrm{Z}_q^2\,G_{p,q})'\|_C+\|(\mathrm{Z}_q^2\,H_{p,q})'\|_C+\frac{1}{s'}\left\|\frac{\mathrm{Z}_q^2(t)}{\mathrm{Z}_{q^p}(p\,t)}\right\|_{s'}^{1-s'}\bigvee\limits_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{\mathrm{Z}_q^{2\,s'}(t)}{\mathrm{Z}_{q^p}^{s'}(p\,t)}\right), & 1<s'<\infty,\\ \|(\mathrm{Z}_q^2\,G_{p,q})'\|_C+|(\mathrm{Z}_q^2\,H_{p,q})'\|_C, & s'=\infty.\end{cases} \qquad (25)$$

Знайдемо оцінку зверху величини $M_{s'}$ із (25). Розглянемо спочатку випадок $s'=1$. Як випливає із формул (29), (37) і (38) роботи [25, с. 102 − 103]

$$M_{s',p}=M_{1,p}=\bigvee_{-\pi}^{\pi}(\mathrm{Z}_q^2\,G_{p,q})+\bigvee_{-\pi}^{\pi}(\mathrm{Z}_q^2\,H_{p,q})=\begin{cases} O(1)\frac{q}{1-q}, & p=1,\\ O(1)\frac{q}{(1-q)^3}, & p=2,3,\ldots\end{cases} \qquad (26)$$

Нехай тепер $s'=\infty$. Оскільки з урахуванням (17) і (18)

$$\Big(G_{p,q}(t)\Big)' = p\,q^p\sin(p\,t+2\,\theta(t))-2\,\theta'(t)H_{p,q}(t),$$

$$\Big(H_{p,q}(t)\Big)' = -p\,q^p\cos(p\,t+2\,\theta(t))+2\,\theta'(t)G_{p,q}(t),$$

і, крім того, в силу (11) і (12)

$$\theta'(t)=q(\cos t-q)\mathrm{Z}_q^2(t),$$

то остаточно одержуємо

$$\Big(G_{p,q}(t)\Big)' = p\,q^p \sin(p\,t + 2\,\theta(t)) - 2\,q(\cos t - q)\mathrm{Z}_q^2(t)H_{p,q}(t), \quad (27)$$

$$\Big(H_{p,q}(t)\Big)' = -p\,q^p \cos(p\,t + 2\,\theta(t)) + 2\,q(\cos t - q)\mathrm{Z}_q^2(t)G_{p,q}(t). \quad (28)$$

Далі, використавши рівність

$$\Big(\mathrm{Z}_q^2(t)\Big)' = -2\,\mathrm{Z}_q^2(t)\,h_q(t), \quad (29)$$

а також формули (27) і (28), знаходимо

$$\Big(\mathrm{Z}_q^2(t)G_{p,q}(t)\Big)' = -2\,\mathrm{Z}_q^2(t)\,G_{p,q}(t)h_q(t) + p\,q^p\,\mathrm{Z}_q^2(t)\sin(p\,t + 2\,\theta(t)) -$$

$$-2\,q((\cos t - q)\mathrm{Z}_q^2(t))(\mathrm{Z}_q^2(t)\,H_{p,q}(t)), \quad (30)$$

$$\Big(\mathrm{Z}_q^2(t)H_{p,q}(t)\Big)' = -2\,\mathrm{Z}_q^2(t)\,H_{p,q}(t)h_q(t) - p\,q^p\,\mathrm{Z}_q^2(t)\cos(p\,t + 2\,\theta(t)) +$$

$$+2\,q((\cos t - q)\mathrm{Z}_q^2(t))(\mathrm{Z}_q^2(t)\,G_{p,q}(t)). \quad (31)$$

З огляду на те, що

$$\|h_q(t)\|_C \le \frac{q}{1-q},\ q \in (0,1), \quad (32)$$

$$\|\mathrm{Z}_q^2(t)\|_C = \frac{1}{(1-q)^2},\ q \in (0,1), \quad (33)$$

$$\|(\cos t - q)\mathrm{Z}_q^2(t)\|_C = \frac{1}{1-q},\ q \in (0,1), \quad (34)$$

на підставі рівностей (30) маємо

$$\|(\mathrm{Z}_q^2(t)G_{p,q}(t))'\|_C \le 2\|\mathrm{Z}_q^2(t)\|_C(1+q^p)\|h_q(t)\|_C + p\,q^p\|\mathrm{Z}_q^2(t)\|_C +$$

$$+2\,q\|(\cos t - q)\mathrm{Z}_q^2(t)\|_C\,(1+q^p)\|\mathrm{Z}_q^2(t)\|_C = \|\mathrm{Z}_q^2(t)\|_C\Big(2(1+q^p)\|h_q(t)\|_C +$$

$$+p\,q^p+2q(1+q^p)\|(\cos t-q)\mathrm{Z}_q^2(t)\|_C\Bigg) \le \frac{1}{(1-q)^2}\left(4\frac{q}{1-q}+p\,q^p+\frac{4\,q}{1-q}\right) =$$

$$= \frac{1}{(1-q)^2}\left(\frac{8\,q}{1-q}+p\,q^p\right) = O(1)\frac{q}{(1-q)^3}. \qquad (35)$$

Аналогічно, в силу (31) - (34)

$$\|(\mathrm{Z}_q^2(t)H_{p,q}(t))'\|_C \le 2\|\mathrm{Z}_q^2(t)\|_C(1+q^p)\|h_q(t)\|_C + p\,q^p\|\mathrm{Z}_q^2(t)\|_C+$$

$$+2\,q\|(\cos t-q)\mathrm{Z}_q^2(t)\|_C\,(1+q^p)\|\mathrm{Z}_q^2(t)\|_C = \|\mathrm{Z}_q^2(t)\|_C\Bigg(2(1+q^p)\|h_q(t)\|_C+$$

$$+p\,q^p+2q(1+q^p)\|(\cos t-q)\mathrm{Z}_q^2(t)\|_C\Bigg) \le$$

$$\le \frac{1}{(1-q)^2}\left(\frac{8\,q}{1-q}+p\,q^p\right) = O(1)\frac{q}{(1-q)^3}. \qquad (35')$$

Отже, згідно з (25), (35) і (35′), при $s'=\infty$

$$M_{s',p}=M_{\infty,p}= \|(\mathrm{Z}_q^2\,G_{p,q})'\|_C + \|(\mathrm{Z}_q^2\,H_{p,q})'\|_C = O(1)\frac{q}{(1-q)^3}.$$

При $p=1$ остання оцінка може бути покращена. В цьому випадку (див. [32, с. 102])

$$\mathrm{Z}_q^2(t)G_{p,q}(t) = g_q(t),\ \ \mathrm{Z}_q^2(t)H_{p,q}(t) = h_q(t) \qquad (36)$$

і оскільки

$$(g_q(t))' < \frac{q}{(1-q)^2},\ \ (h_q(t))' < \frac{q}{(1-q)^2},$$

то

$$M_{s',p}=M_{\infty,1}= \|(\mathrm{Z}_q^2\,G_{1,q})'\|_C + \|(\mathrm{Z}_q^2\,H_{1,q})'\|_C = O(1)\frac{q}{(1-q)^2}.$$

Отже, остаточно можемо записати

$$M_{s',p}=M_{\infty,p}=\|(\mathrm{Z}_q^2\,G_{p,q})'\|_C+\|(\mathrm{Z}_q^2\,H_{p,q})'\|_C=\begin{cases}O(1)\frac{q}{(1-q)^2}, & p=1,\\ O(1)\frac{q}{(1-q)^3}, & p=2,3,\ldots\end{cases} \qquad (37)$$

Нехай, нарешті, $1 < s' < \infty$. Оскільки

$$\mathrm{Z}_q'(t) = -h_q(t)\,\mathrm{Z}_q(t), \tag{38}$$

то

$$\left(\left(\frac{\mathrm{Z}_q^2(t)}{\mathrm{Z}_{q^p}(p\,t)}\right)^{s'}\right)' = s'\left(\frac{\mathrm{Z}_q^2(t)}{\mathrm{Z}_{q^p}(p\,t)}\right)^{s'-1} \frac{2\,\mathrm{Z}_q(t)\,\mathrm{Z}_q'(t)\,\mathrm{Z}_q^p(p\,t) - \mathrm{Z}_q^2(t)\,\mathrm{Z}_{q^p}'(p\,t)p}{\mathrm{Z}_{q^p}^2(p\,t)} =$$

$$= s'\frac{\mathrm{Z}_q^{2s'}(t)}{\mathrm{Z}_{q^p}^{s'}(p\,t)}(p\,h_{q^p}(p\,t) - 2\,h_q(t)). \tag{39}$$

Отже, в силу (39)

$$\bigvee_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{\mathrm{Z}_q^{2s'}(t)}{\mathrm{Z}_{q^p}^{s'}(p\,t)}\right) = \int\limits_{-\pi}^{\pi}\left|\left(\frac{\mathrm{Z}_q^{2s'}(t)}{\mathrm{Z}_{q^p}^{s'}(p\,t)}\right)\right|dt =$$

$$= \int\limits_{-\pi}^{\pi}\left|\,s'\frac{\mathrm{Z}_q^{2s'}(t)}{\mathrm{Z}_{q^p}^{s'}(p\,t)}(p\,h_{q^p}(p\,t) - 2\,h_q(t))\right|dt \le$$

$$\le s'\left(p\,\|\;h_{q^p}(p\,t)\;\|_C + 2\|h_q(t)\|_C\right)\int\limits_{-\pi}^{\pi}\frac{\mathrm{Z}_q^{2s'}(t)}{\mathrm{Z}_{q^p}^{s'}(p\,t)}dt =$$

$$= s'\left(p\|h_{q^p}(p\,t)\|_C + 2\|h_q(t)\|_C\right)\left\|\frac{\mathrm{Z}_q^2(t)}{\mathrm{Z}_{q^p}(p\,t)}\right\|_{s'}^{s'}. \tag{40}$$

Поєднання формул (32) і (40) дозволяє записати нерівність

$$\bigvee_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{\mathrm{Z}_q^{2s'}(t)}{\mathrm{Z}_{q^p}^{s'}(p\,t)}\right) \le s'\left(\frac{p\,q^p}{1-p^q} + \frac{2\,q}{1-q}\right)\left\|\frac{\mathrm{Z}_q^2(t)}{\mathrm{Z}_{q^p}(p\,t)}\right\|_{s'}^{s'} < \frac{3\,s'}{1-q}\left\|\frac{\mathrm{Z}_q^2(t)}{\mathrm{Z}_{q^p}(p\,t)}\right\|_{s'}^{s'}. \tag{41}$$

Крім того, з урахуванням (33) та очевидної рівності

$$\left\|\frac{1}{\mathrm{Z}_{q^p}(p\,t)}\right\|_C = 1 + q^p, \tag{42}$$

одержуємо

$$\left\|\frac{\mathrm{Z}_q^2(t)}{\mathrm{Z}_{q^p}(p\,t)}\right\|_{s'} \le (1+q^p)\|\mathrm{Z}_q^2(t)\|_{s'} \le (2\pi)^{1/s'}\ \frac{1+q^p}{(1-q)^2}. \tag{43}$$

Враховуючи (41) і (43) при довільних $1 < s' < \infty$ будемо мати оцінку

$$\frac{1}{s'}\left\|\frac{\mathrm{Z}_q^2(t)}{\mathrm{Z}_{q^p}(p\,t)}\right\|_{s'}^{1-s'} \bigvee_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{\mathrm{Z}_q^{2s'}(t)}{\mathrm{Z}_{q^p}^{s'}(p\,t)}\right) = O(1)\frac{q}{(1-q)^3}. \tag{44}$$

Співставивши формули (25), (37) і (44), отримуємо, що при $1 < s' < \infty$

$$M_{s',p} = \|(\mathrm{Z}_q^2\, G_{p,q})'\|_C + \|(\mathrm{Z}_q^2\, H_{p,q})'\|_C +$$
$$+\frac{1}{s'}\left\|\frac{\mathrm{Z}_q^2(t)}{\mathrm{Z}_{q^p}(p\,t)}\right\|_{s'}^{1-s'} \bigvee_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{\mathrm{Z}_q^{2s'}(t)}{\mathrm{Z}_{q^p}^{s'}(p\,t)}\right) = O(1)\frac{q}{(1-q)^3}.$$

При $p = 1$ остання оцінка може бути покращена. Дійсно, в силу рівностей (36) і (25), а також співвідношень (60) роботи [34, с. 1088] одержуємо

$$M_{s',1} = \|g_q'\|_C + \|h_q'\|_C + \frac{1}{s'}\|\mathrm{Z}_q\|_{s'}^{1-s'}\bigvee_{-\pi}^{\pi}(\mathrm{Z}_q^{s'}(t)) = O(1)\frac{q}{(1-q)^2},\ 1<s'<\infty.$$

Отже, остаточно маємо

$$M_{s',p} = \begin{cases} O(1)\frac{q}{(1-q)^2}, & p=1, \\ O(1)\frac{q}{(1-q)^3}, & p=2,3,\dots \end{cases},\ 1 < s' < \infty. \tag{45}$$

Виходячи зі співвідношень (13), (15), (26), (37) і (45) одержуємо рівність

$$\mathcal{E}(L^q_{\beta,s}; V_{n,p})_C = \frac{q^{n-p+1}}{\pi\,p}\left(\frac{\|\cos t\|_{s'}}{(2\pi)^{1/s'}}\left\|\frac{\mathrm{Z}_q^2(t)}{\mathrm{Z}_{q^p}(p\,t)}\right\|_{s'} + \right.$$
$$\left. + O(1)\frac{q}{(n-p+1)(1-q)^{\sigma(s',p)}}\right), 1\le s\le\infty,\ p\in\mathbb{N},\ q\in(0,1),\ \beta\in\mathbb{R}. \tag{46}$$

У випадку $s=2$ замість оцінки (46) для величини $\mathcal{E}(L^q_{\beta,s};V_{n,p})_C$ можемо записати точну рівність. Для цього, спираючись на формули (3) і (15), а також на рівності (8) роботи [32, с. 99], знаходимо

$$\mathcal{E}(L^q_{\beta,2};V_{n,p})_C=\frac{1}{\pi}\inf_{\lambda\in\mathbb{R}}\left\|\frac{1}{p}\sum_{k=n-p}^{n-1}\sum_{j=k+1}^{\infty}q^j\cos\left(jt-\frac{\beta\pi}{2}\right)-\lambda\right\|_2=$$

$$=\frac{1}{\pi}\inf_{\lambda\in\mathbb{R}}\left\|\frac{1}{p}\sum_{k=n-p+1}^{n-1}(k-n+p)q^k\cos\left(kt-\frac{\beta\pi}{2}\right)+\right.$$

$$\left.+\sum_{k=n}^{\infty}q^k\cos\left(kt-\frac{\beta\pi}{2}\right)-\lambda\right\|_2=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\inf_{\lambda\in\mathbb{R}}\left(\lambda^2+\frac{1}{p^2}\sum_{k=n-p+1}^{n-1}(k-n+p)^2\,q^{2k}+\sum_{k=n}^{\infty}q^{2k}\right)^{1/2}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{q^{2(n-p)}}{p^2}\sum_{k=1}^{p-1}k^2\,q^{2k}+\sum_{k=n}^{\infty}q^{2k}\right)^{1/2}. \tag{47}$$

Оскільки для довільних $l\in\mathbb{N}$ і $\rho\in(0,1)$

$$\sum_{k=1}^{l}k^2\,\rho^k=\frac{\rho(1+\rho)-\rho^{l+1}((l+1)^2-(2l^2+2l-1)\rho+l^2\,\rho^2)}{(1-\rho)^3}, \tag{48}$$

(див., наприклад, [35, с. 603]), то поклавши у (48) $l=p-1,\ \rho=q^2$, одержимо

$$\frac{q^{2(n-p)}}{p^2}\sum_{k=1}^{p-1}k^2\,q^{2k}+\sum_{k=n}^{\infty}q^{2k}=$$

$$=\frac{q^{2(n-p)}(q^2(1+q^2)-q^{2p}(p^2-q^2(2p^2-2p-1)+q^4(p-1)^2))}{p^2(1-q^2)^3}+$$

$$+\frac{q^{2n}}{1-q^2}=\frac{q^{2(n-p)}(q^2(1+q^2)-q^{2p}(q^2(2p+1)+q^4(1-2p)))}{p^2(1-q^2)^3}=$$

$$= \frac{q^{2(n-p+1)}(1+q^2-q^{2p}(2p+1-q^2(2p-1)))}{p^2(1-q^2)^3}. \tag{49}$$

Із (47) і (49) випливає рівність

$$\mathcal{E}(L^q_{\beta,2}; V_{n,p})_C = \frac{q^{n-p+1}}{\sqrt{\pi}\, p}\sqrt{\frac{1+q^2-q^{2p}(2p+1-q^2(2p-1))}{(1-q^2)^3}}. \tag{50}$$

Для того, щоб переконатись у справедливості формули (7) при $s = 2$, досить зауважити, що

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\pi}\frac{1-2q^p\cos pt+q^{2p}}{(1-2q\cos t+q^2)^2}dt = \frac{1+q^2-q^{2p}(2p+1-q^2(2p-1))}{(1-q^2)^3}. \tag{51}$$

(див., наприклад, формули 3.616.2 і 3.616.7 з [36, с. 382 − 383]).

Об'єднуючи оцінку (46) із рівностями (50) і (51) приходимо до формули (7). Теорему 1 доведено.

Розглянемо деякі часткові випадки теореми 1.

При $s = 2$ формула (7) перетворюється у точну рівність (50), яка при $p = 1$ (випадок наближення сумами Фур'є $S_{n-1}(f)$) набуває вигляду

$$\mathcal{E}(L^q_{\beta,2}; S_{n-1})_C = \frac{q^n}{\sqrt{\pi(1-q^2)}},\ q\in(0,1),\ \beta\in\mathbb{R},\ n\in\mathbb{N}, \tag{52}$$

а при $p = n$ (наближення сумами Фейєра $\sigma_{n-1}(f)$) має вигляд

$$\mathcal{E}(L^q_{\beta,2}; \sigma_{n-1})_C =$$

$$= \frac{q}{n\sqrt{\pi}}\sqrt{\frac{1+q^2-q^{2n}(2n+1-q^2(2n-1))}{(1-q^2)^3}},\ q\in(0,1),\ \beta\in\mathbb{R},\ n\in\mathbb{N}. \tag{53}$$

При довільних $1 \le s \le \infty$ і $p = 1$ з формули (7) одержуємо рівність

$$\mathcal{E}(L^q_{\beta,s}; S_{n-1})_C = q^n\Bigg(\frac{\|\cos t\|_{s'}}{\pi^{1+1/s'}2^{1/s'}}\Bigg\|\frac{1}{\sqrt{1-2q\,\cos t+q^2}}\Bigg\|_{s'} +$$

$$+O(1)\frac{q\cdot\delta(s)}{n(1-q)^{\sigma(s',1)}}\Bigg). \tag{54}$$

Рівність (54) доведена у роботі [34]. При $s=\infty$ з (54) випливає асимптотична при $n\to\infty$ рівність

$$\mathcal{E}(L^q_{\beta,\infty};S_{n-1})_C=q^n\Bigg(\frac{8}{\pi^2}\mathbf{K}(q)+O(1)\frac{q}{n(1-q)}\Bigg), \tag{55}$$

де

$$\mathbf{K}(q)=\int\limits_0^{\pi/2}\frac{dt}{\sqrt{1-q^2\sin^2 t}}=\frac{1}{2}K_{q,1}(1)$$

– повний еліптичний інтеграл першого роду. Асимптотична формула (55) відтворює результат С.М.Нікольського [12, с. 222, 223] з покращеною С.Б.Стєчкіним [13, с. 139] оцінкою залишкового члена.

Оскільки при $s'/2\in\mathbb{N}$ (див.[36, с. 382]

$$\frac{1}{2^{1/s'}}\Bigg\|\frac{1}{\sqrt{1-2q\,\cos t+q^2}}\Bigg\|_{s'}=$$

$$=\frac{\pi^{1/s'}}{\sqrt{1-q^2}}\Bigg(\sum_{k=0}^{s'/2-1}\frac{(s'/2+k-1)!}{(k!)^2(s'/2-k-1)!}\Bigg(\frac{q^2}{1-q^2}\Bigg)^k\Bigg)^{1/s'} \tag{56}$$

і (див.[36, с. 383])

$$\|\cos t\|_{s'}^{s'}=\frac{2\pi(s'-1)!!}{(s')!!}, \tag{57}$$

то внаслідок (54) для усіх s таких, що $\frac{s}{2(s-1)}\in\mathbb{N}$,

$$\mathcal{E}(L^q_{\beta,s};S_{n-1})_C=$$

$$=q^n\Bigg(\frac{2^{1/s'}}{\pi^{1/s}\sqrt{1-q^2}}\Bigg(\frac{(s'-1)!!}{(s')!!}\sum_{k=0}^{s'/2-1}\frac{(s'/2+k-1)!}{(k!)^2(s'/2-k-1)!}\times$$

$$\times\Bigg(\frac{q^2}{1-q^2}\Bigg)^k\Bigg)^{1/s'}+O(1)\frac{q\cdot\delta(s)}{n(1-q)^{\sigma(s',1)}}\Bigg). \tag{58}$$

Зокрема, при $s=2$ із (58) випливає рівність (52), при $s=\frac{4}{3}$ ($s'=4$) – рівність вигляду

$$\mathcal{E}(L^q_{\beta,\frac{4}{3}};S_{n-1})_C=q^n\left(\frac{3^{1/4}}{2^{1/2}\pi^{3/4}\sqrt{1-q^2}}\left(\frac{1+q^2}{1-q^2}\right)^{1/4}+O(1)\frac{q}{n(1-q)^2}\right), \tag{59}$$

при $s=\frac{6}{5}$ ($s'=6$) – рівність

$$\mathcal{E}(L^q_{\beta,\frac{6}{5}};S_{n-1})_C=$$

$$=q^n\left(\frac{5^{1/6}}{2^{1/2}\pi^{5/6}\sqrt{1-q^2}}\left(\frac{1+4q^2+q^4}{1-2q^2+q^4}\right)^{1/6}+O(1)\frac{q}{n(1-q)^2}\right), \tag{60}$$

і т.ін. Формули (52), (54), (58) - (60) одержані в роботі автора [34].

При $s=\infty$ і $1\le p\le n$, $p,n\in\mathbb{N}$ із формули (7) випливає рівність

$$\mathcal{E}(L^q_{\beta,\infty};V_{n,p})_C=\frac{q^{n-p+1}}{p}\left(\frac{4}{\pi^2}\int\limits_0^{\pi}\frac{\sqrt{1-2q^p\cos pt+q^{2p}}}{1-2q\cos t+q^2}dt+\right.$$

$$\left.+O(1)\frac{q}{(n-p+1)(1-q)^{\sigma(1,p)}}\right), \tag{61}$$

яку одержав автор у [32, с. 99].

Теорема 2. *Нехай* $q\in(0,1)$, $\beta\in\mathbb{R}$, $1\le s\le\infty$, n, $p\in\mathbb{N}$, $p\le n$. *Тоді*

$$\mathcal{E}(L^q_{\beta,1};V_{n,p})_{L_s}=$$

$$=\frac{q^{n-p+1}}{p}\left(\frac{\|\cos t\|_s}{\pi^{1+1/s}}\,K_{q,p}(s)+O(1)\frac{q}{(n-p+1)(1-q)^{\sigma(s,p)}}\right), \tag{62}$$

де величини $K_{q,p}(s)$ *і* $\sigma(s,p)$ *означені рівностями (5) і (6) відповідно, а* $O(1)$ *- величина рівномірно обмежена по параметрах* n,p,q,β *і* s.

Доведення. Нехай $f\in L^q_{\beta,1}$. В силу формул (4) і (8) одержуємо зображення

$$\mathcal{E}(L^q_{\beta,1};V_{n,p})_{L_s}=\frac{1}{\pi\,p}\sup_{\varphi\in U_1^0}\left\|\int\limits_{-\pi}^{\pi}\varphi(x-t)\mathrm{Z}_q(t)\mathcal{P}_{q,\beta,n,p}(t)dt\right\|_s, \tag{63}$$

у якому функції $\mathrm{Z}_q(t)$ і $\mathcal{P}_{q,\beta,n,p}(t)$ означені формулами (9) і (10) відповідно.

Далі нам знадобиться наступне твердження з роботи [37, с.1398].

Лема 2. Нехай $\mathbf{K}(t) \in L_s,\ 1 \le s \le \infty$. Тоді для величини

$$\mathcal{E}(K)_{L_s} = \sup_{\varphi \in U_1^0} \left\| \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(x-t) K(t) dt \right\|_s \tag{64}$$

виконуються співвідношення

$$\frac{1}{2} \sup_{h \in \mathbb{R}} \left\| K(\cdot) - K(\cdot + h) \right\|_s \le \mathcal{E}(K)_{L_s} \le \|K\|_s. \tag{65}$$

Покладаючи в умовах леми 2 $K(t) = \mathrm{Z}_q(t)\,\mathcal{P}_{q,\beta,n,p}(t)$ і враховуючи рівність (63), одержуємо співвідношення

$$\frac{1}{2\pi\, p} \sup_{h \in \mathbb{R}} \left\| \mathrm{Z}_q(\cdot)\mathcal{P}_{q,\beta,n,p}(\cdot) - \mathrm{Z}_q(\cdot + h)\mathcal{P}_{q,\beta,n,p}(\cdot + h) \right\|_s \le$$

$$\le \mathcal{E}(L^q_{\beta,1}; V_{n,p})_{L_s} \le \frac{1}{\pi p} \|\mathrm{Z}_q(\cdot)\,\mathcal{P}_{q,\beta,n,p}(\cdot)\|_s,\ 1 \le s \le \infty. \tag{66}$$

В силу леми 1 в умовах якої покладено $\varphi(t) = q^{-n+p-1}\mathrm{Z}_q(t)\mathcal{P}_{q,\beta,n,p}(t)$, $g(t) = \mathrm{Z}_q^2(t) G_{p,q}(t)$, $h(t) = -\mathrm{Z}_q^2(t) H_{p,q}(t)$, $m = n - p + 1$, $\alpha = -\frac{\beta\pi}{2}$ і $\theta = s$ (функції $G_{p,q}(t)$ і $H_{p,q}(t)$ означені відповідно рівностями (17) і (18)), а також формул (24), (25), (26), (37) та (45), маємо, що для довільних $q \in (0,1)$, $\beta \in \mathbb{R}$, $1 \le s \le \infty$ і $p = 1, 2, \ldots, n$

$$\frac{1}{2} \sup_{h \in \mathbb{R}} \left\| \mathrm{Z}_q(\cdot)\mathcal{P}_{q,\beta,n,p}(\cdot) - \mathrm{Z}_q(\cdot + h)\mathcal{P}_{q,\beta,n,p}(\cdot + h) \right\|_s =$$

$$= q^{n-p+1} \left(\frac{\|\cos t\|_s}{(2\pi)^{1/s}} \left\| \frac{\mathrm{Z}_q^2(t)}{\mathrm{Z}_{q^p}(p\,t)} \right\|_s + O(1) \frac{q}{(n-p+1)(1-q)^{\sigma(s,p)}} \right), \tag{67}$$

$$\inf_{\lambda \in \mathbb{R}} \left\| \mathrm{Z}_q(\cdot)\mathcal{P}_{q,\beta,n,p}(\cdot) - \lambda \right\|_s =$$

$$= q^{n-p+1}\left(\frac{\|\cos t\|_s}{(2\pi)^{1/s}}\left\|\frac{\mathrm{Z}_q^2(t)}{\mathrm{Z}_{q^p}(p\,t)}\right\|_s + O(1)\frac{q}{(n-p+1)(1-q)^{\sigma(s,p)}}\right), \quad (68)$$

$$\left\|\mathrm{Z}_q(\cdot)\mathcal{P}_{q,\beta,n,p}(\cdot)\right\|_s =$$

$$= q^{n-p+1}\left(\frac{\|\cos t\|_s}{(2\pi)^{1/s}}\left\|\frac{\mathrm{Z}_q^2(t)}{\mathrm{Z}_{q^p}(p\,t)}\right\|_s + O(1)\frac{q}{(n-p+1)(1-q)^{\sigma(s,p)}}\right), \quad (69)$$

де $\sigma(s,p)$ означена формулою (6), а величини $O(1)$ рівномірно обмежені по n, p, s, q і β.

Із формул (66) - (69) випливає (60). Теорему 2 доведено.

Співставлення асимптотичних формул (7) і (60) дозволяє записати граничне співвідношення

$$\lim_{n-p\to\infty}\frac{\mathcal{E}(L^q_{\beta,s'};V_{n,p})_C}{\mathcal{E}(L^q_{\beta,1};V_{n,p})_{L_s}} = 1,\ q\in(0,1),\ \beta\in\mathbb{R},\ 1\le s\le\infty,\ \frac{1}{s}+\frac{1}{s'}=1. \quad (70)$$

Роглянемо деякі часткові випадки теореми 2.

При $s=2$ формула (62) з урахуванням рівності (51) перетворюється в асимптотичну при $n-p\to\infty$ рівність

$$\mathcal{E}(L^q_{\beta,1};V_{n,p})_{L_2} = \frac{q^{n-p+1}}{p}\left(\frac{1}{\pi^{1/2}}\sqrt{\frac{1+q^2-q^{2p}(2p+1-q^2(2p-1))}{(1-q^2)^3}}+\right.$$

$$\left.+O(1)\frac{q}{(n-p+1)(1-q)^{\sigma(2,p)}}\right), \quad (71)$$

яка при $p=1$ набуває вигляду

$$\mathcal{E}(L^q_{\beta,1};S_{n-1})_{L_2} = q^n\left(\frac{1}{\pi^{1/2}\sqrt{1-q^2}} + O(1)\frac{q}{n(1-q)^2}\right). \quad (72)$$

Формула (72) наведена в роботі [37, с. 1402].

При довільних $1\le s\le\infty$ і $p=1$ із формули (62) одержуємо рівність

$$\mathcal{E}(L^q_{\beta,1};S_{n-1})_{L_s} = q^n\left(\frac{\|\cos t\|_s}{\pi^{1+1/S}2^{1/s}}\left\|\frac{1}{\sqrt{1-2q\,\cos t+q^2}}\right\|_s+\right.$$

$$+O(1)\frac{q}{n(1-q)^{\sigma(s,1)}}\Bigg). \tag{73}$$

Рівність (73) встановлена в роботі [37]. Там же було наведено і декілька частинних випадків формули (73). Зокрема, при $s=1$ із (73) випливає асимптотична при $n\to\infty$ рівність

$$\mathcal{E}(L^q_{\beta,1};S_{n-1})_{L_1}=q^n\left(\frac{8}{\pi^2}\mathbf{K}(q)+O(1)\frac{q}{n(1-q)}\right), \tag{74}$$

де $\mathbf{K}(q)$ – повний еліптичний інтеграл першого роду. Асимптотична рівність (74) відтворює відомий результат С.М.Нікольського [12, с. 222, 223] з покращеною С.Б.Стєчкіним [13, с. 139] оцінкою залишкового члена.

При $\frac{s}{2}\in\mathbb{N}$ з рівностей (56), (57) і (73) випливає оцінка

$$\mathcal{E}(L^q_{\beta,1};S_{n-1})_{L_s}=$$

$$=q^n\Bigg(\frac{2^{1/s}}{\pi^{(s-1)/s}\sqrt{1-q^2}}\Bigg(\frac{(s-1)!!}{s!!}\sum_{k=0}^{s/2-1}\frac{(s/2+k-1)!}{(k!)^2(s/2-k-1)!}\times$$

$$\times\left(\frac{q^2}{1-q^2}\right)^k\Bigg)^{1/s}+O(1)\frac{q}{n(1-q)^2}\Bigg), \tag{75}$$

яка при $s=2$ перетворюється у рівність (72), а при $s=4$ і $s=6$ - відповідно у рівності

$$\mathcal{E}(L^q_{\beta,1};S_{n-1})_{L_4}=q^n\left(\frac{3^{1/4}}{2^{1/2}\pi^{3/4}\sqrt{1-q^2}}\left(\frac{1+q^2}{1-q^2}\right)^{1/4}+O(1)\frac{q}{n(1-q)^2}\right), \tag{76}$$

$$\mathcal{E}(L^q_{\beta,1};S_{n-1})_{L_6}=q^n\Bigg(\frac{5^{1/6}}{2^{1/2}\pi^{5/6}\sqrt{1-q^2}}\left(\frac{1+4q^2+q^4}{1-2q^2+q^4}\right)^{1/6}+$$

$$+O(1)\frac{q}{n(1-q)^2}\Bigg). \tag{77}$$

При $s=1$ і $1\le p\le n,\ p,n\in\mathbb{N}$ з формули (62) випливає рівність

$$\mathcal{E}(L^q_{\beta,1};V_{n,p})_{L_1}=\frac{q^{n-p+1}}{p}\Bigg(\frac{4}{\pi^2}\int\limits_0^\pi\frac{\sqrt{1-2q^p\cos pt+q^{2p}}}{1-2q\cos t+q^2}\,dt+$$

$$+O(1)\frac{q}{(n-p+1)(1-q)^{\sigma(1,p)}}\Bigg), \tag{78}$$

яку одержав автор у $[32, \text{с.}\,104-105\,]$.

1. *La Vallé Poussin Ch.* Sur la meilleure approximation des fonctions d'une variable réelle par des expessions d'ordre donné // Compt., rendus. — 1918. — Bd. 166. — S. 799–802.
2. *La Vallé Poussin Ch.* Leçons sur l'approximation des fonctions d'une variable réelle. — Paris.: Gautier – Villars. – 1919.– 150 p.
3. *Никольский С.М.* О некоторых методах приближения тригонометрическими суммами // Изв. АН СССР, сер. матем. – 1940.–**4**. – С. 509–520.
4. *Стечкин С.Б.* О суммах Валле Пуссена // Докл. АН СССР. — 1951. — Т. 80. — С. 545–548.
5. *Steckin S.B.* On the approximation of periodic functions by de la Vallee Poussin sums // Analysis Mathematica. — 1978. — **4** . — P 61 - 74.
6. *Гаврилюк В.Т.* Линейные методы суммирования рядов Фурье и наилучшее приближение // Укр. мат. журн. – 1963. – 15, № 5. – С. 412 – 418.
7. *Габисония О.Д.* О приближении функций многих переменных целыми функциями// Изв. вузов, Математика. – 1965. – **45**, № 2. – С. 30 - 35.
8. *Захаров А.А.* Об оценке уклонения непрерывных периодических функций от сумм Валле Пуссена // Матем. заметки – 1968. – **3** – С. 77 - 84.
9. *Nagy B. Ü*ber gewisse Extremalfragen bei transformierten trigonometrischen Entwicklungen, I. Periodischer Fall, Berichte der math.-phys. Kl. Acad. der Wiss. zu Leipzig. – 1938. – **90**.– P. 103 – 134.
10. *Nagy B.* Sur une classe générale de procédés de sommation pour les séries de Fourier, Hung. Acta Math. — 1948. — **1** , No. 3. — P. 14–52.
11. *Никольский С.М.* Приближение периодических функций тригонометрическими многочленами//Труды МИАН СССР. – 1945. – 15. – С. 1–76.
12. *Никольский С.М.* Приближение функций тригонометрическими полиномами в среднем// Изв. АН СССР, сер. матем. – 1946.–**10**. – С. 207–256.
13. *Стечкин С.Б.* Оценка остатка ряда Фурье для дифференцируемых функций // Труды МИАН СССР. — 1980. — **145**. — С. 126–151.
14. *Ефимов А.В.* О приближении периодических функций суммами Валле-Пуссена. I// Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1959. – 23, № 5. – С. 737 – 770.
15. *Ефимов А.В.* О приближении периодических функций суммами Валле-Пуссена. II//Изв. АН СССР. Сер. мат. - 1960. – 24, № 3. - С. 431 - 468.
16. *Теляковский С.А.* Приближение дифференцируемых функций суммами Валле-Пуссена// Докл. АН СССР – 1958. – **121**, № 3. – С. 426 – 429.
17. *Теляковский С.А.* Приближение функций, дифференцируемых в смысле Вейля, суммами Валле Пуссена// Докл. АН СССР – 1960. – **131**, № 2. – С. 259 – 262.

18. *Теляковский С.А.* О приближении дифференцируемых функций линейными средними их рядов Фурье// Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1960. – **24**, № 2. - С. 213 - 242.
19. *Теляковский С.А.* О нормах тригонометрических полиномов и приближении дифференцируемых функций линейными средними их рядов Фурье. I // Труды МИАН СССР. – 1961. – 62. – С. 61 – 97.
20. *Теляковский С.А.* О нормах тригонометрических полиномов и приближении дифференцируемых функций линейными средними их рядов Фурье. II // Изв. АН СССР Сер. мат. – 1963. – 27, № 2. – С. 253 – 272.
21. *Тиман А.Ф.* Обобщение некоторых результатов А.Н.Колмогорова и С.М.Никольского// Докл. АН СССР. – 1951. – 81, № 4. – С. 509 – 511.
22. *Тиман А.Ф.* Теория приближения функций действительного переменного М.: Физматгиз, 1960. – 624 с.
23. *Рукасов В.И.* Приближение функций класса $C^{\psi}_{\beta,\infty}$ линейными средними их рядов Фурье// Укр. мат. журн. – 1987. – 39, № 4. – С. 478 – 483.
24. *Рукасов В.И.* Приближения операторами Валле-Пуссена функций, заданных на действительной оси // Укр. мат.журн. – 1992. – 44, № 5. – С. 682 – 690.
25. *Рукасов В.И.* Приближение суммами Валле-Пуссена классов аналитических функций// Укр. мат. журн. - 2003. - 55, № 6. – С.806–816.
26. *Островецький Л.А.* Про асимптотичні рівності при наближенні функцій з класів H_ω сумами Валле-Пуссена // Доп. АН УРСР. Сер. А. – 1979. – № 5. – С. 340 – 342.
27. *Рукасов В.И., Новиков О.А.* Приближение аналитических функций суммами Валле-Пуссена// Ряди Фур'є : теорія і застосування / Праці Інституту математики НАН України Т. 20. – К.: Ін-т математики НАН України, 1998. – С. 228 – 241.
28. *Рукасов В.И., Чайченко С.О.* Наближення аналітичних періодичних функцій сумами Валле-Пуссена // Укр. мат. журн. – 2002. – 54, №12. – С. 1653-1668.
29. *Степанец А.И.* Методы теории приближений: В 2 ч. // Праці Інституту математики НАН України. – Т 40. — К.: Ин-т математики НАН Украины, 2002. — Ч.I. — 427 с.
30. *Степанец А.И.* Методы теории приближений: В 2 ч.//Праці Інституту математики НАН України. Т. 40. — К.: Ин-т математики НАН Украины, 2002. — Ч. II. — 468 с.
31. *Степанец А.И., Рукасов В.И., Чайченко С.О.* Приближения суммами Валле-Пуссена // Праці Інституту математики НАН України. – Т.68. — К.: Ін-т математики НАН України, 2007. — 386 с.
32. *Сердюк А.С.* Наближення інтегралів Пуассона сумами Валле Пуссена // Укр. мат. журн. — 2004. — **56**, №1. — С. 97–107.
33. *Корнейчук Н.П.* Точные константы в теории приближения. — М.: Наука,

1987. — 423 с.

34. *Сердюк А.С.* Наближення класів аналітичних функцій сумами Фур'є в рівномірній метриці // Укр. мат. журн. — 2005.— **57**, №8. — С.1079–1096.
35. *Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И.* Интегралы и ряды. Элементарные функции. – М.: Наука,1981. — 800 с.
36. *Градштейн И.С., Рыжик И.М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. — М.: Физматгиз, 1963. — 1100 с.
37. *Сердюк А.С.* Наближення класів аналітичних функцій сумами Фур'є в метриці простору L_p // Укр. мат. журн. — 2005. — **57**, №10. — С.1395–1408.

Отримано 20.10.2009

Інститут математики НАН України

Вісник СДПУ Математика 2010. Вип. 2(4)

УДК 517.938.5 + 519.514.17

©2010. **Сілін Є.С.**

ОДНОЧАСНЕ НАБЛИЖЕННЯ ФУНКЦІЙ МАЛОЇ ГЛАДКОСТІ ТА ЇХ $\overline{\psi}$-ІНТЕГРАЛІВ ОПЕРАТОРАМИ ВАЛЛЕ ПУССЕНА

В статті досліджується задача одночасного наближення неперервних функцій малої гладкості та їх $\overline{\psi}$-інтегралів за допомогою операторів Валле Пуссена. Знайдено асимптотичні закони поведінки величин, які характеризують цю задачу.

The article investigates the task of the simultaneous approaching of continuous functions of small smoothness and their $\overline{\psi}$ -integrals by the operators of Vallee Poussin's. The asymptotic laws of conduct of sizes which characterize this task are found.

Припустимо, $\overline{\psi} = (\psi_1, \psi_2)$ — пара функцій $\psi_1(t)$, $\psi_2(t)$ таких, що $\psi_1 \in \mathfrak{A}$, $\psi_2 \in \mathfrak{A}'$, де $\mathfrak{A}$ — множина неперервних при $v \geq 0$ функцій $\psi(t)$, які задовольняють умови: 1) $\psi(t) \geq 0$, $\psi(0) = 0$, $\psi(t)$ зростає на $[0, 1)$; 2) $\psi(t)$ опукла донизу на $[1, \infty)$ і $\lim\limits_{v\to\infty} \psi(t) = 0$; 3) похідна $\psi'(t) = \psi'(t + 0)$ має обмежену варіацію на $[0, \infty)$; $\mathfrak{A}'$ — це підмножина функцій $\psi \in \mathfrak{A}$, для яких $\int\limits_1^\infty \frac{\psi(t)}{t}\, dt < \infty$. Множину функцій $\psi(t)$, які задовольняють лише умову 2 позначають $\mathfrak{M}$.

Кожній функції $\psi \in \mathfrak{M}$ $\forall t \geq 1$ співставимо пару функцій $\eta(t) = \psi^{-1}(\psi(t)/2))$ та $\mu(t) = t/(\eta(t) - t)$. Тоді:
$\mathfrak{M}_0 = \{\psi \in \mathfrak{M} : 0 < \mu(\psi, t) \leq K_1\}$, $\mathfrak{A}_0 = \mathfrak{M}_0 \bigcap \mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}'_0 = \mathfrak{A}_0 \bigcap \mathfrak{A}'$, $\mathfrak{M}_C = \{\psi \in \mathfrak{M} : 0 < K_2 \leq \mu(\psi, t) \leq K_3 < \infty\}$, $\mathfrak{A}_C = \mathfrak{M}_C \bigcap \mathfrak{A}$, де K_j, $j = \overline{1, 3}$ — деякі сталі, які, можливо, залежать від функції $\psi(t)$.

Нехай далі C — множина неперервних обмежених на дійсній осі функцій, $\mathfrak{N}$ — одинична куля простору M істотно обмежених на дійсній осі $\mathbb{R}$ функцій, $S_\infty = \{\varphi : \ \operatorname{ess\,sup} |\varphi(t)| \leq 1\}$, або ж клас

Виконано за часткової підтримки Німецького фонду наукових досліджень (DFG) у рамках проекту 436 UKR 113/103/0-1).

$H_\omega = \{\varphi \in C : |\varphi(t) - \varphi(t')| \le \omega(|t-t'|)\ \forall t, t' \in \mathbb{R}\}$, $\omega(t)$ — фіксований модуль неперервності. Тоді, наслідуючи О. І. Степанця [1,2], через $\widehat{C}^{\overline{\psi}}\mathfrak{N}$ позначимо множину всіх неперервних функцій f, які для всіх x можна подати у вигляді

$$f(x) = A_0 + \int\limits_{\mathbb{R}} \varphi(x+t)\widehat{\overline{\psi}}(t)\, dt \overset{\mathrm{df}}{=} A_0 + \varphi * \widehat{\overline{\psi}}, \tag{1}$$

де $A_0 = \mathrm{const}$, інтеграл розуміється як границя інтегралів по симетричних проміжках, що розширюються, функція $\varphi \in \mathfrak{N}$,

$$\widehat{\overline{\psi}}(t) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{R}} (\psi_{1+}(x) + i\psi_{2-}(x))e^{-ixt}\, dx, \tag{2}$$

а ψ_{1+}, ψ_{2-} — парне і непарне продовження функцій ψ_1, ψ_2 відповідно. Якщо $\psi_1 \in \mathfrak{A}$, $\psi_2 \in \mathfrak{A}'$, то перетворення $\widehat{\overline{\psi}}(t)$ сумовне на дійсній осі (див., наприклад, [2], твердження 9.5.1). Функцію $\varphi(\cdot)$ в зображенні (1) називають $\overline{\psi}$-похідною функції $f(\cdot)$ і позначають $f^{\overline{\psi}}(\cdot)$.

Функції $f \in \widehat{C}^{\overline{\psi}}\mathfrak{N}$ при кожних дійсних $\sigma > h \ge 1$ поставимо у відповідність оператор $V_{\sigma,h}(f;x)$, поклавши

$$V_{\sigma,h}(f;x) = A_0 + f^{\overline{\psi}} * \widehat{\lambda_{\sigma,h}\overline{\psi}}(t), \tag{3}$$

де $\widehat{\lambda_{\sigma,h}\overline{\psi}}$ перетворення вигляду (2) функції $\lambda_{\sigma,h}(t)\overline{\psi}(t)$, в якій

$$\lambda_{\sigma,h}(t) = \begin{cases} 1, & 0 \le |t| \le \sigma - h, \\ \frac{\sigma - |t|}{h}, & \sigma - h \le |t| \le \sigma, \\ 0, & \sigma \le |t|. \end{cases} \tag{4}$$

Такі оператори розглядав О.І. Степанець у роботах [1–4], де показано (наприклад, [2], твердження 9.3.4), що за умов, накладених на функції (ψ_1, ψ_2), $V_{\sigma,h}(f;x)$ належать до множини ε_σ цілих функцій експоненціального типу $\le \sigma$, а в періодичному випадку, при $\sigma = n \in \mathbb{N}$ і $h = p \in \mathbb{N}$, $p < n$, оператори $V_{\sigma,h}(f;x)$ співпадають з сумами Валле Пуссена. Тому $V_{\sigma,h}(f;x)$ називають операторами Валле Пуссена.

Нам також знадобляться наступні означення, які подано в роботі [5]. Нехай $\overline{\psi} = \{\overline{\psi}^{(1)}, \overline{\psi}^{(2)}, \ldots, \overline{\psi}^{(m)}\}$, де $\overline{\psi}^{(\mathrm{i})} = (\psi_1^{(\mathrm{i})}, \psi_2^{(\mathrm{i})})$, $\mathrm{i} = \overline{1, m}$ — довільні пари функцій, такі, що $\psi_1^{(\mathrm{i})} \in \mathfrak{A}_0$, $\psi_2^{(\mathrm{i})} \in \mathfrak{A}'_0$. Далі, $b = \{b_1, b_2, \ldots, b_m\}$ — довільний вектор з дійсними координатами і

$$\Sigma_{\sigma,h}^{(m)}(\varphi, x, \overline{\psi}, b) = \sum_{i=1}^{m} \frac{b_i}{|\overline{\psi}^{(i)}(\sigma)|} \left(I^{\overline{\psi}^{(i)}}(\varphi, x) - V_{\sigma,h}(I^{\overline{\psi}^{(i)}}(\varphi, x)) \right), \quad (5)$$

де $\varphi \in \mathfrak{N}$.

Для величини (5), яка визначена на множині $\mathfrak{N}$, має сенс вираз

$$\Sigma_{\sigma,h}^{(m)}(\mathfrak{N}, \overline{\psi}, b) = \sup_{\varphi \in \mathfrak{N}} ||\Sigma_{\sigma,h}^{(m)}(\varphi, x, \overline{\psi}, b)||_C \ . \quad (6)$$

Задача одночасного наближення функцій і їх $\overline{\psi}$−інтегралів операторами Валле Пуссена полягає в дослідженні величини (6). Аналогічна задача для операторів Фур'є на класах $\widehat{C}_\beta^\psi\mathfrak{N}$ і $\widehat{L}_\beta^\psi\mathfrak{N}$, тобто, у випадку $\psi_1(\sigma) = \psi(\sigma)\cos\frac{\beta\pi}{2}$, $\psi_2(\sigma) = \psi(\sigma)\sin\frac{\beta\pi}{2}$, $\beta \in \mathbb{R}$, $h = 1$ та

$$\lambda_{\sigma,1}^*(t) = \begin{cases} 1, & 0 \le t \le \sigma - 1, \\ 1 - \frac{(t-\sigma+1)\psi(\sigma)}{\psi(t)}, & \sigma - 1 \le t \le \sigma, \\ 0, & t \ge \sigma \end{cases}$$

була розв'язана в роботі [6]. У випадку 2π-періодичних функцій задача про одночасне наближення функцій та їх (ψ, β)−похідних сумами Фур'є на класах $C_\beta^\psi\mathfrak{N}$ і $L_\beta^\psi\mathfrak{N}$ розглянуто в роботі [7]. Роботу [8] присвячено одночасному наближенню періодичних функцій і їх $\overline{\psi}$-інтегралів сумами Валле Пуссена на класах $C^{\overline{\psi}}\mathfrak{N}$ і $L^{\overline{\psi}}\mathfrak{N}$.

Якщо $m = 1$, $b_1 = 1$ і $\overline{\psi}^{(1)}(\sigma) = \overline{\psi}(\sigma)$, то

$$\Sigma_{\sigma,h}^{(1)}(\mathfrak{N}; \overline{\psi}; 1) = \frac{1}{\overline{\psi}(\sigma)} \sup_{\varphi \in \mathfrak{N}} ||I^{\overline{\psi}}(\varphi; x) - V_{\sigma,h}(I^{\overline{\psi}}(\varphi; x))||_C.$$

Звідси випливає, що задача про одночасне наближення узагальнює задачу дослідження величин $\mathcal{E}(\widehat{C}^{\overline{\psi}}\mathfrak{N}; V_{\sigma,h}) = \sup\limits_{f \in \widehat{C}^{\overline{\psi}}\mathfrak{N}} ||\rho_{\sigma,h}||_C =$

$= \sup\limits_{\varphi\in\mathfrak{N}} ||I^{\overline{\psi}}(\varphi;x) - V_{\sigma,h}(I^{\overline{\psi}}(\varphi;x))||_C$, де $\rho_{\sigma,h} = f(x) - V_{\sigma,h}(f;x)$, у тому сенсі, що має місце рівність $\mathcal{E}(\widehat{C}^{\overline{\psi}}\mathfrak{N}; V_{\sigma,h}) = \overline{\psi}(\sigma)\Sigma^{(1)}_{\sigma,h}(\mathfrak{N};\overline{\psi};1)$.

Нехай $\lim\limits_{\sigma\to\infty}\frac{h}{\sigma}$ існує і дорівнює Θ, $0 \le \Theta < 1$.

Справедливе наступне твердження.

Теорема 1. *Нехай* $\psi_1^{(\mathrm{i})} \in \mathfrak{A}_0$, $\psi_2^{(\mathrm{i})} \in \mathfrak{A}'_0$, $i = \overline{1,m}$. *Тоді для дійсних чисел* $\sigma > h \ge 1$ *і довільного вектора* $b = (b_1, b_2, \ldots, b_m)$ *з дійсними координатами при* $\sigma \to \infty$

$$\Sigma^{(m)}_{\sigma,h}(S_\infty;\overline{\psi};b) = \frac{4}{\pi^2}R_m \ln\frac{\sigma}{h} + \frac{2}{\pi}\left|\sum_{i=1}^{m}\frac{b_i}{|\overline{\psi}^{(i)}(\sigma)|}\int\limits_{\sigma}^{\infty}\frac{\psi_2^{(i)}(t)}{t}\,dt\right| + O(1), \tag{7}$$

$$\Sigma^{(m)}_{\sigma,h}(H_\omega;\overline{\psi};b) = \Theta_\omega\left(\frac{1}{\pi}\int\limits_0^1 \omega\left(\frac{2t}{\sigma}\right)\sum_{i=1}^{m}\frac{b_i}{|\overline{\psi}^{(i)}(\sigma)|}\int\limits_1^\infty \psi_2^{(i)}(\sigma s)\times\right.$$

$$\left.\times\sin st ds dt + \frac{2}{\pi^2}R_m\ln\frac{\sigma}{h}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\omega\left(\frac{2t}{\sigma}\right)\sin t dt\right) + O(1)\omega\left(\frac{1}{\sigma-h}\right), \tag{8}$$

де $R_k = R_k(\overline{\psi}, b) = \sqrt{A_k^2 + B_k^2}$, $A_k = A_k(\overline{\psi}, b) = \sum\limits_{i=1}^{k} b_i\cos\gamma_\sigma^{(i)}$, $B_k = B_k(\overline{\psi}, b) = \sum\limits_{i=1}^{k} b_i\sin\gamma_\sigma^{(i)}$; $\gamma_\sigma^{(i)} = \mathrm{arctg}\frac{\psi_2^{(i)}(\sigma)}{\psi_1^{(i)}(\sigma)}$; $\theta_\omega \in [2/3, 1]$, *причому* $\theta_\omega = 1$, *якщо* $\omega(t)$ *— опуклий модуль неперервності;* $O(1)$ *— величина, яка рівномірно обмежена щодо* σ, h.

Доведення. В [9] показано, що для дійсних $\sigma > h \ge 1$ в кожній точці $x \in \mathbb{R}$ виконується рівність

$$\rho_{\sigma,h}(f;x) = \frac{-|\overline{\psi}(\sigma)|}{\pi}\int\limits_{a/\sigma\le|t|\le\pi/h}\delta(x+t)\frac{\sin(\sigma t - \gamma_\sigma)}{t}\,dt +$$

$$+\frac{1}{\pi}\int\limits_{|t|\le a/\sigma}\delta(x+t)\int\limits_{\sigma}^{\infty}\psi_2(s)\sin st\;ds\;dt +$$

$$+O(1)(\sum_{i=1}^{2}(\psi_i(\sigma-h)-\psi_i(\sigma))+|\overline{\psi}(\sigma)|)\zeta(\mathfrak{N}), \qquad (9)$$

де $\delta(x+t)=\begin{cases} f^{\overline{\psi}}(x)-f^{\overline{\psi}}(x+t), & \text{якщо } f\in \widehat{C}^{\overline{\psi}}H_\omega,\\ f^{\overline{\psi}}(x+t), & \text{якщо } f\in \widehat{C}^{\overline{\psi}}_\infty;\end{cases}$

$\gamma_\sigma=\mathrm{arctg}\frac{\psi_2(\sigma)}{\psi_1(\sigma)}$; $\zeta(\mathfrak{N})=\begin{cases} \omega\left(\frac{1}{\sigma-h}\right), & \text{якщо } f\in \widehat{C}^{\overline{\psi}}H_\omega,\\ 1, & \text{якщо } f\in \widehat{C}^{\overline{\psi}}_\infty;\end{cases}$

$O(1)$ — величина, рівномірно обмежена щодо σ, h.

$\forall\psi\in\mathfrak{M}_0$ справедливою є нерівність $\psi(\varepsilon\sigma)\le K\psi(\sigma)$, $0<\varepsilon\le 1$. Тому $\psi(\sigma-h)\le K\psi(\sigma)$, за умови, що $0\le \lim\limits_{\sigma\to\infty}\frac{h}{\sigma}<1$. Приймаючи до уваги цей факт, на підставі співвідношень (5) і (9) одержуємо

$$\Sigma^{(m)}_{\sigma,h}(\varphi,x,\overline{\psi},b)=\frac{-1}{\pi}\int\limits_{a/\sigma\le|t|\le\pi/h}\frac{\delta(x+t)}{t}\sum_{i=1}^{m}b_i\sin(\sigma t-\gamma^{(i)}_\sigma)\;dt+$$

$$+\frac{1}{\pi}\int\limits_{|t|\le a/\sigma}\delta(x+t)\int\limits_{\sigma}^{\infty}\sum_{i=1}^{m}\frac{b_i\psi_2^{(i)}(s)}{|\overline{\psi}^{(i)}(\sigma)|}\sin st\;ds\;dt+O(1)\zeta(\mathfrak{N}), \qquad (10)$$

де $\gamma^{(i)}_\sigma=\mathrm{arctg}(\psi_2^{(i)}(\sigma)/\psi_1^{(i)}(\sigma))$.

Нехай, далі $R_k=R_k(\overline{\psi},b)=\sqrt{A_k^2+B_k^2}$;
$A_k=A_k(\overline{\psi},b)=\sum\limits_{i=1}^{k}b_i\cos\gamma^{(i)}_\sigma$, $B_k=B_k(\overline{\psi},b)=\sum\limits_{i=1}^{k}b_i\sin\gamma^{(i)}_\sigma$. Тоді

$$\sum_{i=1}^{m}b_i\sin(\sigma t-\gamma^{(i)}_\sigma)=A_m\sin\sigma t-B_m\cos\sigma t=R_m\sin(\sigma t-\alpha_m), \quad (11)$$

де $\alpha_m=\begin{cases}\mathrm{arctg}\frac{B_m}{A_m}, & A_m\ne 0,\\ \frac{\pi}{2}, & A_m=0.\end{cases}$ Згідно з рівностями (10)–(11)

$$\Sigma^{(m)}_{\sigma,h}(\varphi,x,\overline{\psi},b)=\frac{-R_m}{\pi}\int\limits_{a/\sigma\le|t|\le\pi/h}\frac{\delta(x+t)}{t}\sin(\sigma t-\alpha_m)\;dt+$$

$$+\frac{1}{\pi}\int\limits_{|t|\le a/\sigma}\delta(x+t)\int\limits_{\sigma}^{\infty}\sum_{i=1}^{m}\frac{b_i\psi_2^{(i)}(s)}{|\overline{\psi}^{(i)}(\sigma)|}\sin st\ ds\ dt+O(1)\zeta(\mathfrak{N}). \qquad (12)$$

Зазначимо, що, оскільки множини S_∞ і H_ω інваріантні щодо зсуву аргументу, то величина (6) не залежить від значення x. Таким чином

$$\Sigma_{\sigma,h}^{(m)}(\mathfrak{N};\overline{\psi};b)=\sup_{\varphi\in\mathfrak{N}}\left|\sum_{i=1}^{m}\frac{b_i}{\overline{\psi}^{(i)}(\sigma)}\rho_{\sigma,h}(I^{\overline{\psi}^{(i)}}(\varphi;0))\right|. \qquad (13)$$

Враховуючи рівності (6), (12)–(13) одержуємо

$$\Sigma_{\sigma,h}^{(m)}(S_\infty;\overline{\psi};b)\le\sup_{\varphi\in S_\infty}\left|\frac{-R_m}{\pi}\int\limits_{a/\sigma\le|t|\le\pi/h}\frac{\delta(t)}{t}\sin(\sigma t-\alpha_m)\ dt+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{\pi}\int\limits_{|t|\le a/\sigma}\delta(t)\int\limits_{\sigma}^{\infty}\sum_{i=1}^{m}\frac{b_i\psi_2^{(i)}(s)}{|\overline{\psi}^{(i)}(\sigma)|}\sin st\ ds\ dt\right|+O(1)\le$$

$$\le\frac{R_m}{\pi}\int\limits_{a/\sigma\le|t|\le\pi/h}\left|\frac{\sin(\sigma t-\alpha_m)}{t}\right|\ dt+$$

$$+\frac{1}{\pi}\int\limits_{|t|\le a/\sigma}\left|\int\limits_{\sigma}^{\infty}\sum_{i=1}^{m}\frac{b_i\psi_2^{(i)}(s)}{|\overline{\psi}^{(i)}(\sigma)|}\sin st\ ds\right|\ dt+O(1). \qquad (14)$$

Далі спростимо вигляд правої частини рівності (14). Функція

$$K_\sigma(t)=\int\limits_{\sigma}^{\infty}\sum_{i=1}^{m}\frac{b_i\psi_2^{(i)}(s)}{|\overline{\psi}^{(i)}(\sigma)|}\sin st\ ds$$

неперервна і $K_\sigma(0)=0$. Отже, в деякому околі $(0,a_0)$ вона зберігає знак (або дорівнює нулю). Тому, поклавши $a=a_0$ і враховуючи, що функція $K_\sigma(t)$ не парна, зі співвідношення (14) випливає

$$\Sigma_{\sigma,h}^{(m)}(S_\infty;\overline{\psi};b)\le\frac{R_m}{\pi}\int\limits_{a/\sigma\le|t|\le\pi/h}\left|\frac{\sin(\sigma t-\alpha_m)}{t}\right|\ dt+$$

$$+\frac{2}{\pi}\int\limits_{0}^{a_0/\sigma}|K_\sigma(t)|\ dt+O(1). \quad (15)$$

Нехай ([10, стор. 232]),

$$x_k=\frac{k\pi+\alpha_m}{\sigma}, t_k=x_k-\frac{\pi}{2\sigma}, k=0,\pm1,\pm2,\ldots,\alpha_m\in\mathbb{R},\sigma\in\mathbb{R}. \quad (16)$$

Через k_0 позначимо те значення k, для якого t_{k_0} є найближчою праворуч від точки $(a+\pi)/\sigma$ точка, в якій $\sin(\sigma t-\alpha_m)=1$, а через k_1 — найбільше зі значень k таких, що $t_k<\pi/h$. Далі через k_2 позначимо таке число, що точка t_{k_2} буде найближчою ліворуч від точки $-(a+\pi)/\sigma$ серед тих, у яких $\sin(\sigma t-\alpha_m)=-1$, а через k_3 — найменше зі значень, які задовольняють умову $t_k>-\pi/h$, і покладемо

$$l_{\sigma,h}(t)=x_k,\ t\in[t_k,t_{k+1}],\ k=k_0,\ldots,k_1-1,$$

$$k=k_3,k_3+1,\ldots,k_2-1, i_{3,1}=[t_{k_3},t_{k_2}]\cup[t_{k_0},t_{k_1}]. \quad (17)$$

Міркуючи, як і під час доведення аналогічної леми 5.4.7 роботи [10, стор. 232–234], нескладно переконатися, що має місце

Лема 1. *Нехай a — довільне число, $\alpha_m\in\mathbb{R}$ і $\sigma>h\geq1$. Тоді якщо $\varphi\in S_\infty$, то в кожній точці $x\in\mathbb{R}$ виконується рівність*

$$\int\limits_{a/\sigma\leq|t|\leq\pi/h}\varphi(t)\frac{\sin(\sigma t-\alpha_m)}{t}\ dt=\int\limits_{i_{3,1}}\varphi(t)\frac{\sin(\sigma t-\alpha_m)}{l_{\sigma,h}(t)}\ dt+O(1), \quad (18)$$

якщо $\varphi\in H_\omega$, то для всіх $x\in\mathbb{R}$ виконується рівність

$$\int\limits_{a/\sigma\leq|t|\leq\pi/h}(\varphi(0)-\varphi(t))\frac{\sin(\sigma t-\alpha_m)}{t}\ dt=$$

$$=\int\limits_{i_{3,1}}(\varphi(0)-\varphi(t))\frac{\sin(\sigma t-\alpha_m)}{l_{\sigma,h}(t)}\ dt+O(1)\omega\left(\frac{1}{\sigma}\right). \quad (19)$$

У рівностях (18) – (19) проміжок $i_{3,1}$ та функція $l_{\sigma,h}(t)$ означені в (17), $O(1)$ — величини, рівномірно обмежені щодо σ.

З рівностей (15) та (18) випливає, що

$$\Sigma_{\sigma,h}^{(m)}(S_\infty;\overline{\psi};b) \leq \frac{R_m}{\pi}\int\limits_{i_{3,1}}\left|\frac{\sin(\sigma t-\alpha_m)}{l_{\sigma,h}(t)}\right|dt+\frac{2}{\pi}\int\limits_0^{a_0/\sigma}|K_\sigma(t)|\,dt+O(1). \tag{20}$$

Покладемо $\varphi_\sigma(t)=\begin{cases}\operatorname{sign}\int\limits_0^{a_0/\sigma}|K_\sigma(t)|\ dt, & |t|\leq\frac{a_0}{\sigma},\\ \operatorname{sign}\frac{\sin(\sigma t-\gamma_\sigma)}{l_{\sigma,h}(t)}, & t\in i_{3,1}\end{cases}$
і через $\varphi^*(t)$ позначимо функцію з S_∞, яка співпадає на множині $[-a_0/\sigma;a_0/\sigma]\cup i_{3,1}$ із функцією $\varphi_\sigma(t)$. Функція $\varphi^*(t)$ завжди буде існувати і для неї значення $\Sigma_{\sigma,h}^{(m)}(S_\infty;\overline{\psi};b)$ буде в точності збігатися з правою частиною (20). А з цього випливає, що у співвідношенні (20) строгої нерівності бути не може, отже,

$$\Sigma_{\sigma,h}^{(m)}(S_\infty;\overline{\psi};b) = \frac{R_m}{\pi}\int\limits_{i_{3,1}}\left|\frac{\sin(\sigma t-\alpha_m)}{l_{\sigma,h}(t)}\right|\ dt+\frac{2}{\pi}\int\limits_0^{a_0/\sigma}|K_\sigma(t)|\ dt+O(1). \tag{21}$$

У роботі [10, стор.236] одержано співвідношення (5.5.4) й (5.5.5):

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_{|t|\leq\frac{a}{\sigma}}\left|\int\limits_\sigma^\infty\psi_2(s)\sin st\ ds\right|\ dt=\frac{2}{\pi}\int\limits_\sigma^\infty\frac{|\psi_2(t)|}{t}\ dt+O(1),$$

$$\int\limits_{i_{3,1}}\left|\frac{\sin(\sigma t-\gamma_\sigma)}{l_{\sigma,h}(t)}\right|\ dt=\frac{4}{\pi}\ln\frac{\sigma}{h}+O(1),$$

під час доведення яких періодичність функції $f(\cdot)$ і включення $\sigma\in\mathbb{N}$ не використовувались. Тому

$$\Sigma_{\sigma,h}^{(m)}(S_\infty;\overline{\psi};b)=\frac{4}{\pi^2}R_m\ln\frac{\sigma}{h}+\frac{2}{\pi}\left|\sum_{i=1}^m\frac{b_i}{|\overline{\psi}^{(i)}(\sigma)|}\int\limits_\sigma^\infty\frac{\psi_2^{(i)}(t)}{t}\ dt\right|+O(1). \tag{22}$$

Розглянемо далі випадок, коли $\varphi \in H_\omega$. Згідно з рівностями (12) і (19)

$$\Sigma^{(m)}_{\sigma,h}(H_\omega;\overline{\psi};b) \le \sup_{\varphi\in H_\omega}\Bigg| \frac{-R_m}{\pi}\int\limits_{i_{3,1}}(\varphi(t)-\varphi(0))\frac{\sin(\sigma t-\alpha_m)}{t}\,dt+$$

$$+\frac{1}{\pi}\int\limits_{|t|\le a/\sigma}(\varphi(t)-\varphi(0))\int\limits_{\sigma}^{\infty}\sum_{i=1}^{m}\frac{b_i\psi_2^{(i)}(s)}{|\overline{\psi}(\sigma)|}\sin st\;ds\;dt\Bigg| + O(1)\omega\left(\frac{1}{\sigma-h}\right).$$

Аналогічно до того, як в [9] було одержано співвідношення (8), знайдемо

$$\Sigma^{(m)}_{\sigma,h}(H_\omega;\overline{\psi};b) \le \frac{R_m}{\sigma\pi}\int\limits_{0}^{\pi/2}\omega(\frac{2t}{\sigma})\sin t\;dt\left(\sum_{k=k_3}^{k_2-1}\frac{1}{|x_k|}+\sum_{k=k_1-1}^{k_0}\frac{1}{x_k}\right)+$$

$$+\frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{a_0/\sigma}\omega(2t)\int\limits_{\sigma}^{\infty}\sum_{i=1}^{m}\frac{b_i\psi_2^{(i)}(s)}{|\overline{\psi}^{(i)}(\sigma)|}\sin st\;ds\;dt + O(1)\omega\left(\frac{1}{\sigma-h}\right). \qquad (23)$$

Далі, наслідуючи монографію [10, стор. 240], означимо функцію $\widehat{\varphi} \in H_\omega$, для якої значення $\Sigma^{(m)}_{\sigma,h}(H_\omega;\overline{\psi};b)$ співпадає із правою частиною (23). Нехай

$$\varphi_k(t) = \begin{cases} \frac{1}{2}\omega(2(x_k-t)), & t\in[t_k;x_k],\\ -\frac{1}{2}\omega(2(t-x_k)), & t\in[x_k;t_{k+1}],\end{cases}$$

$k=\overline{k_3,k_2-1}$, $k=\overline{k_0,k_1-1}$, де числа x_k та t_k означені у співвідношенні (16). Покладемо

$$\varphi_+(t) = (-1)^{k-k_0}\varphi_k(t) - \frac{1}{2}\left(\omega\left(\pi/\sigma\right)-\omega\left(2a_0/\sigma\right)\right),\ t\in[t_k;t_{k+1}],$$

$k=\overline{k_0,k_1-1}$.

$$\varphi_-(t) = (-1)^{k-k_2+1}\varphi_k(t) + \frac{1}{2}\left(\omega\left(\pi/\sigma\right)-\omega\left(2a_0/\sigma\right)\right),\ t\in[t_k;t_{k+1}],$$

$k = \overline{k_3, k_2 - 1}$.

$$\widehat{\varphi}(t) = \begin{cases} \frac{1}{2}\omega(2|t|), & |t| \le \frac{a_0}{\sigma}, \\ \frac{1}{2}\omega(2a_0/\sigma), & t \in [a_0/\sigma, t_{k_0}], \\ \varphi_+(t), & t \in [t_{k_0}; t_{k_1}], \\ -\frac{1}{2}\omega(2a_0/\sigma), & t \in [t_{k_2}; -a_0/\sigma], \\ \varphi_-(t), & t \in [t_{k_3}; t_{k_2}]. \end{cases}$$

Функція $\widehat{\varphi}(t)$ і буде шукана екстремальна функція, оскільки, якщо $\omega(t)$ — опуклий модуль неперервності, то $\widehat{\varphi}(t) \in H_\omega$ і, як показують безпосередні підрахунки, для функції $\widehat{\varphi}(t)$ співвідношення (23) буде рівністю. Якщо ж $\omega(t)$ — довільний модуль неперервності, то співвідношення (23) буде рівністю з деяким множником $\Theta_\omega \in [2/3; 1]$.

Оскільки

$$\sum_{k=k_3}^{k_2-1} \frac{1}{|x_k|} + \sum_{k=k_0}^{k_1-1} \frac{1}{x_k} = \sigma\left(\frac{2}{\pi}\ln\frac{\sigma}{h} + O(1)\right),$$

то нескладно переконатися у справедливості рівності

$$\Sigma_{\sigma,h}^{(m)}(H_\omega; \overline{\psi}; b) = \Theta_\omega \left(\frac{1}{\pi}\int\limits_0^1 \omega\left(\frac{2t}{\sigma}\right) \sum_{i=1}^m \frac{b_i}{|\overline{\psi}^{(i)}(\sigma)|} \int\limits_1^\infty \psi_2^{(i)}(\sigma s) \times \right.$$

$$\left. \times \sin st ds dt + \frac{2}{\pi^2} R_m \ln\frac{\sigma}{h} \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \omega\left(\frac{2t}{\sigma}\right) \sin t dt \right) + O(1)\omega\left(\frac{1}{\sigma - h}\right). \quad (24)$$

Отже, теорему 1 доведено.

Нехай $\psi_2^{(i)} \in \mathfrak{A}_C$, $i = \overline{1, m}$. Тоді, користуючись оцінкою (5.3.4) роботи [7, стор. 214], бачимо, що

$$\left|\sum_{i=1}^m \frac{b_i}{|\overline{\psi}^{(i)}(\sigma)|} \int\limits_\sigma^\infty \frac{|\psi_2^{(i)}(t)|}{t}\, dt\right| = O(1). \quad (25)$$

У [10, стор. 216] при $\sigma \in \mathbb{N}$ наведено співвідношення (5.3.11):

$$\frac{1}{\pi}\left|\int\limits_0^1 \omega\left(\frac{2t}{\sigma}\right)\int\limits_\sigma^\infty \psi_2(\sigma s)\sin st\; ds\; dt\right| = O(1)\omega\left(\frac{1}{\sigma}\right)\int\limits_\sigma^\infty \frac{|\psi_2(s)|}{s}\; ds. \quad (26)$$

Зі співвідношень (25)–(26) та теореми 1 одержуємо

Наслідок 1. *Нехай* $\psi_1^{(i)} \in \mathfrak{A}_0$, $\psi_2^{(i)} \in \mathfrak{A}_C$, $i = \overline{1,m}$, $0 \le \Theta < 1$. *Тоді для* $\sigma > h \ge 1$ *при* $\sigma \to \infty$

$$\Sigma_{\sigma,h}^{(m)}(S_\infty;\overline{\psi};b) = \frac{4}{\pi^2}R_m \ln\frac{\sigma}{h} + O(1),$$

$$\Sigma_{\sigma,h}^{(m)}(H_\omega;\overline{\psi};b) = \frac{2\Theta_\omega}{\pi^2}R_m \ln\frac{\sigma}{h}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \omega\left(\frac{2t}{\sigma}\right)\sin t\; dt + O(1)\omega\left(\frac{1}{\sigma - h}\right),$$

де $\Theta_\omega \in [2/3;1]$, *причому* $\Theta_\omega = 1$, *якщо* $\omega(t)$ *— опуклий модуль неперервності і* $O(1)$ *— величина, рівномірно обмежена щодо* σ, h.

1. *Stepanets A.I., Wang Kunyang, Zhang Xirong.* Approximation of locally integrable function on the real line // Укр. мат. журн. — 1999. — **51,** №11. — С. 1549–1561.
2. *Степанец А.И.* Методы теории приближений: В 2 т. — Киев: Ин-т математики НАН Украины, 2002. — Т.2. — 468 с.
3. *Степанец А.И.* Приближение операторами Фурье функций, заданных на действительной оси // Укр. мат. журн. — 1988. — **40,** №2. – С. 198 – 209.
4. *Степанец А.И.* Приближение в пространствах локально интегрируемых функций // Укр. мат. журн. — 1994. — **46,** №5. — С. 597 – 625.
5. *Степанец А.И.* Скорость сходимости рядов Фурье на классах $\overline{\psi}$−интегралов // Укр. мат. журн. — 1997. — **49,** №8. — С. 1069 – 1113.
6. *Степанец А.И., Дрозд В.В.* Одновременное приближение функций и их производных операторами Фурье в равномерной метрике // Одновременное приближение функций и их производных операторами Фурье. — Киев, 1989. — 59с. — (препр./ АН УССР. Ин-т математики; 89.17).
7. *Степанец А.И.* Классификация и приближение периодических функций. — Киев: Наук. думка, 1987. — 268 с.
8. *Рукасов В.И., Чайченко С.О.* Приближение ψ−интегралов периодических функций в равномерной и интегральной метриках // Екстремальні задачі теорії функцій та суміжні питання. — Київ, 2003. — С. 156 – 191. — (Праці Ін-ту математики НАН України; Т. 36).

9. *Рукасов В.И., Силин Е.С.* Приближение непрерывных функций небольшой гладкости операторами Валле Пуссена. // Укр. мат. журн. — 2005. — **57**, №3, — С. 394 -400.
10. *Степанец А.И.* Методы теории приближений: В 2 т. — Киев: Ин-т математики НАН Украины, 2002. — Т.1. — 426 с.

Отримано 01.09.2010

Слав'янський державний педагогічний університет
evgen-silin@meta.ua

УДК 517.9

©2010. **Чуйко С.М., Чуйко Ан.С.**

Периодическая задача для уравнения типа Хилла

Використовуючи метод найменших квадратів, побудовано нову ітераційну техніку для знаходження розв'язків автономної періодичної задачі для рівняння типу Хілла в критичному випадку у вигляді розвинення в узагальнений поліном Фур'є в околі породжуючого розв'язку.

Using the least squares method there was constructed a new iteration algorithm for the solution of autonomous periodical boundary value problem for a differential equations of the Hill type in critical case in the way of expanding Fourier's polynomial in the neighborhood of the generalizing solution.

1. Постановка задачи. Исследована задача о построении решений

$$y(t,\varepsilon): \ y(\cdot,\varepsilon) \in C^2[0,T_1(\varepsilon)], \ T_1(0) = 2\pi, \ y(t,\cdot) \in C[0,\varepsilon_0]$$

автономной периодической задачи для уравнения типа Хилла [1], [2, с. 315]

$$\frac{d^2y}{dt^2}+y = \varepsilon\cdot Y(y,\varepsilon), \ y(0,\varepsilon)-y(T_1(\varepsilon),\varepsilon) = 0, \ \frac{dy(0,\varepsilon)}{dt}-\frac{dy(T_1(\varepsilon),\varepsilon)}{dt} = 0. \tag{1}$$

Решение задачи (1) ищем в малой окрестности нетривиального периодического решения $y_0(t), \ y_0(\cdot) \in C^2[0,2\pi]$ порождающей задачи

$$\frac{d^2y_0}{dt^2} + y_0 = 0, \ y_0(0) - y_0(2\pi) = 0, \ \frac{dy_0(0)}{dt} - \frac{dy_0(2\pi)}{dt} = 0. \tag{2}$$

Здесь $Y(y,\varepsilon)$ – нелинейная скалярная функция, непрерывно дифференцируемая по неизвестной y в малой окрестности решения порождающей задачи и непрерывно дифференцируемая по малому

Работа выполнена при финансовой поддержке Фонда фундаментальных исследований Германии (DFG; номер регистрации GZ:436UKR 13/103/0-1) и Государственного Фонда фундаментальных исследований Украины (номер государственной регистрации 0109U000381).

параметру ε на отрезке $[0, \varepsilon_0]$. Существенным отличием автономной задачи (1) от аналогичной неавтономной периодической задачи также является тот факт, что любое решение $z(t, \varepsilon)$ задачи (1) существует наряду с целой серией решений $z(t+h, \varepsilon)$, отличающихся от исходного сдвигом по независимой переменной. Этот факт позволяет зафиксировать начало отсчета независимой переменной таким образом, чтобы решение порождающей задачи (2) стало однопараметричным, например $y_0(t) = \hat{c} \cdot \cos t, \ \hat{c} \in \mathbb{R}^1$, при этом периодические решения задачи (1), соответствующие синусам в порождающем решении могут быть получены простым смещением начального момента времени [3, с. 148].

Согласно традиционной классификации периодических краевых задач поставленная задача для уравнения (1) является критической [3, 4]. Для произвольной функции $f(t), \ f(\cdot) \in C[0, 2\pi]$ периодическая задача

$$\frac{d^2 y_0}{dt^2} + y_0 = f(t), \ y_0(0) - y_0(2\pi) = 0, \ \frac{dy_0(0)}{dt} - \frac{dy_0(2\pi)}{dt} = 0. \quad (3)$$

разрешима тогда и только тогда, когда

$$\int_0^{2\pi} \begin{bmatrix} \cos s \\ \sin s \end{bmatrix} f(s) \, ds = 0; \quad (4)$$

в этом случае при соответствующей фиксации начала отсчета независимой переменной общее решение задачи (3) имеет вид

$$y_0(t, \hat{c}) = \hat{c} \cdot \cos t + g\Big[f(s)\Big](t), \ \hat{c} \in \mathbb{R}^1;$$

здесь

$$g\Big[f(s)\Big](t) = \int_0^t \sin(t-s) f(s) \, ds$$

оператор Грина задачи (3). Представим период искомого решения задачи (1)

$$T_1(\varepsilon) = 2\pi\Big(1 + \varepsilon\beta(\varepsilon)\Big)$$

через новую неизвестную $\beta(\varepsilon) \in C[0, \varepsilon_0]$. Величина $\beta(\varepsilon),\ \beta(0) := \beta^*$ подлежит определению в процессе нахождения решения задачи (1). Совершая в задаче (1) замену независимой переменной [3]

$$t = \tau\Big(1 + \varepsilon\beta(\varepsilon)\Big), \tag{5}$$

приходим к задаче об отыскании решения

$$y(\tau, \varepsilon):\ y(\cdot, \varepsilon) \in C^2[0, 2\pi],\ y(\tau, \cdot) \in C[0, \varepsilon_0]$$

периодической задачи

$$\frac{d^2 y(\tau, \varepsilon)}{d\tau^2} + y(\tau, \varepsilon) = \varepsilon\Big(1 + \varepsilon\beta(\varepsilon)\Big)^2 \times$$

$$\times Y(y(\tau, \varepsilon), \varepsilon) - \varepsilon\beta(\varepsilon)\Big(2 + \varepsilon\beta(\varepsilon)\Big) \cdot y(\tau, \varepsilon), \tag{6}$$

$$y(0, \varepsilon) - y(2\pi, \varepsilon) = 0,\ \frac{dy(0, \varepsilon)}{d\tau} - \frac{dy(2\pi, \varepsilon)}{d\tau} = 0. \tag{7}$$

2. Необходимое условие существования решения.
Условие разрешимости краевой задачи (6), (7)

$$\int_0^{2\pi} \begin{bmatrix} \cos s \\ \sin s \end{bmatrix} \Bigg\{\Big(1 + \varepsilon\beta(\varepsilon)\Big)^2 \cdot Y(y(s, \varepsilon), \varepsilon) -$$

$$-\beta(\varepsilon)\Big(2 + \varepsilon\beta(\varepsilon)\Big) \cdot y(s, \varepsilon)\Bigg\}\, ds = 0 \tag{8}$$

приводит к уравнению для порождающих амплитуд задачи (6), (7)

$$F(\hat{c}, \beta) := \int_0^{2\pi} \begin{bmatrix} \cos s \\ \sin s \end{bmatrix} \Bigg\{Y(y_0(s, \hat{c}), 0) - 2 \cdot \beta \cdot y_0(s, \hat{c})\Bigg\}\, ds = 0. \tag{9}$$

Лемма. *Если краевая задача (1) имеет решение, при* $\varepsilon = 0$ *обращающееся в порождающее* $y_0(t, \hat{c}^*) = \hat{c^*} \cdot \cos t$, *то вектор* c^* *удовлетворяет уравнению*

$$F(c^*) = 0,\ c^* = \mathrm{col}\ \Big(\hat{c^*},\ \beta^*\Big) \in \mathbb{R}^2.$$

Предположим, что уравнение для порождающих амплитуд (9) имеет действительные корни. Фиксируя одно из решений

$$c^* = \mathrm{col}\left(\hat{c^*},\ \beta^*\right) \in \mathbb{R}^2$$

уравнения (9), приходим к задаче об отыскании решения задачи (1), (2)

$$y(\tau, \varepsilon) = y_0(\tau, \hat{c^*}) + x(\tau, \varepsilon)$$

в окрестности порождающего решения $y_0(\tau, \hat{c^*}) = \hat{c^*} \cdot \cos\tau$. Обозначим $(2 \times 2)-$ мерную матрицу

$$B_0 = \frac{\partial F(\hat{c}, \beta)}{\partial(\hat{c}, \beta)}\Bigg|_{\substack{\hat{c} \ = \hat{c}^*, \\ \beta \ = \beta^*}} .$$

В случае простых ($\det B_0 \neq 0$) корней уравнения для порождающих амплитуд (9) краевая задача (1), (2) имеет единственное решение [3, 5], при $\varepsilon = 0$ обращающееся в порождающее $y_0(t, \hat{c}^*) = \hat{c^*} \cdot \cos t$. Данный критический случай назван критическим случаем первого порядка [3, 5, 6, 7, 8, 9]. Менее изученным является случай [10, 11, 12] кратных корней ($\det B_0 = 0$) уравнения (9); при этом согласно традиционной классификации периодических краевых задач поставленная задача для уравнения (1) не может быть отнесена к критическому случаю второго или более высокого порядка [6, 7], а также к особому критическому случаю, поскольку уравнение для порождающих амплитуд не обращается в тождество [13, 14].

При наличии кратных корней уравнения для порождающих амплитуд (9), оставляя только одну линейно-независимую строку уравнения (9), получаем эквивалентное условие разрешимости исходной задачи (1)

$$F_\rho(\hat{c}, \beta) := \int_0^{2\pi} H_\rho(s)\left\{Y(y_0(s, \hat{c}), 0) - 2 \cdot \beta \cdot y_0(s, \hat{c})\right\} ds = 0; \quad (10)$$

здесь $H_\rho(t) = \cos t$, либо $H_\rho(t) = \sin t$, в зависимости от нелинейности $Y(y, \varepsilon)$ задачи (1). Предположим, что матрица B_0 имеет ненулевые элементы: $B_0 \neq 0$. В статье [15] рассмотрен случай кратных корней уравнения для порождающих амплитуд (9); при условии

$$\left.\frac{\partial F_\rho(\hat c, \beta)}{\partial \hat c}\right|_{\substack{\hat c\ = \hat c^*,\\ \beta\ = \beta^*}} \equiv 0, \quad \left.\frac{\partial F_\rho(\hat c, \beta)}{\partial \beta}\right|_{\substack{\hat c\ = \hat c^*,\\ \beta\ = \beta^*}} \neq 0$$

общее решение зависит от функции $\beta(\varepsilon) \in C[0, \varepsilon_0]$, $\beta(0) = \beta^*$, которая однозначно определяется в процессе построения решения.

Нами с О. Пирус предложен пример [16] автономной краевой задачи (1), (2) в случае кратных корней уравнения для порождающих амплитуд (9); при условии

$$\left.\frac{\partial F_\rho(\hat c, \beta)}{\partial \hat c}\right|_{\substack{\hat c\ = \hat c^*,\\ \beta\ = \beta^*}} \neq 0, \quad \left.\frac{\partial F_\rho(\hat c, \beta)}{\partial \beta}\right|_{\substack{\hat c\ = \hat c^*,\\ \beta\ = \beta^*}} \equiv 0$$

общее решение зависит от произвольной функции $\beta(\varepsilon) \in C[0, \varepsilon_0]$, $\beta(0) = \beta^*$, которая может быть принята за нуль.

Предметом исследования данной статьи является случай кратных ($\det B_0 = 0$) корней уравнения для порождающих амплитуд (9) при условии, что

$$\left.\frac{\partial F_\rho(\hat c, \beta)}{\partial \hat c}\right|_{\substack{\hat c\ = \hat c^*,\\ \beta\ = \beta^*}} \neq 0, \quad \left.\frac{\partial F_\rho(\hat c, \beta)}{\partial \beta}\right|_{\substack{\hat c\ = \hat c^*,\\ \beta\ = \beta^*}} \neq 0.$$

Назовем этот случай частным критическим случаем; его особенностью является наличие кратных ($\det B_0 = 0$) корней уравнения для порождающих амплитуд (10), вызванное зависимостью между этими корнями. Основным отличием частного критического случая от критического случая второго или более высокого порядка

[10, 11, 12] является невозможность выделения единственного периодического решения даже при выполнении определенных условий существования этого решения.

Пример. *Частный критический случай имеет место в задаче о нахождении периодического решения*

$$y(\cdot, \varepsilon) \in C^2[0, T_1(\varepsilon)], \ y(t, \cdot) \in C[0, \varepsilon_0]$$

уравнения Дюффинга [3]

$$y'' + y = \varepsilon \cdot y^3. \tag{11}$$

Действительно, уравнение для порождающих амплитуд (10) в случае задачи о нахождении периодического решения уравнения (11) принимает вид

$$F_\rho(\hat{c}, \beta) := \frac{\pi \hat{c}}{4}\left(3\hat{c}^2 - 8\beta\right) = 0.$$

Корень $\hat{c} = 0$ соответствует тривиальному порождающему решению $y_0(\tau, \hat{c^*}) \equiv 0$, в малой окрестности которого расположено лишь положение равновесия уравнения Дюффинга (11). Серия корней

$$\beta^* = \frac{3(\hat{c}^*)^2}{8}, \ \hat{c}^* \neq 0, \ \hat{c}^* \in \mathbb{R}^1$$

обеспечивает вырожденность ($\det B_0 = 0$) матрицы B_0, ключевой в традиционной схеме исследования периодических краевых задач [5]. Матрица B_0 при этом имеет ненулевые элементы

$$B_0 = \frac{\pi \hat{c}^*}{2} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 3\hat{c}^* & -4 \end{bmatrix} \neq 0;$$

таким образом, задача о нахождении периодического решения уравнения (11) для $\hat{c}^* \neq 0$ представляет частный критический случай.

3. Достаточное условие существования решения.

При наличии кратных корней ($\det B_0 = 0$) уравнения для порождающих амплитуд (10) зафиксируем один из корней $\hat{c}^* \in \mathbb{R}^1$. Искомое решение задачи (6), (7) ищем в виде

$$y(\tau, \varepsilon) = y_0(\tau, \hat{c}^*) + x(\tau, \varepsilon).$$

Для нахождения возмущения

$$x(\cdot, \varepsilon) \in C^2[0, 2\pi], \ x(\tau, \cdot) \in C[0, \varepsilon_0]$$

получаем задачу

$$\frac{d^2x(\tau,\varepsilon)}{d\tau^2} + x(\tau,\varepsilon) = \varepsilon\Big(1+\varepsilon\beta(\varepsilon)\Big)^2 \cdot Y(y_0(\tau,\hat{c}^*) + x(\tau,\varepsilon),\varepsilon) - \qquad (12)$$

$$-\varepsilon\beta(\varepsilon)\Big(2+\varepsilon\beta(\varepsilon)\Big)\cdot\Big(y_0(\tau,\hat{c}^*)+x(\tau,\varepsilon)\Big) - \frac{d^2y_0(\tau,\hat{c}^*)}{dt^2} + y_0(\tau,\hat{c}^*),$$

$$x(0,\varepsilon) - x(2\pi,\varepsilon) = 0, \ \frac{dx(0,\varepsilon)}{d\tau} - \frac{dx(2\pi,\varepsilon)}{d\tau} = 0. \qquad (13)$$

Решение задачи (12), (13)

$$x(\tau,\varepsilon) = g\Bigg[\varepsilon\Big(1+\varepsilon\beta(\varepsilon)\Big)^2 \cdot Y(y_0(s,\hat{c}^*) + x(s,\varepsilon),\varepsilon) -$$

$$-\varepsilon\beta(\varepsilon)\Big(2+\varepsilon\beta(\varepsilon)\Big)\cdot\Big(y_0(s,\hat{c}^*)+x(s,\varepsilon)\Big) - \frac{d^2y_0(s,\hat{c}^*)}{ds^2} - y_0(s,\hat{c}^*)\Bigg](\tau)$$

зависит от выбора корня $\hat{c}^* \in \mathbb{R}^1$. Предположим, что порождающее решение $y_0(\tau, \hat{c^*})$ не является искомым решением [1] задачи (1). Используя непрерывную дифференцируемость по $y(\tau,\varepsilon)$ функции

[1]Пример подобной ситуации приведен академиком НАН Украины Н.А. Перестюком.

$Y(y(\tau,\varepsilon),\varepsilon)$ в окрестности порождающего решения $y_0(\tau,\hat{c^*})$ и непрерывную дифференцируемость по второму аргументу в малой положительной окрестности нуля, разлагаем эту функцию в окрестности точек $x(\tau,\varepsilon)=0$ и $\varepsilon=0:$

$$Y(y_0(\tau,\hat{c^*})+x(\tau,\varepsilon),\varepsilon)=Y(y_0(\tau,\hat{c^*}),0)+$$

$$+\mathcal{A}_1\Big(y_0(\tau,\hat{c^*})\Big)x(\tau,\varepsilon)+\varepsilon\mathcal{A}_2\Big(y_0(\tau,\hat{c^*})\Big)+\mathcal{R}(y_0(\tau,\hat{c^*})+x(\tau,\varepsilon),\varepsilon),$$

где

$$\mathcal{A}_1\Big(y_0(\tau,\hat{c^*})\Big)=\frac{\partial Y(y(\tau,\varepsilon),\varepsilon)}{\partial y}\Bigg|_{\begin{array}{l} y \ = \ y_0(\tau,\hat{c^*}), \\ \varepsilon \ = \ \ 0 \end{array}},$$

$$\mathcal{A}_2\Big(y_0(\tau,\hat{c^*})\Big)=\frac{\partial Y(y(\tau,\varepsilon),\varepsilon)}{\partial \varepsilon}\Bigg|_{\begin{array}{l} y \ = \ y_0(\tau,\hat{c^*}), \\ \varepsilon \ = \ \ 0 \end{array}}.$$

Оставляя только одну линейно-независимую строку в условии разрешимости (8) задачи (6), (7), с учетом равенства (10), получаем эквивалентное условие разрешимости исходной задачи (1), (2)

$$\int_0^{2\pi} H_\rho(s)\Bigg\{\Big(1+\varepsilon\beta(\varepsilon)\Big)^2\cdot Y(y_0(s,\hat{c}^*)+x(s,\varepsilon),\varepsilon)-$$

$$-\beta(\varepsilon)\Big(2+\varepsilon\beta(\varepsilon)\Big)\cdot\Big(y_0(s,\hat{c}^*)+x(s,\varepsilon)\Big)\Bigg\}\,ds=0. \qquad (14)$$

Условие разрешимости (14) устанавливает зависимость между функцией $\beta(\varepsilon)$, малым параметром ε и амплитудой $\hat{c}^*$ порождающего решения $y_0(t,\hat{c}^*)$. Представим функцию $\beta(\varepsilon)$ в виде

$$\beta(\varepsilon)=\beta^*+\bar{\beta}(\varepsilon),\ \bar{\beta}(\varepsilon)\in C[0,\varepsilon_0],\ \bar{\beta}(0)=0.$$

Обозначим константу

$$\mathfrak{B}_\beta=-2\int_0^{2\pi} H_\rho(s)\cdot y_0(s,\hat{c}^*)\ ds.$$

Для нахождения функции $\bar{\beta}(\varepsilon)$ приходим к уравнению

$$\mathfrak{B}_\beta \cdot \bar{\beta}(\varepsilon) = \int_0^{2\pi} H_\rho(s) \Bigg\{ \mathcal{A}_1 \Big(y_0(s, \hat{c^*}) \Big) x(s, \varepsilon) + \varepsilon \mathcal{A}_2 \Big(y_0(\tau, \hat{c^*}) \Big) +$$

$$+\mathcal{R}(y_0(s, \hat{c^*}) + x(s, \varepsilon), \varepsilon) + \varepsilon\beta(\varepsilon) \Big(2 + \varepsilon\beta(\varepsilon) \Big) \cdot Y(y_0(s, \hat{c}^*) + x(s, \varepsilon), \varepsilon) -$$

$$-\beta(\varepsilon) \Big(2 + \varepsilon\beta(\varepsilon) \Big) \cdot x(s, \varepsilon) - \varepsilon\beta^2(\varepsilon) \cdot \Big(y_0(s, \hat{c^*}) + x(s, \varepsilon) \Big) \Bigg\} \, ds.$$

Последнее уравнение при условии $\mathfrak{B}_\beta \neq 0$ имеет единственное решение

$$\bar{\beta}(\varepsilon) = \mathfrak{B}_\beta^{-1} \cdot \int_0^{2\pi} H_\rho(s) \Bigg\{ \mathcal{A}_1 \Big(y_0(s, \hat{c^*}) \Big) x(s, \varepsilon) + \varepsilon \mathcal{A}_2 \Big(y_0(\tau, \hat{c^*}) \Big) +$$

$$+\mathcal{R}(y_0(s, \hat{c^*}) + x(s, \varepsilon), \varepsilon) + \varepsilon\beta(\varepsilon) \Big(2 + \varepsilon\beta(\varepsilon) \Big) \cdot Y(y_0(s, \hat{c}^*) + x(s, \varepsilon), \varepsilon) -$$

$$-\beta(\varepsilon) \Big(2 + \varepsilon\beta(\varepsilon) \Big) \cdot x(s, \varepsilon) - \varepsilon\beta^2(\varepsilon) \cdot \Big(y_0(s, \hat{c^*}) + x(s, \varepsilon) \Big) \Bigg\} \, ds.$$

Таким образом, при наличии кратных корней ($\det B_0 = 0$) уравнения для порождающих амплитуд (10) в случае $\mathfrak{B}_\beta \neq 0$ задача (12), (13) имеет единственное решение, для нахождения которого применима операторная система

$$x(\tau, \varepsilon) = g \Bigg[\varepsilon \Big(1 + \varepsilon\beta(\varepsilon) \Big)^2 \cdot Y(y_0(s, \hat{c}^*) + x(s, \varepsilon), \varepsilon) - \tag{15}$$

$$-\varepsilon\beta(\varepsilon) \Big(2 + \varepsilon\beta(\varepsilon) \Big) \cdot \Big(y_0(s, \hat{c}^*) + x(s, \varepsilon) \Big) - \frac{d^2 y_0(s, \hat{c}^*)}{ds^2} - y_0(s, \hat{c}^*) \Bigg](\tau),$$

$$\bar{\beta}(\varepsilon) = \mathfrak{B}_0^{-1} \cdot \int_0^{2\pi} H_\rho(s) \Bigg\{ \mathcal{A}_1 \Big(y_0(s, \hat{c^*}) \Big) x(s, \varepsilon) + \varepsilon \mathcal{A}_2 \Big(y_0(\tau, \hat{c^*}) \Big) +$$

$$+\mathcal{R}(y_0(s,\hat{c^*})+x(s,\varepsilon),\varepsilon)+\varepsilon\beta(\varepsilon)\Big(2+\varepsilon\beta(\varepsilon)\Big)\cdot Y(y_0(s,\hat{c}^*)+x(s,\varepsilon),\varepsilon)-$$

$$-\beta(\varepsilon)\Big(2+\varepsilon\beta(\varepsilon)\Big)\cdot x(s,\varepsilon)-\varepsilon\beta^2(\varepsilon)\cdot\Big(y_0(s,\hat{c^*})+x(s,\varepsilon)\Big)\Big\}\,ds.$$

Итак, при наличии кратных корней ($\det B_0=0$) уравнения для порождающих амплитуд (10) в случае $\mathfrak{B}_\beta\neq 0$ для построения решения краевой задачи (6), (7) применим метод простых итераций.

Теорема 1. *При наличии кратных* ($\det B_0=0$) *корней уравнения для порождающих амплитуд (10) в случае* $\mathfrak{B}_\beta\neq 0$ *критическая* ($P_{Q^*}\neq 0$) *задача (6), (7) имеет единственное решение, при* $\varepsilon=0$ *обращающееся в порождающее* $y(\tau,0)=y_0(\tau,\hat{c^*})$. *Для построения решения краевой задачи (6), (7) применима итерационная схема*

$$y_{k+1}(\tau,\varepsilon)=y_0(\tau,\hat{c}^*)+x_{k+1}(\tau,\varepsilon),\ \beta_{k+1}(\varepsilon)=\beta^*+\bar{\beta}_{k+1}(\varepsilon), \qquad (16)$$

$$x_{k+1}(\tau,\varepsilon)=g\Bigg[\varepsilon\Big(1+\varepsilon\beta_k(\varepsilon)\Big)^2\cdot Y(y_0(s,\hat{c}^*)+x_k(s,\varepsilon),\varepsilon)-$$

$$-\varepsilon\beta_k(\varepsilon)\Big(2+\varepsilon\beta_k(\varepsilon)\Big)\cdot\Big(y_0(s,\hat{c}^*)+x_k(s,\varepsilon)\Big)-\frac{d^2y_0(s,\hat{c}^*)}{ds^2}-y_0(s,\hat{c}^*)\Bigg](\tau),$$

$$\bar{\beta}_{k+1}(\varepsilon)=\mathfrak{B}_\beta^{-1}\cdot\int_0^{2\pi}H_\rho(s)\Big\{\mathcal{A}_1\Big(y_0(s,\hat{c^*})\Big)x(s,\varepsilon)+\varepsilon\mathcal{A}_2\Big(y_0(\tau,\hat{c^*})\Big)+$$

$$+\mathcal{R}(y_0(s,\hat{c^*})+x_k(s,\varepsilon),\varepsilon)+\varepsilon\beta_k(\varepsilon)\Big(2+\varepsilon\beta_k(\varepsilon)\Big)\cdot Y(y_0(s,\hat{c}^*)+x_k(s,\varepsilon),\varepsilon)-$$

$$-\beta_k(\varepsilon)\Big(2+\varepsilon\beta_k(\varepsilon)\Big)\cdot x_k(s,\varepsilon)-$$

$$-\varepsilon\beta_k^2(\varepsilon)\cdot\Big(y_0(s,\hat{c^*})+x_k(s,\varepsilon)\Big)\Big\}\,ds,\ \dots,\ k=0,1,2,\ \dots\,.$$

Таким образом, в частном критическом случае при выполнении условий доказанной теоремы 1 в окрестности любого порождающего решения $y_0(\tau, \hat{c^*})$ задача (6), (7) имеет единственное решение. Другими словами, каждому из кратных корней уравнения для порождающих амплитуд (10) при выполнении условий теоремы 1 соответствует единственное решение задачи (6), (7), следовательно, в частном критическом случае при выполнении условий теоремы 1 установлено наличие бесконечного множества решений задачи (6), (7), порождаемого бесконечной серией решений $y_0(\tau, \hat{c^*})$ задачи (2).

4. Практический способ построения периодических решений уравнения типа Хилла.

В данном пункте будут построены две модификации итерационной схемы (16); первая — с использованием функции, аналогичной константе $\mathfrak{B}_\beta$, вторая — с использованием метода наименьших квадратов. Обозначим функцию

$$\mathfrak{B}_\beta(\hat{c}^*, \varepsilon) = 2\int_0^{2\pi} H_\rho(s) \cdot \Big[\varepsilon Y(y_0(s, \hat{c}^*) + x(s, \varepsilon), \varepsilon) -$$

$$- y_0(s, \hat{c}^*) - x(s, \varepsilon)\Big]\, ds.$$

Заметим, что для малых значений ε имеет место приближенное равенство

$$\mathfrak{B}_\beta(\hat{c}^*, \varepsilon) \approx \mathfrak{B}_\beta, \ \ \varepsilon \in [0, \varepsilon_0].$$

Используя условие разрешимости (14) для нахождения функции $\beta(\varepsilon)$, получаем уравнение

$$\mathfrak{B}_\beta(\hat{c}^*, \varepsilon) \cdot \beta(\varepsilon) = \int_0^{2\pi} H_\rho(s) \cdot \Bigg\{ \Big(1 + \varepsilon^2\beta^2(\varepsilon)\Big) Y(y_0(s, \hat{c}^*) + x(s, \varepsilon), \varepsilon) -$$

$$- \varepsilon\beta^2(\varepsilon)\Big(y_0(s, \hat{c}^*) + x(s, \varepsilon)\Big)\Bigg\}\, ds,$$

однозначно разрешимое

$$\beta(\varepsilon) = \mathfrak{B}_\beta^{-1}(\hat{c}^*, \varepsilon) \cdot \int_0^{2\pi} H_\rho(s) \cdot \Bigg\{ \Big(1 + \varepsilon^2\beta^2(\varepsilon)\Big) Y(y_0(s, \hat{c}^*) + x(s, \varepsilon), \varepsilon) -$$

$$-\varepsilon\beta^2(\varepsilon)\bigg(y_0(s,\hat{c}^*)+x(s,\varepsilon)\bigg)\bigg\}\,ds$$

в случае $\mathfrak{B}_\beta(\hat{c}^*,\varepsilon)\neq 0$. В силу непрерывности функции малого параметра $\mathfrak{B}_\beta(\hat{c}^*,\varepsilon)$ последнее неравенство в случае $\mathfrak{B}_\beta\neq 0$ имеет место по меньшей мере для достаточно малых значений $\varepsilon\in[0,\varepsilon_0]$. Последовательность приближений

$$\Big\{\beta_j(\varepsilon)\Big\}_{j=0}^{\infty}\longrightarrow\beta(\varepsilon),\ \beta_0(\varepsilon):=\beta^*$$

определяет последовательность независимых переменных

$$\Big\{t_j\Big(\beta_j(\varepsilon)\Big)\Big\}_{j=0}^{\infty}\longrightarrow t\in\Big[0,2\pi\Big(1+\varepsilon\beta(\varepsilon)\Big)\Big],\ t_0\in\Big[0,2\pi\Big(1+\varepsilon\beta^*\Big)\Big].$$

Таким образом, при наличии кратных корней уравнения для порождающих амплитуд (10) в случае $\mathfrak{B}_\beta\neq 0$ задача (12), (13) имеет единственное решение, для нахождения которого применима операторная система

$$x(\tau,\varepsilon)=g\bigg[\varepsilon\Big(1+\varepsilon\beta(\varepsilon)\Big)^2\cdot Y(y_0(s,\hat{c}^*)+x(s,\varepsilon),\varepsilon)- \tag{17}$$

$$-\varepsilon\beta(\varepsilon)\Big(2+\varepsilon\beta(\varepsilon)\Big)\cdot\Big(y_0(s,\hat{c}^*)+x(s,\varepsilon)\Big)-\frac{d^2y_0(s,\hat{c}^*)}{ds^2}-y_0(s,\hat{c}^*)\bigg](\tau),$$

$$\beta(\varepsilon)=\mathfrak{B}_\beta^{-1}(\hat{c}^*,\varepsilon)\cdot\int_0^{2\pi}H_\rho(s)\cdot\bigg\{\Big(1+\varepsilon^2\beta^2(\varepsilon)\Big)Y(y_0(s,\hat{c}^*)+x(s,\varepsilon),\varepsilon)-$$

$$-\varepsilon\beta^2(\varepsilon)\Big(y_0(s,\hat{c}^*)+x(s,\varepsilon)\Big)\bigg\}\,ds.$$

Предположим, что в пределах отрезка $\varepsilon\in[0,\varepsilon_*]\in[0,\varepsilon_0]$ система (17) определяет сжимающий оператор, а также в случае $\mathfrak{B}_\beta\neq 0$ имеет место неравенство

$$\mathfrak{B}_\beta(\hat{c}^*,\varepsilon)\neq 0.$$

Итак, при наличии кратных корней ($\det B_0 = 0$) уравнения для порождающих амплитуд (10) в случае $\mathfrak{B}_\beta \neq 0$ для построения решения краевой задачи (6), (7) применим метод простых итераций.

Теорема 2. *При наличии кратных* ($\det B_0 = 0$) *корней уравнения для порождающих амплитуд (10) в случае* $\mathfrak{B}_\beta \neq 0$ *критическая* ($P_{Q^*} \neq 0$) *задача (6), (7) имеет единственное решение, при* $\varepsilon = 0$ *обращающееся в порождающее* $y(\tau, 0) = y_0(\tau, \hat{c^*})$. *Для построения решения краевой задачи (6), (7) для* $\varepsilon \in [0, \varepsilon_*]$ *применима итерационная схема*

$$y_{k+1}(\tau, \varepsilon) = y_0(\tau, \hat{c}^*) + x_{k+1}(\tau, \varepsilon), \ \beta_{k+1}(\varepsilon) = \beta^* + \bar{\beta}_{k+1}(\varepsilon), \tag{18}$$

$$x_{k+1}(\tau, \varepsilon) = g\Bigg[\varepsilon\Big(1 + \varepsilon\beta_k(\varepsilon)\Big)^2 \cdot Y(y_0(s, \hat{c}^*) + x_k(s, \varepsilon), \varepsilon) -$$

$$-\varepsilon\beta_k(\varepsilon)\Big(2+\varepsilon\beta_k(\varepsilon)\Big)\cdot\Big(y_0(s, \hat{c}^*)+x_k(s, \varepsilon)\Big) - \frac{d^2 y_0(s, \hat{c}^*)}{ds^2} - y_0(s, \hat{c}^*)\Bigg](\tau),$$

$$\beta_{k+1}(\varepsilon) = \mathfrak{B}_\beta^{-1}(\hat{c}^*, \varepsilon) \cdot \int_0^{2\pi} H_\rho(s) \cdot \Bigg\{\Big(1 + \varepsilon^2\beta_k^2(\varepsilon)\Big) Y(y_0(s, \hat{c}^*) +$$

$$+x_k(s, \varepsilon), \varepsilon) - \varepsilon\beta_k^2(\varepsilon)\Big(y_0(s, \hat{c}^*) + x_k(s, \varepsilon)\Big)\Bigg\} ds, \ \dots, \ k = 0, 1, 2, \ \dots .$$

Заметим, что функция $\mathfrak{B}_\beta(\hat{c}^*, \varepsilon) =$ и в отличие от величины $\mathfrak{B}_\beta$ зависит как от малого параметра и выбора амплитуды $\hat{c}^*$ порождающего решения, так и от найденного приближения $y_0(t, \hat{c}^*) + x_k(t, \varepsilon)$.

Известно, что метод простых итераций отличают простота и численная устойчивость, однако построение приближенных решений с применением метода простых итераций связано с быстро увеличивающейся от итерации к итерации сложностью вычислений. Для использования метода наименьших квадратов аналогично [17, 18, 19] введем систему линейно-независимых дважды непрерывно дифференцируемых $2\pi-$ периодических скалярных функций

$$\varphi_1(\tau), \ \varphi_2(\tau), \ \dots, \ \varphi_\mu(\tau), \ \dots .$$

Первое приближение к решению задачи (6), (7)

$$y_1(\tau,\varepsilon) = y_0(\tau,\hat{c}^*) + x_1(\tau,\varepsilon),\ t_0 := \tau\Big(1+\varepsilon\beta^*\Big),\ \tau\in[0,2\pi]$$

определим, как решение краевой задачи

$$\frac{d^2x_1(\tau,\varepsilon)}{d\tau^2} + \Big(1+\varepsilon\beta^*\Big)^2\cdot x_1(\tau,\varepsilon) == \varepsilon\Big(1+\varepsilon\beta^*\Big)^2\times \tag{19}$$

$$\times\Big\{Y(y_0(\tau,\hat{c}^*),0) + \mathcal{A}_1\Big(y_0(\tau,\hat{c}^*)\Big)x_1(\tau,\varepsilon) + \varepsilon\mathcal{A}_2\Big(y_0(\tau,\hat{c}^*)\Big)\Big\},$$

$$x_1(0,\varepsilon) - x_1(2\pi,\varepsilon) = 0,\ \frac{dx_1(0,\varepsilon)}{d\tau} - \frac{dx_1(2\pi,\varepsilon)}{d\tau} = 0. \tag{20}$$

Приближение к решению краевой задачи (19), (20) ищем в виде

$$x_1(\tau,\varepsilon) \approx \xi_1(\tau,\varepsilon) = \varphi_1(\tau)c_1(\varepsilon),\ c_1(\varepsilon)\in\mathbb{R}^{\mu_1};$$

здесь

$$\varphi_1(\tau) = \Big[\varphi_1^{(1)}(\tau)\ \varphi_1^{(1)}(\tau)\ \dots\ \varphi_1^{(\mu_1)}(\tau)\Big] -$$

$(1\times\mu_1)-$ матрица. Потребуем

$$\Theta(c_1(\varepsilon)) = \Bigg\|\Big(1+\varepsilon\beta^*\Big)^2\cdot\Big[\varepsilon\mathcal{A}_1\Big(y_0(\tau,\hat{c}^*)\Big)-1\Big]\xi_1(\tau,\varepsilon)+$$

$$+\varepsilon\Big(1+\varepsilon\beta^*\Big)^2\cdot\Big[Y(y_0(\tau,\hat{c}^*),0)+\varepsilon\mathcal{A}_2\Big(y_0(\tau,\hat{c}^*)\Big)\Big] - \xi_1''(\tau,\varepsilon) -$$

$$-y_0''(\tau,\hat{c}^*) - \Big(1+\varepsilon\beta^*\Big)^2\cdot y_0(\tau,\hat{c}^*)\Bigg\|^2_{L^2[0,2\pi]} \to \min$$

при фиксированной матрице $\varphi(\tau)$. Обозначим $(1\times\mu_1)-$ матрицу

$$\mathcal{F}_1(\tau,\varepsilon) = \Big(1+\varepsilon\beta^*\Big)^2\cdot\Big[\varepsilon\mathcal{A}_1\Big(y_0(\tau,\hat{c}^*)\Big)-1\Big]\varphi_1(\tau) - \varphi_1''(\tau).$$

Необходимое условие минимизации функции $\Theta(c_1(\varepsilon))$ приводит к уравнению

$$\Gamma\Big(\mathcal{F}_1(\cdot,\varepsilon)\Big)c_1(\varepsilon) = -\int_0^{2\pi}\mathcal{F}_1^*(\tau,\varepsilon)\Bigg\{\varepsilon\Big(1+\varepsilon\beta^*\Big)^2\cdot\Big[Y(y_0(\tau,\hat{c}^*),0)+$$

$$+\varepsilon\mathcal{A}_2\Big(y_0(\tau,\hat{c}^*)\Big)\Big] - y_0''(\tau,\hat{c}^*) - \Big(1+\varepsilon\beta^*\Big)^2\cdot y_0(\tau,\hat{c}^*)\Bigg\}d\tau,$$

однозначно разрешимому относительно вектора $c_1(\varepsilon)\in\mathbb{R}^{\mu_1}$ при условии невырожденности $(\mu_1\times\mu_1)-$ матрицы Грама [17]

$$\Gamma\Big(\mathcal{F}_1(\cdot,\varepsilon)\Big) = \int_0^{2\pi}\mathcal{F}_1^*(\tau,\varepsilon)\mathcal{F}_1(\tau,\varepsilon)\,d\tau.$$

Таким образом, при условии $\det\Big[\Gamma\Big(\mathcal{F}_1(\cdot,\varepsilon)\Big)\Big]\neq 0$ находим вектор

$$c_1(\varepsilon) = -\Big[\Gamma\Big(\mathcal{F}_1(\cdot,\varepsilon)\Big)\Big]^{-1}\cdot\int_0^{2\pi}\mathcal{F}_1^*(\tau,\varepsilon)\Bigg\{\varepsilon\Big(1+\varepsilon\beta^*\Big)^2\times$$

$$\times\Big[Y(y_0(\tau,\hat{c}^*),0)+\varepsilon\mathcal{A}_2\Big(y_0(\tau,\hat{c}^*)\Big)\Big]-y_0''(\tau,\hat{c}^*)-\Big(1+\varepsilon\beta^*\Big)^2\cdot y_0(\tau,\hat{c}^*)\Bigg\}d\tau,$$

определяющий наилучшее (в смысле наименьших квадратов) приближение

$$\xi_1(\tau,\varepsilon) = \varphi_1(\tau)c_1(\varepsilon)\approx x_1(\tau,\varepsilon)$$

к решению краевой задачи (19), (20). При условии

$$\mathfrak{B}_\beta(\hat{c}^*,\varepsilon) = 2\int_0^{2\pi}H_\rho(s)\cdot\Big[\varepsilon Y(y_0(s,\hat{c}^*)+x_1(s,\varepsilon),\varepsilon)-$$

$$-y_0(s,\hat{c}^*)-x_1(s,\varepsilon)\Big]\,ds\neq 0$$

первое приближение $\beta_1(\varepsilon) \in C[0, \varepsilon_*]$ к функции $\beta(\varepsilon)$ определим, как

$$\beta_1(\varepsilon) = \mathfrak{B}_\beta^{-1}(\hat{c}^*, \varepsilon) \cdot \int_0^{2\pi} H_\rho(s) \cdot \Bigg\{ \Bigg(1 + \varepsilon^2 \beta^{*2}\Bigg) Y(y_0(s, \hat{c}^*) + x_1(s, \varepsilon), \varepsilon) -$$

$$-\varepsilon \beta^{*2} \Bigg(y_0(s, \hat{c}^*) + x_1(s, \varepsilon) \Bigg) \Bigg\} \, ds.$$

Функция $\beta_1(\varepsilon)$ определяет замену независимой переменной

$$t_1 = \tau \Bigg(1 + \varepsilon \beta_1(\varepsilon) \Bigg),$$

осуществляющую отображение

$$\tau \in [0, 2\pi] \to \Bigg[0, 2\pi \Bigg(1 + \varepsilon \beta_1(\varepsilon) \Bigg) \Bigg] \ni t_1.$$

Итак, на первом шаге итерационной процедуры найдено первое приближение

$$y_1(t, \varepsilon): \; y_1(\cdot, \varepsilon) \in C^2 \Bigg[0, 2\pi \Bigg(1 + \varepsilon \beta_1(\varepsilon) \Bigg) \Bigg], \; y_1(t, \cdot) \in C[0, \varepsilon_*]$$

к решению периодической задачи для уравнения типа Хилла (1). Второе приближение к решению краевой задачи (6), (7) ищем, как отклонение от первого

$$y_2(\tau, \varepsilon) = y_0(\tau, \hat{c}^*) + x_2(\tau, \varepsilon), \; x_2(\tau, \varepsilon) = \xi_1(\tau, \varepsilon) + \xi_2(\tau, \varepsilon),$$

$$\xi_2(\tau, \varepsilon) = \varphi_2(\tau) c_2(\varepsilon), \; c_2(\varepsilon) \in \mathbb{R}_2^\mu$$

здесь

$$\varphi_2(\tau) = \Bigg[\varphi_2^{(1)}(\tau) \; \varphi_2^{(1)}(\tau) \; ... \; \varphi_2^{(\mu_2)}(\tau) \Bigg] -$$

$(1 \times \mu_2)$ - матрица. Предположим, что найденное первое приближение

$$y_1(\tau, \varepsilon) \approx y_0(\tau, \hat{c}^*) + \xi_1(\tau, \varepsilon)$$

принадлежит области определения функции $Y(y,\varepsilon)$ и не является искомым решением задачи (1). Используя непрерывную дифференцируемость по $y(\tau,\varepsilon)$ функции $Y(y(\tau,\varepsilon),\varepsilon)$ в окрестности первого приближения $y_1(\tau,\varepsilon)$ и непрерывную дифференцируемость по второму аргументу в малой положительной окрестности нуля, разлагаем эту функцию в окрестности точек $\xi_2(\tau,\varepsilon)=0$ и $\varepsilon=0$:

$$Y(y_1(\tau,\varepsilon)+\xi_2(\tau,\varepsilon),\varepsilon)=Y(y_1(\tau,\varepsilon),0)+$$

$$+\mathcal{A}_1\Big(y_1(\tau,\varepsilon)\Big)\xi_2(\tau,\varepsilon)+\varepsilon\mathcal{A}_2\Big(y_1(\tau,\varepsilon)\Big)+\mathcal{R}(y_1(\tau,\varepsilon)+\xi_2(\tau,\varepsilon),\varepsilon),$$

где

$$\mathcal{A}_1\Big(y_1(\tau,\varepsilon)\Big)=\frac{\partial Y(y(\tau,\varepsilon),\varepsilon)}{\partial y}\Bigg|_{\begin{array}{l} y\ =\ y_1(\tau,\varepsilon),\\ \varepsilon\ =\ 0\end{array}},$$

$$\mathcal{A}_2\Big(y_1(\tau,\varepsilon)\Big)=\frac{\partial Y(y(\tau,\varepsilon),\varepsilon)}{\partial \varepsilon}\Bigg|_{\begin{array}{l} y\ =\ y_1(\tau,\varepsilon),\\ \varepsilon\ =\ 0\end{array}}.$$

Второе приближение к решению краевой задачи (6), (7) ищем, как решение краевой задачи

$$\frac{d^2y_2(\tau,\varepsilon)}{d\tau^2}+\Big(1+\varepsilon\beta_1(\varepsilon)\Big)^2\cdot y_2(\tau,\varepsilon)=\varepsilon\Big(1+\varepsilon\beta_1(\varepsilon)\Big)^2\times \tag{21}$$

$$\times\Big\{Y(y_1(\tau,\varepsilon),0)+\mathcal{A}_1\Big(y_1(\tau,\varepsilon)\Big)\xi_2(\tau,\varepsilon)+\varepsilon\mathcal{A}_2\Big(y_1(\tau,\varepsilon)\Big)\Big\},$$

$$y_2(0,\varepsilon)-y_2(2\pi,\varepsilon)=0,\ \frac{dy_2(0,\varepsilon)}{d\tau}-\frac{dy_2(2\pi,\varepsilon)}{d\tau}=0. \tag{22}$$

Обозначим $(1\times\mu_2)$ – матрицу

$$\mathcal{F}_2(\tau,\varepsilon)=\Big(1+\varepsilon\beta_1(\varepsilon)\Big)^2\cdot\Big[\varepsilon\mathcal{A}_1\Big(y_1(\tau,\varepsilon)\Big)-1\Big]\varphi_2(\tau)-\varphi_2''(\tau).$$

Необходимое условие минимизации невязки в решении задачи второго приближения приводит к уравнению

$$\Gamma\Big(\mathcal{F}_2(\cdot,\varepsilon)\Big)\cdot c_2(\varepsilon) = -\varepsilon\int_0^{2\pi}\mathcal{F}_2^*(\tau,\varepsilon)\Bigg\{\varepsilon\Big(1+\varepsilon\beta_1(\varepsilon)\Big)^2\cdot\Bigg[Y(y_1(\tau,\varepsilon),0)+$$

$$+\varepsilon\mathcal{A}_2\Big(y_1(\tau,\varepsilon)\Big)\Bigg] - \Big(1+\varepsilon\beta_1(\varepsilon)\Big)^2\cdot y_1(\tau,\varepsilon) - \frac{d^2y_1(\tau,\varepsilon)}{d\tau^2}\Bigg\}d\tau,$$

однозначно разрешимому относительно вектора $c_2(\varepsilon)\in\mathbb{R}^{\mu_2}$ при условии невырожденности $(\mu_2\times\mu_2)$ – матрицы Грама

$$\Gamma\Big(\mathcal{F}_2(\cdot,\varepsilon)\Big) = \int_0^{2\pi}\mathcal{F}_2^*(\tau,\varepsilon)\cdot\mathcal{F}_2(\tau,\varepsilon)\;d\tau.$$

Таким образом, при условии

$$\det\Bigg[\Gamma\Big(\mathcal{F}_2(\cdot,\varepsilon)\Big)\Bigg]\neq 0$$

находим вектор

$$c_2(\varepsilon) = -\Bigg[\Gamma\Big(\mathcal{F}_2(\cdot,\varepsilon)\Big)\Bigg]^{-1}\cdot\int_0^{2\pi}\mathcal{F}_2^*(\tau,\varepsilon)\cdot\Bigg\{\varepsilon\Big(1+\varepsilon\beta_1(\varepsilon)\Big)^2\cdot\Bigg[Y(y_1(\tau,\varepsilon),0)+$$

$$+\varepsilon\mathcal{A}_2\Big(y_1(\tau,\varepsilon)\Big)\Bigg] - \Big(1+\varepsilon\beta_1(\varepsilon)\Big)^2\cdot y_1(\tau,\varepsilon) - \frac{d^2y_1(\tau,\varepsilon)}{d\tau^2}\Bigg\}d\tau,$$

определяющий наилучшее (в смысле наименьших квадратов) приближение

$$y_2(\tau,\varepsilon) = y_0(\tau,\hat{c}^*) + x_2(\tau,\varepsilon),$$

$$x_2(\tau,\varepsilon) = \xi_1(\tau,\varepsilon) + \xi_2(\tau,\varepsilon),\;\; \xi_2(\tau,\varepsilon) = \varphi_2(\tau)c_2(\varepsilon)$$

к решению краевой задачи (21), (22). При условии

$$\mathfrak{B}_\beta(\hat{c}^*,\varepsilon) = 2\int_0^{2\pi}H_\rho(s)\cdot\Big[\varepsilon Y(y_0(s,\hat{c}^*) + x_2(s,\varepsilon),\varepsilon) -$$

$$-y_0(s,\hat{c}^*) - x_2(s,\varepsilon)\Bigg]\, ds \neq 0$$

определим второе приближение $\beta_2(\varepsilon) \in C[0,\varepsilon_*]$ к функции $\beta(\varepsilon)$, как

$$\beta_2(\varepsilon) = \mathfrak{B}_\beta^{-1}(\hat{c}^*,\varepsilon) \cdot \int_0^{2\pi} H_\rho(s) \cdot \Bigg\{ \Bigg(1 + \varepsilon^2 \beta^{*2}\Bigg) Y(y_0(s,\hat{c}^*) + x_2(s,\varepsilon),\varepsilon) -$$

$$-\varepsilon\beta_k^2\Bigg(y_0(s,\hat{c}^*) + x_2(s,\varepsilon)\Bigg)\Bigg\}\, ds.$$

Функция $\beta_2(\varepsilon)$ определяет замену независимой переменной

$$t_2 = \tau\Bigg(1 + \varepsilon\beta_2(\varepsilon)\Bigg),$$

осуществляющую отображение

$$\tau \in [0,2\pi] \to \Bigg[0, 2\pi\Bigg(1 + \varepsilon\beta_2(\varepsilon)\Bigg)\Bigg] \ni t_2.$$

Итак, на втором шаге итерационной процедуры найдено второе приближение

$$y_2(t,\varepsilon):\ y_2(\cdot,\varepsilon) \in C^2\Bigg[0, 2\pi\Bigg(1 + \varepsilon\beta_2(\varepsilon)\Bigg)\Bigg],\ y_2(t,\cdot) \in C[0,\varepsilon_*]$$

к решению периодической задачи для уравнения типа Хилла (1). Продолжая рассуждения, предположим, что найдено наилучшее (в смысле наименьших квадратов) приближение

$$x_k(\tau,\varepsilon) \approx \xi_1(\tau,\varepsilon) + \ ...\ + \xi_k(\tau,\varepsilon),\ \xi_k(\tau,\varepsilon) = \varphi_k(\tau)c_k(\varepsilon),$$

$$c_k(\varepsilon) \in \mathbb{R}^{\mu_k},\ k = 1, 2,\ ...$$

к решению краевой задачи (6), (7) и приближение $\beta_k(\varepsilon)$ к функции $\beta(\varepsilon)$; здесь

$$\varphi_k(\tau) = \Bigg[\varphi_k^{(1)}(\tau)\ \varphi_k^{(1)}(\tau)\ ...\ \varphi_k^{(\mu_k)}(\tau)\Bigg] -$$

$(1 \times \mu_k)$ – матрица. Следующее наилучшее (в смысле наименьших квадратов) приближение к решению задачи (6), (7) ищем в виде

$$x_{k+1}(\tau,\varepsilon) \approx \xi_1(\tau,\varepsilon) + \ \dots \ + \xi_{k+1}(\tau,\varepsilon),$$

$$\xi_{k+1}(\tau,\varepsilon) = \varphi(\tau) c_{k+1}(\varepsilon), \ c_{k+1}(\varepsilon) \in \mathbb{R}^{\mu_{k+1}};$$

здесь

$$\varphi_{k+1}(\tau) = \left[\varphi_{k+1}^{(1)}(\tau) \ \varphi_{k+1}^{(1)}(\tau) \ \dots \ \varphi_{k+1}^{(\mu_1)}(\tau)\right] -$$

$(1 \times \mu_{k+1})$ – матрица. Предположим, что найденное приближение

$$y_k(\tau,\varepsilon) \approx y_0(\tau,\hat{c}^*) + x_k(\tau,\varepsilon)$$

принадлежит области определения функции $Y(y,\varepsilon)$ и не является искомым решением задачи (1). Используя непрерывную дифференцируемость по $y(\tau,\varepsilon)$ функции $Y(y(\tau,\varepsilon),\varepsilon)$ в окрестности приближения $y_k(\tau,\varepsilon)$ и непрерывную дифференцируемость по второму аргументу в малой положительной окрестности нуля, разлагаем эту функцию в окрестности точек $\xi_{k+1}(\tau,\varepsilon) = 0$ и $\varepsilon = 0$:

$$Y(y_k(\tau,\varepsilon) + \xi_{k+1}(\tau,\varepsilon),\varepsilon) = Y(y_k(\tau,\varepsilon),0) +$$

$$+ \mathcal{A}_1\Big(y_k(\tau,\varepsilon)\Big)\xi_{k+1}(\tau,\varepsilon) + \varepsilon\mathcal{A}_2\Big(y_k(\tau,\varepsilon)\Big) + \mathcal{R}(y_k(\tau,\varepsilon) + \xi_{k+1}(\tau,\varepsilon),\varepsilon),$$

где

$$\mathcal{A}_1\Big(y_k(\tau,\hat{c}^*)\Big) = \frac{\partial Y(y(\tau,\varepsilon),\varepsilon)}{\partial y}\Bigg|_{\substack{y \ = \ y_k(\tau,\varepsilon), \\ \varepsilon \ = \ 0}},$$

$$\mathcal{A}_2\Big(y_k(\tau,\hat{c}^*)\Big) = \frac{\partial Y(y(\tau,\varepsilon),\varepsilon)}{\partial \varepsilon}\Bigg|_{\substack{y \ = \ y_k(\tau,\varepsilon), \\ \varepsilon \ = \ 0}}.$$

Обозначим $(1 \times \mu_{k+1})$ – матрицу

$$\mathcal{F}_{k+1}(\tau,\varepsilon) = \Big(1 + \varepsilon\beta_k(\varepsilon)\Big)^2 \cdot \Big[\varepsilon\mathcal{A}_1\Big(y_k(\tau,\varepsilon)\Big) - 1\Big]\varphi_{k+1}(\tau) - \varphi''_{k+1}(\tau).$$

При условии

$$\det\left[\Gamma\Big(\mathcal{F}_{k+1}(\cdot,\varepsilon)\Big)\right] \neq 0,$$

$$\Gamma\Big(\mathcal{F}_{k+1}(\cdot,\varepsilon)\Big) = \int_0^{2\pi} \mathcal{F}^*_{k+1}(\tau,\varepsilon)\cdot\mathcal{F}_{k+1}(\tau,\varepsilon)\, d\tau$$

находим вектор

$$c_{k+1}(\varepsilon) = -\left[\Gamma\Big(\mathcal{F}_{k+1}(\cdot,\varepsilon)\Big)\right]^{-1}\times$$

$$\times\int_0^{2\pi} \mathcal{F}^*_{k+1}(\tau,\varepsilon)\cdot\Bigg\{\varepsilon\Big(1+\varepsilon\beta_k(\varepsilon)\Big)^2\cdot\Bigg[Y(y_k(\tau,\varepsilon),0)+$$

$$+\varepsilon\mathcal{A}_2\Big(y_k(\tau,\varepsilon)\Big)\Bigg] - \Big(1+\varepsilon\beta_k(\varepsilon)\Big)^2\cdot y_k(\tau,\varepsilon) - \frac{d^2y_k(\tau,\varepsilon)}{d\tau^2}\Bigg\}d\tau,$$

определяющий наилучшее (в смысле наименьших квадратов) приближение

$$x_{k+1}(\tau,\varepsilon) \approx \xi_1(\tau,\varepsilon) + \ \dots\ + \xi_{k+1}(\tau,\varepsilon),$$

$$\xi_{k+1}(\tau,\varepsilon) = \varphi_{k+1}(\tau)c_{k+1}(\varepsilon),\ c_{k+1}(\varepsilon)\in\mathbb{R}^{\mu_{k+1}}$$

к решению задачи (6), (7). При условии

$$\mathfrak{B}_\beta(\hat{c}^*,\varepsilon) = 2\int_0^{2\pi} H_\rho(s)\cdot\Big[\varepsilon Y(y_0(s,\hat{c}^*)+x_{k+1}(s,\varepsilon),\varepsilon)-$$

$$-y_0(s,\hat{c}^*) - x_{k+1}(s,\varepsilon)\Big]\, ds \neq 0$$

следующее приближение $\beta_{k+1}(\varepsilon)\in C[0,\varepsilon_*]$ к функции $\beta(\varepsilon)$ определим, как

$$\beta_{k+1}(\varepsilon) = \mathfrak{B}^{-1}_\beta(\hat{c}^*,\varepsilon)\cdot\int_0^{2\pi} H_\rho(s)\cdot\Bigg\{\Big(1+\varepsilon^2\beta^{*2}\Big)Y(y_0(s,\hat{c}^*)+x_k(s,\varepsilon),\varepsilon)-$$

$$-\varepsilon\beta_k^2\biggl(y_0(s,\hat{c}^*)+x_k(s,\varepsilon)\biggr)\biggr\}\,ds.$$

Функция $\beta_{k+1}(\varepsilon)$ определяет замену независимой переменной

$$t_{k+1}=\tau\biggl(1+\varepsilon\beta_{k+1}(\varepsilon)\biggr),$$

осуществляющую отображение

$$\tau\in[0,2\pi]\to\biggl[0,2\pi\biggl(1+\varepsilon\beta_{k+1}(\varepsilon)\biggr)\biggr]\ni t_{k+1}.$$

Таким образом, найдено следующее приближение

$$y_{k+1}(t,\varepsilon):\ y_{k+1}(\cdot,\varepsilon)\in C^2\biggl[0,2\pi\biggl(1+\varepsilon\beta_{k+1}(\varepsilon)\biggr)\biggr],\ y_{k+1}(t,\cdot)\in C[0,\varepsilon_*]$$

к решению периодической задачи для уравнения типа Хилла (1). Продолжая рассуждения, приходим к следующему утверждению.

Теорема 3. *При наличии кратных* $(\det B_0=0)$ *корней уравнения для порождающих амплитуд (10) случае* $\mathfrak{B}_\beta\neq 0$ *критическая* $(P_{Q^*}\neq 0)$ *задача (6), (7) имеет единственное решение, при* $\varepsilon=0$ *обращающееся в порождающее* $y(\tau,0)=y_0(\tau,\hat{c^*})$. *Для построения решения краевой задачи (6), (7) при условии*

$$\mathfrak{B}_\beta^{-1}(\hat{c}^*,\varepsilon)\neq 0,\ \det\biggl[\Gamma\biggl(\mathcal{F}_k(\cdot,\varepsilon)\biggr)\biggr]\neq 0,\ k\in\mathbb{N},\ \varepsilon\in[0,\varepsilon_*]\in[0,\varepsilon_0]$$

применима итерационная схема

$$y_1(\tau,\varepsilon)=y_0(\tau,\hat{c}^*)+x_1(\tau,\varepsilon),\ x_1(\tau,\varepsilon)\approx\xi_1(\tau,\varepsilon)=\varphi_1(\tau)c_1(\varepsilon),$$

$$c_1(\varepsilon)=-\biggl[\Gamma\biggl(\mathcal{F}_1(\cdot,\varepsilon)\biggr)\biggr]^{-1}\cdot\int_0^{2\pi}\mathcal{F}_1^*(\tau,\varepsilon)\biggl\{\varepsilon\biggl(1+\varepsilon\beta^*\biggr)^2\cdot\biggl[Y(y_0(\tau,\hat{c}^*),0)+$$

$$+\varepsilon\mathcal{A}_2\biggl(y_0(\tau,\hat{c}^*)\biggr)\biggr] - y_0''(\tau,\hat{c}^*) - \biggl(1+\varepsilon\beta^*\biggr)^2 \cdot y_0(\tau,\hat{c}^*)\biggr\}d\tau,$$

$$\beta_1(\varepsilon) = \mathfrak{B}_\beta^{-1}(\hat{c}^*,\varepsilon)\cdot\int_0^{2\pi} H_\rho(s)\cdot\biggl\{\biggl(1+\varepsilon^2\beta^{*2}\biggr)Y(y_0(s,\hat{c}^*)+x_1(s,\varepsilon),\varepsilon) -$$

$$-\varepsilon\beta^{*2}\biggl(y_0(s,\hat{c}^*)+x_1(s,\varepsilon)\biggr)\biggr\}\,ds,\ \dots;$$

$$y_{k+1}(\tau,\varepsilon) = y_0(\tau,\hat{c}^*) + x_{k+1}(\tau,\varepsilon),\ k\in\mathbb{N}, \tag{23}$$

$$x_{k+1}(\tau,\varepsilon) \approx \xi_1(\tau,\varepsilon) + \ \dots\ + \xi_{k+1}(\tau,\varepsilon),\ \xi_{k+1}(\tau,\varepsilon) = \varphi_{k+1}(\tau)c_{k+1}(\varepsilon),$$

$$c_{k+1}(\varepsilon) = -\biggl[\Gamma\biggl(\mathcal{F}_{k+1}(\cdot,\varepsilon)\biggr)\biggr]^{-1}\times$$

$$\times\int_0^{2\pi}\mathcal{F}_{k+1}^*(\tau,\varepsilon)\cdot\biggl\{\varepsilon\biggl(1+\varepsilon\beta_k(\varepsilon)\biggr)^2\cdot\biggl[Y(y_k(\tau,\varepsilon),0) +$$

$$+\varepsilon\mathcal{A}_2\biggl(y_k(\tau,\varepsilon)\biggr)\biggr] - \biggl(1+\varepsilon\beta_k(\varepsilon)\biggr)^2\cdot y_k(\tau,\varepsilon) - \frac{d^2y_k(\tau,\varepsilon)}{d\tau^2}\biggr\}d\tau,$$

$$\beta_{k+1}(\varepsilon) = \mathfrak{B}_\beta^{-1}(\hat{c}^*,\varepsilon)\cdot\int_0^{2\pi} H_\rho(s)\cdot\biggl\{\biggl(1+\varepsilon^2\beta^{*2}\biggr)Y(y_0(s,\hat{c}^*)+x_k(s,\varepsilon),\varepsilon) -$$

$$-\varepsilon\beta_k^2\biggl(y_0(s,\hat{c}^*)+x_k(s,\varepsilon)\biggr)\biggr\}\,ds,\ \dots\,.$$

Пример. *Исследуем задачу о построении периодического решения*

$$y(\cdot,\varepsilon)\in C^2[0,T_1(\varepsilon)],\ y(t,\cdot)\in C[0,\varepsilon_0]$$

уравнения Дюффинга (11)

$$y'' + y = \varepsilon\cdot y^3.$$

Выше было установлено, что уравнение для порождающих амплитуд (10) в случае задачи о нахождении периодического решения уравнения (11) имеет серию корней

$$\beta^* = \frac{3(\hat{c}^*)^2}{8},\ \hat{c}^* \neq 0,\ \hat{c}^* \in \mathbb{R}^1,$$

для которых задача о нахождении периодического решения уравнения (11) представляет частный критический случай. Примем для определенности $\hat{c}^* = 1$. В этом случае величина $\mathfrak{B}_\beta = -2\pi \neq 0$, следовательно, согласно теореме 1 задача о построении периодического решения уравнения Дюффинга в малой окрестности порождающего решения $y_0(t, \hat{c}^*) = \cos t$ имеет единственное решение.

Для первого шага итерационной схемы (23) положим

$$\varphi_1(\tau) = \Big[\cos\tau\ \ \cos 3\tau\ \ \cos 5\tau \Big].$$

Матрица Грама

$$\det\left[\Gamma\Big(\mathcal{F}_1(\cdot,\varepsilon)\Big)\right] = 82\ 944 \cdot \pi^3 \cdot \varepsilon^2 + 184\ 032 \cdot \pi^3 \cdot \varepsilon^3 + \ \dots\ \neq 0$$

невырождена, при этом

$$\xi_1(\tau,\varepsilon) \approx -\frac{1}{64} \cdot \Big(17\cos\tau + 2\cos 3\tau\Big) \cdot \varepsilon +$$

$$+\frac{1}{4096} \cdot \Big(873\cos\tau + 18\cos 3\tau + 4\cos 5\tau\Big) \cdot \varepsilon^2 +$$

$$+\frac{1}{262\ 144} \cdot \Big(-42\ 477\cos\tau - 618\cos 3\tau + 148\cos 5\tau\Big) \cdot \varepsilon^3 +$$

$$+\frac{3}{16\ 777\ 216} \cdot \Big(764\ 847\cos\tau + 22\ 870\cos 3\tau + 276\cos 5\tau\Big) \cdot \varepsilon^4 +$$

$$+\frac{5}{1\ 073\ 741\ 824}\cdot\Bigg(19\ 356\ 357\cos\tau+643\ 338\cos 3\tau+27\ 292\cos 5\tau\Bigg)\cdot\varepsilon^5.$$

Функция

$$\mathfrak{B}_\beta(\hat{c}^*,\varepsilon)=2\int_0^{2\pi}H_\rho(s)\cdot\Bigg[\varepsilon Y(y_0(s,\hat{c}^*)+x_1(s,\varepsilon),\varepsilon)-$$

$$-y_0(s,\hat{c}^*)-x_1(s,\varepsilon)\Bigg]\,ds$$

отлична от нуля

$$\mathfrak{B}_\beta(\hat{c}^*,\varepsilon)=-2\pi+\frac{65\pi\varepsilon}{32}-\frac{3\ 417\pi\varepsilon^2}{2\ 048}+\frac{214\ 317\pi\varepsilon^3}{131\ 072}+\ ....\neq 0,$$

при этом

$$\beta_1(\varepsilon)\approx\frac{3}{8}+\frac{2\ 829\varepsilon^2}{32\ 768}+\frac{11\ 433\varepsilon^3}{1\ 048\ 576}+\frac{2\ 235\ 327\varepsilon^4}{134\ 217\ 728}+\frac{4\ 503\ 417\varepsilon^5}{1\ 073\ 741\ 824}.$$

Таким образом, найдено $T_1(\varepsilon)=2\pi\Bigg(1+\varepsilon\beta_1(\varepsilon)\Bigg)-$ периодическое первое приближение к решению уравнения Дюффинга

$$y_1(\tau,\varepsilon)=y_0(\tau,\hat{c}^*)+x_1(\tau,\varepsilon),$$

$$y_0(\tau,\hat{c}^*)=\cos\tau,\ x_1(\tau,\varepsilon)\approx\xi_1(\tau,\varepsilon),\ t=\tau\Bigg(1+\varepsilon\beta_1(\varepsilon)\Bigg).$$

Для второго шага итерационной схемы (23) положим

$$\varphi_2(\tau)=\Bigg[\cos\tau\ \ \cos 3\tau\ \ \cos 5\tau\ \ \cos 7\tau\ \ \cos 9\tau\Bigg].$$

Матрица Грама, соответствующая первому приближению к периодическому решению уравнения Дюффинга

$$\det\Bigg[\Gamma\Bigg(\mathcal{F}_2(\cdot,\varepsilon)\Bigg)\Bigg]=1\ 223\ 059\ 046\ 400\cdot\pi^5\cdot\varepsilon^2+$$

$$+749\ 123\ 665\ 920 \cdot \pi^5 \cdot \varepsilon^3 + \ ... \ \neq 0$$

невырождена, при этом

$$\xi_2(\tau,\varepsilon) \approx \frac{1}{262\ 144}\left(12\,591\cos\tau - 2\,550\cos 3\tau - 144\cos 5\tau - 8\cos 7\tau\right)\cdot\varepsilon^3 +$$

$$+\frac{1}{16\ 777\ 216}\bigg(- 781\ 115\cos\tau - 38\ 564\cos 3\tau + 8\ 696\cos 5\tau -$$

$$-88\cos 7\tau + 16\cos 9\tau\bigg)\cdot\varepsilon^4 + \frac{1}{536\ 870\ 912}\bigg(23\ 311\ 863\cos\tau -$$

$$-358\ 143\cos 3\tau + 105\ 918\cos 5\tau - 13\ 112\cos 7\tau + 168\cos 9\tau\bigg)\cdot\varepsilon^5.$$

Таким образом, найдено второе приближение к периодическому решению уравнения Дюффинга

$$y_2(\tau,\varepsilon) = y_0(\tau,\hat{c}^*) + x_2(\tau,\varepsilon), \ \ y_0(\tau,\hat{c}^*) = \cos\tau,$$

$$x_2(\tau,\varepsilon) \approx \xi_1(\tau,\varepsilon) + \xi_2(\tau,\varepsilon) \approx -\left(\frac{17}{64}\cos\tau + \frac{1}{32}\cos 3\tau\right)\cdot\varepsilon +$$

$$+\frac{1}{4\ 096}\left(873\cos\tau + 18\cos 3\tau + 4\cos 5\tau\right)\cdot\varepsilon^2 +$$

$$+\frac{1}{131\ 072}\left(- 14\ 943\cos\tau - 1584\cos 3\tau + 2\cos 5 - 4\cos 7\tau\right)\cdot\varepsilon^3 +$$

$$+\frac{1}{8\ 388\ 608}\bigg(621\ 713\cos\tau + 15023\cos 3\tau +$$

$$+4762\cos 5\tau - 44\cos 7\tau + 8\cos 9\tau\bigg)\cdot\varepsilon^4 +$$

$$+\frac{1}{1\ 073\ 741\ 824}\Bigg(-50\ 158\ 059\cos\tau-3\ 932\ 976\cos 3\tau+$$

$$+75\ 376\cos 5\tau-26\ 224\cos 7\tau+336\cos 9\tau\Bigg)\cdot\varepsilon^5.$$

Функция

$$\mathfrak{B}_\beta(\hat{c}^*,\varepsilon)=2\int_0^{2\pi}H_\rho(s)\times$$

$$\times\Big[\varepsilon Y(y_0(s,\hat{c}^*)+x_2(s,\varepsilon),\varepsilon)-y_0(s,\hat{c}^*)-x_2(s,\varepsilon)\Big]\,ds$$

отлична от нуля

$$\mathfrak{B}_\beta(\hat{c}^*,\varepsilon)=-2\pi+\frac{65\pi\varepsilon}{32}-\frac{3\ 417\pi\varepsilon^2}{2\ 048}+\frac{100\ 863\pi\varepsilon^3}{65\ 536}+\ ....\neq 0,$$

при этом

$$\beta_2(\varepsilon)\approx\frac{3}{8}+\frac{2\ 829}{32\ 768}\cdot\varepsilon^2+\frac{11\ 433}{1\ 048\ 576}\cdot\varepsilon^3+\frac{2\ 235\ 327}{134\ 217\ 728}\cdot\varepsilon^4+$$

$$+\frac{4\ 503\ 417}{1\ 073\ 741\ 824}\cdot\varepsilon^5-\frac{5\ 303\ 520\ 711}{274\ 877\ 906\ 944}\cdot\varepsilon^6-\frac{2\ 858\ 465\ 319}{274\ 877\ 906\ 944}\cdot\varepsilon^7.$$

Таким образом, найдено $T_1(\varepsilon)=2\pi\Big(1+\varepsilon\beta_2(\varepsilon)\Big)-$ периодическое второе приближение к решению уравнения Дюффинга

$$y_2(\tau,\varepsilon)=y_0(\tau,\hat{c}^*)+x_2(\tau,\varepsilon),\ y_0(\tau,\hat{c}^*)=\cos\tau,$$

$$x_2(\tau,\varepsilon)\approx\xi_1(\tau,\varepsilon)+\xi_2(\tau,\varepsilon),\ t=\tau\Big(1+\varepsilon\beta_2(\varepsilon)\Big).$$

Для третьего шага итерационной схемы (23) положим

$$\varphi_3(\tau)=\Big[\cos\tau\ \ \cos 3\tau\ \ \cos 5\tau\ \ \cos 7\tau\ \ \cos 9\tau\ \Big].$$

Матрица Грама, соответствующая второму приближению к периодическому решению уравнения Дюффинга

$$\det\left[\Gamma\biggl(\mathcal{F}_3(\cdot,\varepsilon)\biggr)\right] = 1\ 223\ 059\ 046\ 400\cdot\pi^5\cdot\varepsilon^2 + 749\ 123\ 665\ 920\cdot\pi^5\cdot\varepsilon^3 +$$

$$+831\ 094\ 898\ 688\cdot\pi^5\cdot\varepsilon^4 + 670\ 609\ 829\ 376\cdot\pi^5\cdot\varepsilon^5 + \ \dots\ \neq 0$$

невырождена, при этом

$$\xi_3(\tau,\varepsilon) \approx \frac{1}{17\ 179\ 869\ 184}\biggl(-7\ 253\ 355\cos\tau + 14\ 506\ 710\cos 3\tau +$$

$$+3\ 727\ 549\cos 5\tau - 139\ 118\cos 7\tau + 17\ 088\cos 9\tau\biggr)\cdot\varepsilon^6 +$$

$$+\frac{1}{109\ 951\ 162\ 777\ 600}\biggl(-1\ 146\ 540\ 419\ 275\cos\tau +$$

$$+183\ 318\ 270\ 750\cos 3\tau +$$

$$+4\ 466\ 058\ 000\cos 5\tau - 1\ 358\ 915\ 800\cos 7\tau + 55\ 197\ 264\cos 9\tau\biggr)\cdot\varepsilon^7 +$$

$$+\frac{1}{35\ 184\ 372\ 088\ 832\ 000}\biggl(429\ 960\ 301\ 529\ 875\cos\tau +$$

$$+42\ 453\ 876\ 138\ 000\cos 3\tau - 2\ 580\ 072\ 442\ 500\cos 5\tau -$$

$$-194\ 168\ 042\ 520\cos 7\tau + 22\ 810\ 127\ 136\cos 9\tau\biggr)\cdot\varepsilon^8.$$

Таким образом, найдено третье приближение к периодическому решению уравнения Дюффинга

$$y_3(\tau,\varepsilon) = y_0(\tau,\hat{c}^*) + x_3(\tau,\varepsilon),\ \ y_0(\tau,\hat{c}^*) = \cos\tau,$$

$$x_3(\tau,\varepsilon) \approx \xi_1(\tau,\varepsilon) + \xi_2(\tau,\varepsilon) + \xi_3(\tau,\varepsilon) \approx -\left(\frac{17}{64}\cos\tau + \frac{1}{32}\cos 3\tau\right)\cdot\varepsilon +$$

$$+\frac{1}{4\ 096}\Bigg(873\cos\tau + 18\cos 3\tau + 4\cos 5\tau\Bigg)\cdot\varepsilon^2+$$

$$+\frac{1}{131\ 072}\Bigg(-14\ 943\cos\tau - 1584\cos 3\tau + 2\cos 5 - 4\cos 7\tau\Bigg)\cdot\varepsilon^3+$$

$$+\frac{1}{8\ 388\ 608}\Bigg(621\ 713\cos\tau + 15023\cos 3\tau + 4762\cos 5\tau-$$

$$-44\cos 7\tau + 8\cos 9\tau\Bigg)\cdot\varepsilon^4+$$

$$+\frac{1}{1\ 073\ 741\ 824}\Bigg(-50\ 158\ 059\cos\tau - 3\ 932\ 976\cos 3\tau+$$

$$+75\ 376\cos 5\tau - 26\ 224\cos 7\tau + 336\cos 9\tau\Bigg)\cdot\varepsilon^5+$$

$$+\frac{1}{17\ 179\ 869\ 184}\Bigg(-7\ 253\ 355\cos\tau + 14\ 506\ 710\cos 3\tau+$$

$$+3\ 727\ 549\cos 5\tau - 139\ 118\cos 7\tau + 17\ 088\cos 9\tau\Bigg)\cdot\varepsilon^6+$$

$$+\frac{1}{109\ 951\ 162\ 777\ 600}\Bigg(-1\ 146\ 540\ 419\ 275\cos\tau+$$

$$+183\ 318\ 270\ 750\cos 3\tau+$$

$$+4\ 466\ 058\ 000\cos 5\tau - 1\ 358\ 915\ 800\cos 7\tau + 55\ 197\ 264\cos 9\tau\Bigg)\cdot\varepsilon^7+$$

$$+\frac{1}{35\ 184\ 372\ 088\ 832\ 000}\Bigg(429\ 960\ 301\ 529\ 875\cos\tau+$$

$$+42\ 453\ 876\ 138\ 000\cos 3\tau - 2\ 580\ 072\ 442\ 500\cos 5\tau$$

$$-194\ 168\ 042\ 520 \cos 7\tau + 22\ 810\ 127\ 136 \cos 9\tau \Bigg) \cdot \varepsilon^8.$$

Функция

$$\mathfrak{B}_\beta(\hat{c}^*, \varepsilon) = 2\int_0^{2\pi} H_\rho(s) \cdot \Big[\varepsilon Y(y_3(s,\varepsilon),\varepsilon) - y_3(s,\varepsilon)\Big]\, ds$$

отлична от нуля

$$\mathfrak{B}_\beta(\hat{c}^*, \varepsilon) = -2\pi + \frac{65\pi\varepsilon}{32} - \frac{3\ 417\pi\varepsilon^2}{2\ 048} + \frac{100\ 863\pi\varepsilon^3}{65\ 536} + \ .... \neq 0,$$

при этом

$$\beta_3(\varepsilon) \approx \frac{3}{8} + \frac{2\ 829}{32\ 768}\cdot\varepsilon^2 + \frac{11\ 433}{1\ 048\ 576}\cdot\varepsilon^3 + \frac{2\ 235\ 327}{134\ 217\ 728}\cdot\varepsilon^4 +$$

$$+\frac{4\ 503\ 417}{1\ 073\ 741\ 824}\cdot\varepsilon^5 - \frac{5\ 303\ 520\ 711}{274\ 877\ 906\ 944}\cdot\varepsilon^6 - \frac{2\ 858\ 465\ 319}{274\ 877\ 906\ 944}\cdot\varepsilon^7 -$$

$$-\frac{825}{17\ 592\ 186\ 044\ 416}\cdot\varepsilon^8 + \frac{61\ 532\ 552\ 911\ 383}{36\ 028\ 797\ 018\ 963\ 968}\cdot\varepsilon^9.$$

Таким образом, найдено $T_1(\varepsilon) = 2\pi\Big(1 + \varepsilon\beta_3(\varepsilon)\Big)$– периодическое третье приближение к решению уравнения Дюффинга

$$y_3(\tau,\varepsilon) = y_0(\tau,\hat{c}^*) + x_3(\tau,\varepsilon),\ y_0(\tau,\hat{c}^*) = \cos\tau,\ t = \tau\Big(1 + \varepsilon\beta_3(\varepsilon)\Big).$$

Для четвертого шага итерационной схемы (23) положим

$$\varphi_4(\tau) = \Big[\cos\tau\ \ \cos 3\tau\ \ \cos 5\tau\ \ \cos 7\tau\ \ \cos 9\tau\ \ \cos 11\tau\ \ \cos 13\tau\Big].$$

Матрица Грама, соответствующая третьему приближению к периодическому решению уравнения Дюффинга

$$\det\Big[\Gamma\Big(\mathcal{F}_4(\cdot,\varepsilon)\Big)\Big] = 497\ 082\ 506\ 768\ 547\ 840\ 000\cdot\pi^7\cdot\varepsilon^2 +$$

$$+315\ 114\ 803\ 397\ 918\ 720\ 000 \cdot \pi^7 \cdot \varepsilon^3+$$

$$+346\ 930\ 421\ 830\ 778\ 880\ 000 \cdot \pi^7 \cdot \varepsilon^4+$$

$$+284\ 065\ 721\ 934\ 151\ 680\ 000 \cdot \pi^7 \cdot \varepsilon^5 + \ \dots\ \neq 0$$

невырождена, при этом

$$\xi_4(\tau,\varepsilon) \approx -\frac{\cos 11\tau}{33\ 554\ 432} \cdot \varepsilon^5 + \frac{1}{4\ 294\ 967\ 296} \cdot \Bigg(3\cos 9\tau - 62\cos 11\tau +$$

$$+4\cos 13\tau\Bigg) \cdot \varepsilon^6 + \frac{1}{6\ 871\ 947\ 673\ 600} \cdot \Bigg(-850\cos 7\tau + 3021\cos 9\tau -$$

$$-268\ 600\cos 11\tau + 4100\cos 13\tau\Bigg) \cdot \varepsilon^7 +$$

$$+\frac{1}{3\ 298\ 534\ 883\ 328\ 000} \cdot \Bigg(97\ 500\cos 5\tau -$$

$$-315\ 420\cos 7\tau + 3\ 684\ 456\cos 9\tau -$$

$$-84\ 565\ 875\cos 11\tau + 4\ 925\ 750\cos 13\tau\Bigg) \cdot \varepsilon^8 +$$

$$+\frac{1}{13\ 240\ 582\ 904\ 469\ 258\ 240} \cdot \Bigg(380\ 281\ 246\ 879\ 695\cos\tau -$$

$$-760\ 563\ 082\ 417\ 950\cos 3\tau - 868\ 387\ 514\ 887\ 620\cos 5\tau +$$

$$+15\ 014\ 713\ 528\ 920\cos 7\tau + 5\ 292\ 970\ 517\ 520\cos 9\tau -$$

$$-420\ 651\ 195\ 328\cos 11\tau + 15\ 648\ 472\ 320\cos 13\tau\Bigg) \cdot \varepsilon^9 +$$

$$+\frac{1}{59\ 317\ 811\ 412\ 022\ 276\ 915\ 200} \cdot \Bigg(8\ 583\ 246\ 375\ 461\ 175\ 075\cos\tau -$$

$$-2\ 896\ 327\ 352\ 395\ 858\ 500\cos 3\tau - 2\ 023\ 631\ 754\ 187\ 974\ 000\cos 5\tau +$$

$$+126\ 620\ 569\ 999\ 719\ 600 \cos 7\tau + 5\ 417\ 429\ 504\ 733\ 120 \cos 9\tau -$$

$$\left. -1\ 393\ 592\ 069\ 754\ 752 \cos 11\tau + 87\ 061\ 028\ 965\ 760 \cos 13\tau \right) \cdot \varepsilon^{10}.$$

Таким образом, найдено четвертое приближение к периодическому решению уравнения Дюффинга

$$y_4(\tau,\varepsilon) = y_0(\tau,\hat{c}^*) + x_4(\tau,\varepsilon),\ \ y_0(\tau,\hat{c}^*) = \cos\tau,$$

$$x_4(\tau,\varepsilon) \approx \xi_1(\tau,\varepsilon) + \xi_2(\tau,\varepsilon) + \xi_3(\tau,\varepsilon) + \xi_4(\tau,\varepsilon) \approx$$

$$\approx -\left(\frac{17}{64}\cos\tau + \frac{1}{32}\cos 3\tau\right) \cdot \varepsilon +$$

$$+\frac{1}{4\ 096}\left(873\cos\tau + 18\cos 3\tau + 4\cos 5\tau\right) \cdot \varepsilon^2 + \frac{1}{131\ 072}\left(-14\ 943\cos\tau - \right.$$

$$\left. -1\ 584\cos 3\tau + 2\cos 5 - 4\cos 7\tau\right) \cdot \varepsilon^3 + \frac{1}{8\ 388\ 608}\left(621\ 713\cos\tau + \right.$$

$$+15\ 023\cos 3\tau +$$

$$\left. +4762\cos 5\tau - 44\cos 7\tau + 8\cos 9\tau\right) \cdot \varepsilon^4 +$$

$$+\frac{1}{1\ 073\ 741\ 824}\left(-50\ 158\ 059\cos\tau - 3\ 932\ 976\cos 3\tau + 75\ 376\cos 5\tau - \right.$$

$$\left. -26\ 224\cos 7\tau + 336\cos 9\tau\right) \cdot \varepsilon^5 +$$

$$+\frac{1}{17\ 179\ 869\ 184}\left(-7\ 253\ 355\cos\tau + 14\ 506\ 710\cos 3\tau + 3\ 727\ 549\cos 5\tau - \right.$$

$$\left. -139\ 118\cos 7\tau + 17\ 100\cos 9\tau - 248\cos 11\tau + 16\cos 13\tau\right) \cdot \varepsilon^6 +$$

$$+\frac{1}{4\ 398\ 046\ 511\ 104}\Bigg(-45\ 861\ 616\ 771\cos\tau+7\ 332\ 730\ 830\cos 3\tau+$$

$$+178\,642\,320\cos 5\tau-54\,357\,176\cos 7\tau+2\,209\,824\cos 9\tau-171\,904\cos 11\tau+$$

$$+2\ 624\cos 13\tau\Bigg)\cdot\varepsilon^7+\frac{1}{844\ 424\ 930\ 131\ 968}\Bigg(10\ 319\ 047\ 236\ 717\cos\tau+$$

$$-1\,018\,893\,027\,312\cos 3\tau-61\,921\,713\,660\cos 5\tau-4\,660\,113\,768\cos 7\tau+$$

$$+548\ 386\ 272\cos 9\tau-21648864\cos 11\tau+1260992\cos 13\tau\Bigg)\cdot\varepsilon^8+$$

$$+\frac{1}{13\ 240\ 582\ 904\ 469\ 258\ 240}\cdot\Bigg(380\ 281\ 246\ 879\ 695\cos\tau-$$

$$-760\ 563\ 082\ 417\ 950\cos 3\tau-868\ 387\ 514\ 887\ 620\cos 5\tau+$$

$$+15\ 014\ 713\ 528\ 920\cos 7\tau+5\ 292\ 970\ 517\ 520\cos 9\tau-$$

$$-420\ 651\ 195\ 328\cos 11\tau+15\ 648\ 472\ 320\cos 13\tau\Bigg)\cdot\varepsilon^9+$$

$$+\frac{1}{59\ 317\ 811\ 412\ 022\ 276\ 915\ 200}\cdot\Bigg(8\ 583\ 246\ 375\ 461\ 175\ 075\cos\tau-$$

$$-2\ 896\ 327\ 352\ 395\ 858\ 500\cos 3\tau-2\ 023\ 631\ 754\ 187\ 974\ 000\cos 5\tau+$$

$$+126\ 620\ 569\ 999\ 719\ 600\cos 7\tau+5\ 417\ 429\ 504\ 733\ 120\cos 9\tau-$$

$$-1\ 393\ 592\ 069\ 754\ 752\cos 11\tau+87\ 061\ 028\ 965\ 760\cos 13\tau\Bigg)\cdot\varepsilon^{10}.$$

Функция

$$\mathfrak{B}_\beta(\hat{c}^*,\varepsilon)=2\int_0^{2\pi}H_\rho(s)\cdot\Big[\varepsilon Y(y_4(s,\varepsilon),\varepsilon)-y_4(s,\varepsilon)\Big]\,ds$$

отлична от нуля

$$\mathfrak{B}_\beta(\hat{c}^*,\varepsilon)=-2\pi+\frac{65\pi\varepsilon}{32}-\frac{3\ 417\pi\varepsilon^2}{2\ 048}+\frac{100\ 863\pi\varepsilon^3}{65\ 536}-$$

$$-\frac{5\ 224\ 025\pi\varepsilon^4}{4\ 194\ 304}+\frac{540\ 290\ 667\pi\varepsilon^5}{536\ 870\ 912}+\ ....\neq 0,$$

при этом

$$\beta_4(\varepsilon)\approx\frac{3}{8}+\frac{2\ 829}{32\ 768}\cdot\varepsilon^2+\frac{11\ 433}{1\ 048\ 576}\cdot\varepsilon^3+\frac{2\ 235\ 327}{134\ 217\ 728}\cdot\varepsilon^4+$$

$$+\frac{4\ 503\ 417}{1\ 073\ 741\ 824}\cdot\varepsilon^5-\frac{5\ 303\ 520\ 711}{274\ 877\ 906\ 944}\cdot\varepsilon^6-\frac{2\ 858\ 465\ 319}{274\ 877\ 906\ 944}\cdot\varepsilon^7-$$

$$-\frac{825}{17\ 592\ 186\ 044\ 416}\cdot\varepsilon^8+\frac{61\ 532\ 552\ 911\ 383}{36\ 028\ 797\ 018\ 963\ 968}\cdot\varepsilon^9+$$

$$+\frac{3}{4\ 503\ 599\ 627\ 370\ 496}\cdot\varepsilon^{10}+\frac{12\ 871\ 335\ 635\ 813\ 061}{36\ 893\ 488\ 147\ 419\ 103\ 232}\cdot\varepsilon^{11}+$$

$$+\frac{18\ 588\ 901\ 214\ 998\ 827\ 615}{18\ 889\ 465\ 931\ 478\ 580\ 854\ 784}\cdot\varepsilon^{12}.$$

Таким образом, найдено $T_1(\varepsilon)=2\pi\Big(1+\varepsilon\beta_4(\varepsilon)\Big)-$ периодическое четвертое приближение к решению уравнения Дюффинга

$$y_4(\tau,\varepsilon)=y_0(\tau,\hat{c}^*)+x_4(\tau,\varepsilon),\ y_0(\tau,\hat{c}^*)=\cos\tau,\ t=\tau\Big(1+\varepsilon\beta_4(\varepsilon)\Big).$$

Для пятого шага итерационной схемы (23) положим

$$\varphi_5(\tau)=\Big[\cos\tau\ \ \cos 3\tau\ \ \cos 5\tau\ \ \cos 7\tau\ \ \cos 9\tau\ \ \cos 11\tau\ \ \cos 13\tau\ \ \cos 15\tau\Big].$$

Матрица Грама, соответствующая четвертому приближению к периодическому решению уравнения Дюффинга

$$\det\Big[\Gamma\Big(\mathcal{F}_5(\cdot,\varepsilon)\Big)\Big]\neq 0$$

невырождена, при этом

$$\xi_5(\tau,\varepsilon)\approx-\frac{\varepsilon^7\cdot\cos 15\tau}{34\ 359\ 738\ 368}+\Bigg(\frac{\cos 13\tau}{3\ 298\ 534\ 883\ 328}-$$

$$-\frac{51\cos 15\tau}{2\ 199\ 023\ 255\ 552}\Bigg)\cdot\varepsilon^8+$$

$$+\frac{1}{882\ 705\ 526\ 964\ 617\ 216}\Bigg(25\ 352\ 083\ 125\ 313\cos\tau-$$

$$-50\ 704\ 205\ 494\ 530\cos 3\tau-57\ 892\ 500\ 992\ 508\cos 5\tau+$$

$$+1\ 000\ 980\ 901\ 928\cos 7\tau+352\ 864\ 701\ 168\cos 9\tau-$$

$$-28\,043\,444\,800\cos 11\tau+1\,043\,485\,184\cos 13\tau-49\,329\,408\cos 15\tau\Bigg)\cdot\varepsilon^9$$

$$+\frac{1}{790\ 904\ 152\ 160\ 297\ 025\ 536}\Bigg(114\ 443\ 285\ 006\ 149\ 001\cos\tau-$$

$$-38\ 617\ 698\ 031\ 944\ 780\cos 3\tau-26\ 981\ 756\ 722\ 506\ 320\cos 5\tau+$$

$$+1\ 688\ 274\ 266\ 662\ 928\cos 7\tau+72\ 232\ 396\ 627\ 776\cos 9\tau-$$

$$-18\ 581\ 258\ 941\ 056\cos 11\tau+1\ 161\ 354\ 825\ 344\cos 13\tau-$$

$$-40\ 457\ 508\ 352\cos 15\tau\Bigg)\cdot\varepsilon^{10}+$$

$$+\frac{1}{8\ 858\ 126\ 504\ 195\ 326\ 686\ 003\ 200}\times$$

$$\times\Bigg(20\ 695\ 003\ 611\ 076\ 301\ 325\cos\tau-$$

$$-41\ 390\ 007\ 216\ 251\ 905\ 050\cos 3\tau-$$

$$-171\ 743\ 066\ 840\ 011\ 767\ 800\cos 5\tau+$$

$$+221\ 080\ 86\ 654\ 581\ 681\ 600\cos 7\tau-93\ 589\ 943\ 115\ 664\ 800\cos 9\tau-$$

$$-96\ 930\ 597\ 504\ 240\ 192\cos 11\tau+10\ 916\ 941\ 716\ 000\ 000\cos 13\tau-$$

$$-574\ 752\ 451\ 372\ 800\cos 15\tau\Bigg)\cdot\varepsilon^{11}+$$

$$+\frac{1}{9\ 921\ 101\ 684\ 698\ 765\ 888\ 323\ 584\ 000}\times$$

$$\times\Bigg(2\ 056\ 797\ 704\ 829\ 350\ 389\ 137\ 875\cos\tau-$$

$$-669\ 431\ 091\ 731\ 785\ 052\ 982\ 375\cos 3\tau-$$

$$-121\ 169\ 652\ 225\ 299\ 315\ 517\ 250\cos 5\tau+$$

$$+19\ 621\ 149\ 984\ 809\ 080\ 246\ 000\cos 7\tau-$$

$$-1\ 046\ 369\ 970\ 886\ 131\ 235\ 680\cos 9\tau-$$

$$-46\ 936\ 219\ 972\ 436\ 940\ 992\cos 11\tau+$$

$$+7\ 662\ 790\ 013\ 307\ 271\ 360\cos 13\tau-$$

$$-595\ 343\ 576\ 612\ 952\ 000\cos 15\tau\Bigg)\cdot\varepsilon^{12}.$$

Таким образом, найдено пятое приближение к периодическому решению уравнения Дюффинга

$$y_5(\tau,\varepsilon)=y_0(\tau,\hat{c}^*)+x_5(\tau,\varepsilon),\ \ y_0(\tau,\hat{c}^*)=\cos\tau,$$

$$x_5(\tau,\varepsilon)\approx\xi_1(\tau,\varepsilon)+\xi_2(\tau,\varepsilon)+\xi_3(\tau,\varepsilon)+\xi_4(\tau,\varepsilon)+\xi_5(\tau,\varepsilon)\approx$$

$$\approx-\left(\frac{17}{64}\cos\tau+\frac{1}{32}\cos 3\tau\right)\cdot\varepsilon+$$

$$+\frac{1}{4\ 096}\Bigg(873\cos\tau+18\cos 3\tau+4\cos 5\tau\Bigg)\cdot\varepsilon^2+$$

$$+\frac{1}{131\ 072}\Bigg(-14\ 943\cos\tau-1584\cos 3\tau+2\cos 5-4\cos 7\tau\Bigg)\cdot\varepsilon^3+$$

$$+\frac{1}{8\ 388\ 608}\Bigg(621\ 713\cos\tau+15023\cos 3\tau+$$

$$+4762\cos 5\tau - 44\cos 7\tau + 8\cos 9\tau\Big)\cdot\varepsilon^4+$$

$$+\frac{1}{1\ 073\ 741\ 824}\Big(-50\ 158\ 059\cos\tau - 3\ 932\ 976\cos 3\tau + 75\ 376\cos 5\tau-$$

$$-26\ 224\cos 7\tau + 336\cos 9\tau\Big)\cdot\varepsilon^5+$$

$$+\frac{1}{17\ 179\ 869\ 184}\Big(-7\ 253\ 355\cos\tau + 14\ 506\ 710\cos 3\tau+$$

$$+3\ 727\ 549\cos 5\tau - 139\ 118\cos 7\tau+$$

$$+17\ 100\cos 9\tau - 248\cos 11\tau + 16\cos 13\tau\Big)\cdot\varepsilon^6+$$

$$+\frac{1}{4\ 398\ 046\ 511\ 104}\Big(-45\ 861\ 616\ 771\cos\tau + 7\ 332\ 730\ 830\cos 3\tau+$$

$$+178\ 642\ 320\cos 5\tau - 54\ 357\ 176\cos 7\tau + 2\ 209\ 824\cos 9\tau-$$

$$-171\ 904\cos 11\tau + 2\ 624\cos 13\tau - 128\cos 15\tau\Big)\cdot\varepsilon^7+$$

$$+\frac{1}{281\ 474\ 976\ 710\ 656}\Big(3\ 439\ 682\ 412\ 239\cos\tau+$$

$$+339\ 631\ 009\ 104\cos 3\tau-$$

$$-20\ 640\ 571\ 220\cos 5\tau - 1\ 553\ 371\ 256\cos 7\tau + 182\ 795\ 424\cos 9\tau-$$

$$-7\ 216\ 288\cos 11\tau + 420\ 416\cos 13\tau - 6\ 528\cos 15\tau\Big)\cdot\varepsilon^8+$$

$$+\frac{1}{882\ 705\ 526\ 964\ 617\ 216}\Big(25\ 352\ 083\ 125\ 313\cos\tau-$$

$$-50\ 704\ 205\ 494\ 530\cos 3\tau - 57\ 892\ 500\ 992\ 508\cos 5\tau+$$

$$+1\ 000\ 980\ 901\ 928 \cos 7\tau + 352\ 864\ 701\ 168 \cos 9\tau -$$

$$\left. -28\ 043\ 444\ 800 \cos 11\tau + 1\ 043\ 485\ 184 \cos 13\tau - 49\ 329\ 408 \cos 15\tau \right) \cdot \varepsilon^9$$

$$+ \frac{1}{790\ 904\ 152\ 160\ 297\ 025\ 536} \Big(114\ 443\ 285\ 006\ 149\ 001 \cos \tau -$$

$$-38\ 617\ 698\ 031\ 944\ 780 \cos 3\tau - 26\ 981\ 756\ 722\ 506\ 320 \cos 5\tau +$$

$$+1\ 688\ 274\ 266\ 662\ 928 \cos 7\tau + 72\ 232\ 396\ 627\ 776 \cos 9\tau -$$

$$-18\ 581\ 258\ 941\ 056 \cos 11\tau + 1\ 161\ 354\ 825\ 344 \cos 13\tau -$$

$$\left. -40\ 457\ 508\ 352 \cos 15\tau \right) \cdot \varepsilon^{10} +$$

$$+ \frac{1}{8\ 858\ 126\ 504\ 195\ 326\ 686\ 003\ 200} \times$$

$$\times \Big(20\ 695\ 003\ 611\ 076\ 301\ 325 \cos \tau -$$

$$-41\ 390\ 007\ 216\ 251\ 905\ 050 \cos 3\tau - 171\ 743\ 066\ 840\ 011\ 767\ 800 \cos 5\tau +$$

$$+221\ 080\ 86\ 654\ 581\ 681\ 600 \cos 7\tau - 93\ 589\ 943\ 115\ 664\ 800 \cos 9\tau -$$

$$-96\ 930\ 597\ 504\ 240\ 192 \cos 11\tau + 10\ 916\ 941\ 716\ 000\ 000 \cos 13\tau -$$

$$\left. -574\ 752\ 451\ 372\ 800 \cos 15\tau \right) \cdot \varepsilon^{11} +$$

$$+ \frac{1}{9\ 921\ 101\ 684\ 698\ 765\ 888\ 323\ 584\ 000} \times$$

$$\times \Big(2\ 056\ 797\ 704\ 829\ 350\ 389\ 137\ 875 \cos \tau -$$

$$-669\ 431\ 091\ 731\ 785\ 052\ 982\ 375 \cos 3\tau -$$

$$-121\ 169\ 652\ 225\ 299\ 315\ 517\ 250 \cos 5\tau +$$

$$+19\ 621\ 149\ 984\ 809\ 080\ 246\ 000 \cos 7\tau -$$

$$-1\ 046\ 369\ 970\ 886\ 131\ 235\ 680 \cos 9\tau-$$
$$-46\ 936\ 219\ 972\ 436\ 940\ 992 \cos 11\tau + 7\ 662\ 790\ 013\ 307\ 271\ 360 \cos 13\tau-$$
$$\left.-595\ 343\ 576\ 612\ 952\ 000 \cos 15\tau\right) \cdot \varepsilon^{12}.$$

Функция

$$\mathfrak{B}_\beta(\hat{c}^*, \varepsilon) = 2\int_0^{2\pi} H_\rho(s) \cdot \Big[\varepsilon Y(y_5(s,\varepsilon),\varepsilon) - y_5(s,\varepsilon)\Big]\, ds$$

отлична от нуля

$$\mathfrak{B}_\beta(\hat{c}^*, \varepsilon) = -2\pi + \frac{65\pi\varepsilon}{32} - \frac{3\ 417\pi\varepsilon^2}{2\ 048} + \frac{100\ 863\pi\varepsilon^3}{65\ 536} -$$
$$-\frac{5\ 224\ 025\pi\varepsilon^4}{4\ 194\ 304} + \frac{540\ 290\ 667\pi\varepsilon^5}{536\ 870\ 912} - \frac{6\ 251\ 028\ 117\pi\varepsilon^6}{8\ 589\ 934\ 592} +$$
$$+\frac{992\ 886\ 372\ 787\pi\varepsilon^7}{2\ 199\ 023\ 255\ 552} + \ \ldots. \neq 0,$$

при этом

$$\beta_5(\varepsilon) \approx \frac{3}{8} + \frac{2\ 829}{32\ 768} \cdot \varepsilon^2 + \frac{11\ 433}{1\ 048\ 576} \cdot \varepsilon^3 + \frac{2\ 235\ 327}{134\ 217\ 728} \cdot \varepsilon^4 +$$
$$+\frac{4\ 503\ 417}{1\ 073\ 741\ 824} \cdot \varepsilon^5 - \frac{5\ 303\ 520\ 711}{274\ 877\ 906\ 944} \cdot \varepsilon^6 - \frac{2\ 858\ 465\ 319}{274\ 877\ 906\ 944} \cdot \varepsilon^7 -$$
$$-\frac{825}{17\ 592\ 186\ 044\ 416} \cdot \varepsilon^8 + \frac{61\ 532\ 552\ 911\ 383}{36\ 028\ 797\ 018\ 963\ 968} \cdot \varepsilon^9 +$$
$$+\frac{3}{4\ 503\ 599\ 627\ 370\ 496} \cdot \varepsilon^{10} + \frac{12\ 871\ 335\ 635\ 813\ 061}{36\ 893\ 488\ 147\ 419\ 103\ 232} \cdot \varepsilon^{11} +$$
$$+\frac{18\ 588\ 901\ 214\ 998\ 827\ 615}{18\ 889\ 465\ 931\ 478\ 580\ 854\ 784} \cdot \varepsilon^{12} +$$
$$+\frac{667\ 489\ 233\ 939\ 961\ 078\ 863}{604\ 462\ 909\ 807\ 314\ 587\ 353\ 088} \cdot \varepsilon^{13} +$$
$$+\frac{169\ 348\ 630\ 304\ 947\ 850\ 609\ 115}{154\ 742\ 504\ 910\ 672\ 534\ 362\ 390\ 528} \cdot \varepsilon^{14} +$$

$$+\frac{1\,685\,996\,164\,096\,553\,628\,066\,122\,241}{6\,065\,906\,192\,498\,363\,347\,005\,708\,697\,600}\cdot\varepsilon^{15}.$$

Таким образом, найдено $T_1(\varepsilon) = 2\pi\Big(1+\varepsilon\beta_5(\varepsilon)\Big)$– периодическое пятое приближение к решению уравнения Дюффинга

$$y_5(\tau,\varepsilon) = y_0(\tau,\hat{c}^*) + x_5(\tau,\varepsilon),\ y_0(\tau,\hat{c}^*) = \cos\tau,\ t = \tau\Big(1+\varepsilon\beta_5(\varepsilon)\Big).$$

Для оценки точности найденных приближений к периодическому решению уравнения Дюффинга определим невязки нулевого

$$\Delta_0(\varepsilon) := \Big|\Big|y_0''(\tau,\hat{c}^*) + y_0(\tau,\hat{c}^*) - \varepsilon\cdot y_0^3(\tau,\hat{c}^*)\Big|\Big|_{C[0;2\pi]}$$

и первых пяти приближений ($i = 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5$)

$$\Delta_i(\varepsilon) := \Big|\Big|y_i''(\tau,\varepsilon)+\Big(1+\varepsilon\beta_i(\varepsilon)\Big)^2\cdot y_i(\tau,\varepsilon)-\varepsilon\cdot\Big(1+\varepsilon\beta_i(\varepsilon)\Big)^2\cdot y_i^3(\tau,\varepsilon)\Big|\Big|_{C[0;2\pi]}.$$

Положив $\varepsilon = 0,1$, убеждаемся в уменьшении нулевой и первых пяти невязок от итерации к итерации

$$\Delta_0(0,1)\approx 0,1\ ,\ \Delta_1(0,1)\approx 8,54\,588\cdot 10^{-5},\ \Delta_2(0,1)\approx 1,30\,414\cdot 10^{-8}\ ,$$
$$\Delta_3(0,1)\approx 3,99\,256\cdot 10^{-11},\ \Delta_4(0,1)\approx 6,06\,345\cdot 10^{-15},$$
$$\Delta_5(0,1)\approx 2,99\,824\cdot 10^{-16}\ .$$

При $\varepsilon = 0,01$ невязки имеют вид

$$\Delta_0(0,01)\approx 0,01\ ,\ \Delta_1(0,01)\approx 9,16\,904\cdot 10^{-8},$$
$$\Delta_2(0,01)\approx 1,16\,999\cdot 10^{-14},\Delta_3(0,01)\approx 5,20\,905\cdot 10^{-16},$$
$$\Delta_4(0,01)\approx 2,6\,563\cdot 10^{-16},\ \Delta_5(0,01)\approx 2,65\,631\cdot 10^{-16}\ .$$

В заключение заметим, что точность приближений к периодическому решению уравнения Дюффинга, найденных при помощи итерационной схемы (23), значительно превосходит точность соответствующих приближений, получаемых при помощи итерационной техники (18), а также итерационных схем из статей [15, 20, 21].

1. *Каудерер Г.* Нелинейная механика. — М.: Изд-во иностр. лит., 1961. — 778 с.
2. *Якубович В.А., Старжинский В.М.* Линейные дифференциальные уравнения с периодическими коэффициентами и их приложения. — М.: Наука, 1972. — 720 с.
3. *Малкин И.Г.* Некоторые задачи теории нелинейных колебаний. — М.: Гостехиздат, 1956. — 491 с.
4. *Гребеников Е.А., Рябов Ю.А.* Конструктивные методы анализа нелинейных систем. — М.: Наука, 1979. — 432 с.
5. *Бойчук А.А., Журавлев В.Ф., Чуйко С.М.* Периодические решения нелинейных автономных систем в критических случаях // Укр. мат. журн. – 1990. – **42**, № 9. – С. 1180 – 1187.
6. *Бойчук А.А., Журавлев В.Ф., Самойленко А.М.* Обобщенно-обратные операторы и нетеровы краевые задачи. – К.: Ин-т математики НАН Украины, 1995. 318 с.
7. *Boichuk A.A., Samoilenko A.M.* Generalized inverse operators and Fredholm boundary-value problems.— Utrecht; Boston: VSP, 2004. — XIV + 317 p.
8. *Бойчук А.А., Чуйко С.М.* Автономные слабонелинейные краевые задачи // Дифференц. уравнения. – 1992. — **28**, № 10. — С. 1668 — 1674.
9. *Чуйко С.М., Бойчук И.А.* Автономная нетерова краевая задача в критическом случае // Нелінійні коливання. — 2009. — **12**, № 3. — С. 405 — 416.
10. *Лыкова О.Б., Бойчук А.А.* Построение периодических решений нелинейных систем в критических случаях // Укр. мат. журн. — 1988. — **40**, № 1. — С. 62—69.
11. *Bojchuk I.A., Starkova O.V., Chujko S.M.* Weakly perturbed nonlinear boundary-value problem in critical case // Studies of the University of Žilina. Math. series. — 2009. — **23**, № 1. – P. 1 — 8.
12. *Чуйко С.М., Бойчук И.А.* Нелинейные нетеровы краевые задачи в критическом случае // Нелинейные колебания. — 2010. — **13**, № 1. – С 115 — 132.
13. *Чуйко С.М.* Нетерова краевая задача в особом критическом случае // Доп. НАН України. – № 2, 2007. — С. 26 — 30.
14. *Чуйко С.М.* Слабонелинейная краевая задача в особом критическом случае // Укр. мат. журн. – 2009. – Т. 61, № 4. — С. 548 — 562.
15. *Чуйко С.М., Старкова О.В.* Автономные краевые задачи в частном критическом случае // Динамические системы. — 2009. — **27**. – С. 127 — 142.
16. *Чуйко С.М., Пирус О.Е.* Периодическая задача для уравнения типа Хилла // XIII Международная научная конференция им. академика М. Кравчука (Киев, 2010 г.). Тезисы докл. — К. – С. 438.
17. *Ахиезер Н.И.* Лекции по теории аппроксимации. — М.: Наука, 1965. — 408 с.
18. *Чуйко С.М.* О приближенном решении краевых задач методом наименьших квадратов // Нелінійні коливання. — 2008. — **11**, № 4. — С. 554 — 573.
19. *Чуйко С.М., Старкова О.В.* О приближенном решении автономных крае-

вых задач методом наименьших квадратов // Нелінійні коливання. — 2009. – **12**, № 4. С. 556 — 573.
20. *Gómez G., Marcote M.* High-order analytical solutions of Hill's equations // Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy. — 2006. — V. 94. — P. 197—211.
21. *Torres P.J.* Non-trivial periodic solutions of a non-linear Hill's equation with positively homogeneous term // Nonlinear Analysis. — 2006. —V. 65. — P. 841—844.

Отримано 01.09.2010

Славянский государственный педагогический университет,
84 112, Украина, Донецкая обл., Славянск, ул. Лозановича, 14, кв. 24
chujko-slav@inbox.ru

УДК 517.9

©2010. **Шидлич А.Л.**

ПРОСТРАНСТВА S^p С ЛОКАЛЬНОЙ МЕТРИКОЙ

Посвящается светлой памяти
Александра Ивановича Степанца
и Владимира Ивановича Рукасова,
которые покинули нас так внезапно...

В работе продолжаются исследования работ [1–10] экстремальных задач теории приближений в абстрактных линейных пространствах. В ней, в частности, дается определение пространств $S^p_{\varphi,T}$ с локальной метрикой, а также устанавливается ряд их аппроксимационных характеристик. Этот материал возник в результате совместных исследований автора с Александром Ивановичем Степанцом. К сожалению, в силу трагических обстоятельств мы не успели довести эти исследования до конца и оформить их в совместную статью, и мне приходиться это делать самостоятельно.

In the process of research the study of works [1–10] of extreme tasks of theory of approximations proceed in abstract linear spaces is going on. In it, in particular, the determination of spaces is given $S^p_{\varphi,t}$ with a local metric, and also the number of their approximation descriptions is set. This material appeared as a result of joint researches of the author with A. Stepanets. Unfortunately, by the virtue of tragic circumstances there was no time to finish the research and to publish it in the joint article, and I have to do it independently.

1.1. Введение. Пусть $\mathscr{X}$ — некоторое линейное комплексное пространство и $\varphi = \{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$ — фиксированная счетная система в нем, и для любой пары $x, y \in \mathscr{X}$, в которой хотя бы один из векторов принадлежит к φ, определено некоторое число (x, y), удовлетворяющее условиям:

1) $(x, y) = \overline{(y, x)}$, где $\overline{z}$ — число, комплексно-сопряженное с z;

2) $(\lambda x_1 + \mu x_2, y) = \lambda(x_1, y) + \mu(x_2, y)$, $\quad \lambda,\ \mu$ — произвольные числа;

3) $(\varphi_k, \varphi_l) = \begin{cases} 0, & k \neq l; \\ 1, & k = l. \end{cases}$

То есть, определена операция скалярного произведения элементов пространства $\mathscr{X}$ на элементы системы φ.

При помощи этой операции с каждым элементом $x \in \mathscr{X}$ сопоставляется система чисел $\widehat{x}(k)$ таких, что

$$\widehat{x}(k) = \widehat{x}_\varphi(k) = (x, \varphi_k), \quad k = 1, 2, \dots \quad (k \in \mathbb{N}). \tag{1.1}$$

Пусть, далее, γ_T — произвольный набор из T, $T \in \mathbb{N}$, различных натуральных чисел и Γ_T — множество всевозможных таких наборов, $\bigcup\limits_T \Gamma_T = \mathbb{N}$.

При данных фиксированных $T \in \mathbb{N}$ и $p \in (0, \infty)$ полагаем

$$S^p_{\varphi,T} = S^p_{\varphi,T}(\mathscr{X}) := \left\{ x \in \mathscr{X} : \sup_{\gamma_T \in \Gamma_T} \sum_{k \in \gamma_T} \left| \widehat{x}_\varphi(k) \right|^p < \infty \right\}. \tag{1.2}$$

Элементы $x, y \in S^p_{\varphi,T}$ считаются тождественными, если при всех $k \in \mathbb{N}$ $\widehat{x}_\varphi(k) = \widehat{y}_\varphi(k)$.

Для векторов $x, y \in \mathscr{X}$ определяется расстояние между ними при помощи равенства

$$\rho(x, y)_{p,T} = \rho(x, y)_{p,\varphi,T} := \sup_{\gamma_T \in \Gamma_T} \left(\sum_{k \in \gamma_T} \left| \widehat{x}_\varphi(k) - \widehat{y}_\varphi(k) \right|^p \right)^{\frac{1}{p}}. \tag{1.3}$$

Нулевым элементом пространства $S^p_{\varphi,T}$ называется вектор θ, для которого $\widehat{\theta}_\varphi(k) = 0$ при всех $k \in \mathbb{N}$. Расстояние $\rho(\theta, x)_{p,T}$, $x \in S^p_{\varphi,T}$, называется нормой элемента x и обозначается через $||x||_{p,T} = ||\,x||_{p,\varphi,T}$. Таким образом,

$$||\,x||_{p,T} = ||\,x||_{p,\varphi,T} := \rho(\theta, x)_{p,T} = \sup_{\gamma_T \in \Gamma_T} \left(\sum_{k \in \gamma_T} \left| \widehat{x}_\varphi(k) \right|^p \right)^{\frac{1}{p}}. \tag{1.4}$$

Множество $S^p_{\varphi,T}$ — линейное пространство: операции сложения векторов и умножения их на числа, определенные во всем $\mathscr{X}$, остаются пригодными и для любой пары $x, y \in S^p_{\varphi,T}$ и для любых чисел

λ и μ $\lambda x + \mu y = z \in S^p_{\varphi,T}$. В самом деле, поскольку $z \in \mathscr{X}$, то $\widehat{z}_\varphi(k) = \lambda\widehat{x}_\varphi(k) + \mu\widehat{y}_\varphi(k)$, и если $p \geq 1$, то в силу неравенства Минковского

$$\|z\|_{p,T} = \sup_{\gamma_T \in \Gamma_T} \Bigg(\sum_{k\in\gamma_T} \Big|\lambda\widehat{x}_\varphi(k) + \mu\widehat{y}_\varphi(k)\Big|^p \Bigg)^{\frac{1}{p}} \leq$$

$$\leq \sup_{\gamma_T \in \Gamma_T} \Bigg(|\lambda|(\sum_{k\in\gamma_T} |\widehat{x}_\varphi(k)|^p)^{\frac{1}{p}} + |\mu|(\sum_{k\in\gamma_T} |\widehat{y}_\varphi(k)|^p)^{\frac{1}{p}} \Bigg) \leq$$

$$\leq |\lambda|\|x\|_{p,T} + |\mu|\|y\|_{p,T},$$

если же $p \in (0,1)$, то так как для любых двух чисел a и b

$$|a+b|^p \leq |a|^p + |b|^p, \quad 0 \leq p < 1,$$

имеем

$$\|z\|_{p,T} \leq \sup_{\gamma_T \in \Gamma_T} \Bigg(|\lambda|^p \sum_{k\in\gamma_T} |\widehat{x}_\varphi(k)|^p + |\mu|^p \sum_{k\in\gamma_T} |\widehat{y}_\varphi(k)|^p \Bigg)^{1/p} \leq$$

$$\leq 2^{\frac{1}{p}} \sup_{\gamma_T \in \Gamma_T} \Bigg(|\lambda|(\sum_{k\in\gamma_T} |\widehat{x}_\varphi(k)|^p)^{\frac{1}{p}} + |\mu|(\sum_{k\in\gamma_T} |\widehat{y}_\varphi(k)|^p)^{\frac{1}{p}} \Bigg) \leq$$

$$\leq 2^{\frac{1}{p}}(|\lambda|\|x\|_{p,T} + |\mu|\|y\|_{p,T}),$$

т.е. всегда $z \in S^p_{\varphi,T}$.

Понятно, что при $p \geq 1$ функционал $||\cdot||_{p,T}$, введенный равенством (1.4), удовлетворяет всем аксиомам нормы, а при $p \in (0,1)$ — аксиомы квазинормы, поэтому при $p \geq 1$ $S^p_{\varphi,T}$ — линейное нормированное пространство, а при $p \in (0,1)$ — пространство с квазинормой.

Отметим, что пространства $S^p_{\varphi,T}$ можно также определить как множества всех элементов $x \in \mathscr{X}$, для которых

$$\sup_{k\in\mathbb{N}} |\widehat{x}_\varphi(k)| < \infty,$$

а норма определяется равенством (1.4).

Пространства $S^p_{\varphi,T}$ были введены в 2007 году А.И. Степанцом. Ему также принадлежит следующее утверждение.

Предложение 1.1 (А.И. Степанец). *Пусть* $f \in S^p_{\varphi,T}$, $p \in (0,\infty)$ *и*

$$S[f] = S[f]_\varphi = \sum_{k=1}^{\infty} \widehat{f}_\varphi(k)\varphi_k \tag{1.5}$$

— формальный ряд Фурье элемента f *по системе* φ *и при данном* $n \in \mathbb{N}$

$$S_{\gamma_n}[f] = S_{\gamma_n}[f]_\varphi = \sum_{k\in\gamma_n} \widehat{f}_\varphi(k)\varphi_k, \quad \gamma_n \in \Gamma_n,$$

— частная сумма этого ряда, отвечающая набору γ_n.

Среди всех сумм вида

$$P_{\gamma_n} = \sum_{k\in\gamma_n} \alpha_k\varphi_k$$

при данном γ_n *наименее уклоняется от* f *в пространстве* $S^p_{\varphi,T}$ *частная сумма* $S_{\gamma_n}(f)$:

$$E_{\gamma_n}(f)_{p,T} := \inf_{\alpha_k} ||f - P_{\gamma_n}||_{p,T} = ||f - S_{\gamma_n}(f)||_{p,T}\,. \tag{1.7}$$

Причем

$$||f - S_{\gamma_n}(f)||_{p,T} = \sup_{\gamma_T \subset \mathbb{N}\setminus\gamma_n} \sum_{k\in\gamma_T} |\widehat{f}_\varphi(k)|^p. \tag{1.8}$$

Доказательство. Согласно (1.4) для произвольного элемента $f \in S^p_{\varphi,T}$

$$E^p_{\gamma_n}(f)_{p,T} = \inf_{\alpha_k} \sup_{\gamma_T} \sum_{k\in\gamma_T} |\widehat{f}_\varphi(k) - b_k|^p,$$

где

$$b_k = \begin{cases} \alpha_k, & k \in \gamma_T \cap \gamma_n, \\ 0, & k \overline{\in} \gamma_T \cap \gamma_n. \end{cases}$$

Поэтому всегда

$$E^p_{\gamma_n}(f)_{p,T} \le \sup_{\gamma_T \subset \mathbb{N}} \sum_{k\in\gamma_T\setminus\gamma_n} |\widehat{f}_\varphi(k)|^p. \tag{1.9}$$

В то же время

$$E^p_{\gamma_n}(f)_{p,T} \ge \sup_{\gamma_T \subset \mathbb{N}} \inf_{\alpha_k} \sum_{k\in\gamma_T} |\widehat{f}_\varphi(k) - b_k|^p = \sup_{\gamma_T \subset \mathbb{N}} \sum_{k\in\gamma_T\setminus\gamma_n} |\widehat{f}_\varphi(k)|^p. \tag{1.10}$$

Из соотношений (1.9) и (1.10) делаем вывод, что

$$E^p_{\gamma_n}(f)_{p,T} = \sup_{\gamma_T \subset \mathbb{N}} \sum_{k\in\gamma_T\setminus\gamma_n} |\widehat{f}_\varphi(k)|^p.$$

Для завершения доказательства предложения 1.1 остается заметить, что

$$\sup_{\gamma_T \subset \mathbb{N}} \sum_{k\in\gamma_T\setminus\gamma_n} |\widehat{f}_\varphi(k)|^p = \sup_{\gamma_T \subset \mathbb{N}\setminus\gamma_n} \sum_{k\in\gamma_T} |\widehat{f}_\varphi(k)|^p = ||f - S_{\gamma_n}(f)||_{p,T}.$$

1.2. Рассмотрим примеры некоторых известных пространств, связанных с пространствами $S^p_{\varphi,T}$.

1. Пространства S^p_φ (см., например, [1, 2; 3 (гл. XI)]). Эти пространства строятся по аналогии с пространствами $S^p_{\varphi,T}$, только функционалы

$$\sup_{\gamma_T \in \Gamma_T} \left(\sum_{k\in\gamma_T} |\cdot|^p \right)^{\frac{1}{p}} \tag{1.11}$$

в равенствах, соответствующих (1.2)–(1.4), заменяются функционалами

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} |\cdot|^p \right)^{\frac{1}{p}}. \tag{1.12}$$

Легко видеть, что если в соотношениях (1.2)–(1.4) формально положить $T = \infty$, то функционалы (1.11) будут иметь вид (1.12) и, следовательно, $S^p_{\varphi,T} = S^p_\varphi$.

2. Пространства l_p. Пусть S — множество всех последовательностей комплексных чисел

$$S = \{x = (x_1, x_2 \ldots), \quad x_k \in \mathbb{C}\ \},$$

в котором операции сложения и умножения определяются стандартным способом:

$$(x_1, x_2, \ldots) + (y_1, y_2, \ldots) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots),$$

$$\lambda(x_1, x_2, \ldots) = (\lambda x_1, \lambda x_2, \ldots), \quad \lambda \in \mathbb{C}.$$

В таком случае S — линейное пространство. Выберем в качестве $\mathscr{X}$ множество S, а в качестве φ — систему $e = \{e_k\}_{k=1}^{\infty}$, где $e_k = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots)$, причем

$$\varepsilon_i = \begin{cases} 1, & i = k, \\ 0, & i \neq k. \end{cases}$$

"Скалярное произведение" определим, полагая

$$(x, e_k) = \widehat{x}_e(k) = x_k, \quad (e_k, x) = \overline{x_k}, \quad x = (x_1, \ldots, x_k, \ldots).$$

Для такой операции условия 2) и 3) будут выполняться автоматически. Каждому элементу $x \in \mathscr{X}$ сопоставляется система чисел $\widehat{x}(k)$,

$$\widehat{x}(k) = x_k, \quad k = 1, 2, \ldots. \tag{1.1$'$}$$

и при фиксированных $p \in (0, \infty)$ и $T \in \mathbb{N}$ в соответствии с (1.2) определяются пространства $S^p_{e,T}$:

$$S^p_{e,T} = S^p_{e,T}(\mathscr{X}) = \left\{ x \in \mathscr{X} : \sup_{\gamma_T \in \Gamma_T} \sum_{k \in \gamma_T} |x_k|^p < \infty \right\}. \tag{1.2$'$}$$

В этом случае согласно (1.4) норма элемента $x \in S^p_{e,T}$ имеет вид

$$||\, x||_{p,\, e,T} = \sup_{\gamma_T \in \Gamma_T} \left(\sum_{k \in \gamma_T} |x_k|^p \right)^{\frac{1}{p}}. \tag{1.4$\,'$}$$

Видим, что если формально положить $T = \infty$, то пространства $S^p_{e,T}$ совпадут с известными пространствами l_p, если же $T = 1$, то $S^p_{e,T} = l_\infty$.

3. Пространства Лоренца. Пусть $w = (w_1, w_2, \ldots)$ — произвольная невозрастающая последовательность положительных чисел таких, что $\lim\limits_{k\to\infty} w_k = 0$. Пусть также Γ — множество всех перестановок $\gamma = \{i_k\}_{k=1}^\infty$ натурального ряда $\mathbb{N} = \{1, 2, \ldots\}$. Пространством Лоренца $d(w,p)$ (см., например, [11, p. 175]), $p \in (0,\infty)$, называют пространство всех последовательностей $x \in S$, для которых

$$||x||_{d(w,p)} = \sup_{\gamma\in\Gamma}\left(\sum_{k=1}^\infty w_k|x_{i_k}|^p\right)^{\frac{1}{p}} < \infty.$$

Не трудно заметить, что в случае, когда последовательность $w = (w_1, w_2, \ldots)$ такая, что $w_k = 1$ при $k = 1, 2, \ldots, T$ и $w_k = 0$ при $k > T$, пространства $d(w,p)$ совпадают с пространствами $S^p_{e,T}$.

2. ψ-интегралы. Выделим в пространствах $S^p_{\varphi,T}$ объекты приближения — объединения элементов $f \in \mathscr{X}$, соответствующих в теории аппроксимаций понятию класса функций.

Пусть $\psi = \{\psi_k\}_{k=1}^\infty$ — произвольная система комплексных чисел. Если для данного элемента $f \in \mathscr{X}$, ряд Фурье которого имеет вид (1.5), существует элемент $F \in \mathscr{X}$, для которого

$$S[F]_\varphi = \sum_{k=1}^\infty \psi_k \widehat{f}_\varphi(k)\varphi_k \tag{2.1}$$

т.е. когда

$$\widehat{F}_\varphi(k) = \psi_k \widehat{f}_\varphi(k), \quad k \in \mathbb{N}, \tag{2.2}$$

то вектор F называется ψ-интегралом вектора f. В таком случае записываем $F = \mathcal{J}^\psi f$. Если $\mathfrak{N}$ — некоторое подмножество из $\mathscr{X}$, то через $\psi\mathfrak{N}$ обозначается множество ψ-интегралов всех элементов из $\mathfrak{N}$. В частности, $\psi S^p_{\varphi,T}$– множество ψ-интегралов всех векторов, принадлежащих пространству $S^p_{\varphi,T}$.

Если f и F связаны соотношением (2.1) или (2.2), то иногда удобно f называть ψ-производной элемента F и писать $f = D^{\psi} F = F^{\psi}$.

В дальнейшем предполагается, что система φ подчинена условию

$$\lim_{k\to\infty} |\psi_k| = 0. \tag{2.3}$$

Ясно, что это условие обеспечивает вложение $\psi S^p_{\varphi,T} \subset S^p_{\varphi,T}$ и для такого включения необходимым и достаточным является условие ограниченности множества чисел $|\psi_k|$, $k \in \mathbb{N}$.

В роли объектов аппроксимации в работе будем рассматривать множества ψU^p_{φ} и $\psi U^p_{\varphi,T}$ ψ-интегралов элементов принадлежащих единичным шарам U^p_{φ} и $U^p_{\varphi,T}$ пространств S^p_{φ} и $S^p_{\varphi,T}$ соответственно.

Заметим, что если эти пространства являются полными, а

$$\psi_k \neq 0 \quad \forall k \in \mathbb{N}, \tag{2.4}$$

то согласно (2.2) и определению норм

$$\psi\, U^p_{\varphi} = \left\{ f \in \mathscr{X} : \sum_{k=1}^{\infty} \left| \frac{\widehat{f}_{\varphi}(k)}{\psi_k} \right|^p \leq 1 \right\}$$

и

$$\psi\, U^p_{\varphi,T} = \left\{ f \in \mathscr{X} : \sup_{\gamma_T \in \Gamma_T} \sum_{k\in\gamma_T} \left| \frac{\widehat{f}_{\varphi}(k)}{\psi_k} \right|^p \leq 1 \right\}.$$

Кроме того, для любых $0 < p$, $q < \infty$ и произвольной последовательности ψ, удовлетворяющей условию (2.3), имеет место вложение

$$\psi\, U^q_{\varphi} \subset \psi\, U^q_{\varphi,T} \subset S^p_{\varphi,T}. \tag{2.5}$$

3. Наилучшие приближения и базисные поперечники множеств ψU^p_{φ} и $\psi U^p_{\varphi,T}$ в пространствах $S^p_{\varphi,T}$.

3.1. Пусть f — произвольный элемент пространства $S^p_{\varphi,T}$, γ_n — любой набор из n натуральных чисел, и $\mathcal{F}_n$ — множество всех полиномов вида

$$P_{\gamma_n} = \sum_{k\in\gamma_n} c_k\, \varphi_k,$$

где c_k — некоторые комплексные числа.

Пусть, далее,

$$E_{\gamma_n}(f)_{p,T} = \inf_{P_{\gamma_n} \in \mathcal{F}_n} ||f - P_{\gamma_n}||_{p,T}$$

— наилучшее приближение элемента f посредством полиномов, построенных по заданному набору γ_n из n базисных векторов;

$$\mathscr{E}_{\gamma_n}(f)_{p,T} := ||\, f - S_{\gamma_n}(f)||_{p,T}, \quad S_{\gamma_n}(f) = S_{\gamma_n}(f)_\varphi = \sum_{k \in \gamma_n} \widehat{f}_\varphi(k)\, \varphi_k;$$

$$E_{\gamma_n}(\mathfrak{N})_{p,T} := \sup_{f \in \mathfrak{N}} E_{\gamma_n}(f)_{p,T}$$

— верхняя грань величин $E_{\gamma_n}(f)_{p,T}$ на некотором подмножестве $\mathfrak{N}$ из $S^p_{\varphi,T}$, и

$$\mathscr{E}_{\gamma_n}(\mathfrak{N})_{p,T} := \sup_{f \in \mathfrak{N}} \mathscr{E}_{\gamma_n}(f)_{p,T}.$$

Пусть еще

$$\mathscr{D}_n(\mathfrak{N})_{p,T} := \inf_{\gamma_n} E_{\gamma_n}(\mathfrak{N})_{p,T} \tag{3.1}$$

— величины, которым в случае приближения периодических функций тригонометрическими полиномами соответствуют так называемые тригонометрические поперечники. Поэтому такие величины $\mathscr{D}_n(\mathfrak{N})_{p,T}$ называют базисными поперечниками порядка n множества $\mathfrak{N}$ в пространствах $S^p_{\varphi,T}$.

Кроме того, для любой последовательности комплексных чисел $\psi = \{\psi_k\}_{k=1}^\infty$ и произвольного набора γ_n из n натуральных чисел положим

$$\psi_{\gamma_n} = \{\psi_{\gamma_n}(k)\}_{k=1}^\infty, \quad \text{где} \quad \psi_{\gamma_n}(k) = \begin{cases} 0, & k \in \gamma_n, \\ \psi_k, & k \overline{\in} \gamma_n. \end{cases} \tag{3.2}$$

Обозначим также через $\bar\psi = \{\bar\psi_k\}_{k=1}^\infty$ перестановку последовательности $\{|\psi_k|\}_{k=1}^\infty$ в убывающем порядке.

В принятых обозначениях справедливо следующее утверждение.

Теорема 3.1. *Пусть $\psi = \{\psi_k\}_{k=1}^{\infty}$ — произвольная система комплексных чисел, удовлетворяющая условиям (2.3) и (2.4) и p и q — любые положительные числа, $0 < q \le p$. Тогда при любом $n \in \mathbb{N}$ справедливо равенство*

$$E_{\gamma_n}(\psi U^q_\varphi)_{p,T} = \mathscr{E}_{\gamma_n}(\psi U^q_\varphi)_{p,T} = E_{\gamma_n}(\psi U^q_{\varphi,T})_{p,T} =$$

$$= \mathscr{E}_{\gamma_n}(\psi U^q_{\varphi,T})_{p,T} = \bar{\psi}_{\gamma_n}(1), \tag{3.3}$$

где $\bar{\psi}_{\gamma_n}(1)$ — первый член последовательности $\bar{\psi}_{\gamma_n} = \{\bar{\psi}_{\gamma_n}(k)\}_{k=1}^{\infty}$, являющейся перестановкой в убывающем порядке последовательности $\{|\psi_{\gamma_n}(k)|\}_{k=1}^{\infty}$.

Доказательство. Пусть γ_n — любой набор из n натуральных чисел. В силу предложения 1.1 и вложений (2.5) для получения оценки сверху рассматриваемых величин, достаточно показать, что

$$\mathscr{E}_{\gamma_n}(\psi U^q_{\varphi,T})_{p,T} \le \bar{\psi}_{\gamma_n}(1). \tag{3.4}$$

Пусть f — произвольный элемент $\psi U^q_{\varphi,T}$. Тогда с учетом (1.8) и (2.2) имеем

$$\mathscr{E}^p_{\gamma_n}(f)_{p,T} = ||f - S_{\gamma_n}(f)_\varphi||^p_{p,T} = \sup_{\gamma_T \subset \mathbb{N}\setminus\gamma_n} \sum_{k\in\gamma_T} |\widehat{f}_\varphi(k)|^p =$$

$$= \sup_{\gamma_T \subset \mathbb{N}\setminus\gamma_n} \sum_{k\in\gamma_T} |\psi_k|^p |\widehat{f}^\psi_\varphi(k)|^p, \tag{3.5}$$

где f^ψ — элемент единичного шара пространства $S^q_{\varphi,T}$.

Согласно неравенству Иенсена, для любой неотрицательной последовательности $a = \{a_k\}_{k=1}^{\infty}$, $a_k \ge 0$, имеем

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} a_k^p\right)^{1/p} \le \left(\sum_{k=1}^{\infty} a_k^q\right)^{1/q}, \quad 0 < q \le p. \tag{3.6}$$

Учитывая (3.2) и (3.6), из (3.5) получаем

$$\mathscr{E}_{\gamma_n}(f)_{p,T} \le \bar{\psi}_{\gamma_n}(1)||f^\psi||_{p,T} \le \bar{\psi}_{\gamma_n}(1)||f^\psi||_{q,T} \le \bar{\psi}_{\gamma_n}(1).$$

Следовательно, имеет место соотношение (3.4).

С другой стороны, пусть k' — любое натуральное число, $k' \bar{\in} \gamma_n$, такое, что $|\psi_{k'}| = \bar{\psi}_{\gamma_n}(1)$, и $f_* = \psi_{k'}\varphi_{k'}$ $(\psi_{k'} \neq 0)$. Так как $f_*^{\psi} = \varphi_{k'}$, то при любом $q > 0$ $||f_*^{\psi}||_{q,T} = 1$. Следовательно, f_* принадлежит множеству ψU_{φ}^q при любом $q > 0$, а, значит, и множеству $\psi U_{\varphi,T}^q$. Но ясно, что

$$\mathscr{E}_{\gamma_n}(f_*)_{p,T} = ||f_*||_{p,T} = |\psi_{k'}| = \bar{\psi}_{\gamma_n}(1). \tag{3.7}$$

Таким образом, объединяя соотношения (3.4) и (3.7) с учетом предложения 1.1, приходим к равенству (3.3).

Рассматривая нижние грани обеих частей равенства (3.3) по всевозможным наборам γ_n, видим, что точная нижняя грань правой части (3.3) реализуется набором γ_n^*, который определяется соотношением

$$\gamma_n^* = \{i_k \in \mathbb{N} \;:\; |\psi_{i_k}| = \bar{\psi}_k, \quad k = 1, 2, \ldots, n\}, \quad n = 1, 2, \ldots. \tag{3.8}$$

Согласно (3.2)

$$\bar{\psi}_{\gamma_n^*}(k) = \bar{\psi}(k+n), \quad k = 1, 2, \ldots,$$

тогда в силу (3.1)

$$\mathscr{D}_n(\psi U_{\varphi}^q)_{p,T} = \mathscr{D}_n(\psi U_{\varphi,T}^q)_{p,T} = \bar{\psi}_{\gamma_n^*}(1) = \bar{\psi}_{n+1}.$$

Таким образом, справедливо следующее утверждение.

Теорема 3.2. *Пусть $\psi = \{\psi_k\}_{k=1}^{\infty}$ — произвольная система комплексных чисел, удовлетворяющая условиям (2.3) и (2.4) и p и q — любые положительные числа, $0 < q \leq p$. Тогда при любом $n \in \mathbb{N}$ справедливы равенства*

$$\mathscr{D}_n(\psi U_{\varphi}^q)_{p,T} = \mathscr{D}_n(\psi U_{\varphi,T}^q)_{p,T} = \bar{\psi}_{n+1},$$

где $\bar{\psi} = \{\bar{\psi}_k\}_{k=1}^{\infty}$ — перестановка в убывающем порядке последовательности $\{|\psi_k|\}_{k=1}^{\infty}$.

При этом для набора чисел $\gamma_n^* = \{i_k\}_{k=1}^{n}$, который определяется соотношением (3.8), выполняются равенства

$$\mathscr{D}_n(\psi U_{\varphi}^q)_{p,T} = \mathscr{D}_n(\psi U_{\varphi,T}^q)_{p,T} = E_{\gamma_n^*}(\psi U_{\varphi}^q)_{p,T} = \mathscr{E}_{\gamma_n^*}(\psi U_{\varphi}^q)_{p,T} =$$

$$= E_{\gamma_n^*}(\psi U^q_{\varphi,T})_{p,T} = \mathscr{E}_{\gamma_n^*}(\psi U^q_{\varphi,T})_{p,T} = \sup_{f\in\psi U^q_\varphi} ||f - \sum_{k\in\gamma_n^*} \widehat{f}_\varphi(k)\varphi_k||_{p,T} =$$
$$= \bar{\psi}_{\gamma_n^*}(1) = \bar{\psi}_{n+1}.$$

Таким образом, значения базисных поперечников $\mathscr{D}_n(\psi U^q_\varphi)_{p,T}$ и $\mathscr{D}_n(\psi U^q_{\varphi,T})_{p,T}$ при всех $0 < q \le p$ реализуются суммами Фурье, построенными по областям γ_n^*.

Следует отметить, что аналогичные утверждения в пространствах S^p_φ были получены А.И. Степанцом (см., например, [3 (гл. XI), 10]), а в пространствах $S^{p,\mu}_\varphi$ — А.И. Степанцом и В.И. Рукасовым в работе [5].

3.2. Найдем аналоги теорем 3.1 и 3.2 в случае, когда $q > p > 0$. В этом случае справедливо следующее утверждение.

Теорема 3.3. *Пусть p и q — произвольные числа такие, что $0 < p < q < \infty$, и $\psi = \{\psi_k\}_{k=1}^\infty$ — система чисел, удовлетворяющая условиям (2.3) и (2.4). Тогда при любых $n \in \mathbb{N}$ справедливы равенства*

$$E_{\gamma_n}(\psi U^q_\varphi)_{p,T} = \mathscr{E}_{\gamma_n}(\psi U^q_\varphi)_{p,T} = E_{\gamma_n}(\psi U^q_{\varphi,T})_{p,T} = \mathscr{E}_{\gamma_n}(\psi U^q_{\varphi,T})_{p,T} =$$
$$= \left(\sum_{k=1}^{T} (\bar{\psi}_{\gamma_n}(k))^{\frac{pq}{q-p}} \right)^{\frac{q-p}{pq}}, \tag{3.9}$$

где $\bar{\psi}_{\gamma_n} = \{\bar{\psi}_{\gamma_n}(k)\}_{k=1}^\infty$ — перестановка в убывающем порядке последовательности $|\psi_{\gamma_n}(k)|$, $k \in \mathbb{N}$.

Доказательство этой теоремы аналогично доказательству теоремы 3.1. В силу предложения 1.1 и вложений (2.5) для получения оценки сверху рассматриваемых величин, достаточно показать, что

$$\mathscr{E}_{\gamma_n}(\psi U^q_{\varphi,T})_{p,T} \le \left(\sum_{k=1}^{T} (\bar{\psi}_{\gamma_n}(k))^{\frac{pq}{q-p}} \right)^{\frac{q-p}{pq}}. \tag{3.10}$$

Пусть f — произвольный элемент $\psi U^q_{\varphi,T}$. Тогда с учетом (1.8) и (2.2) имеем

$$\mathscr{E}^p_{\gamma_n}(f)_{p,T} = ||f - S_{\gamma_n}(f)_\varphi||^p_{p,T} = \sup_{\gamma_T \subset \mathbb{N}\setminus\gamma_n} \sum_{k\in\gamma_T} |\widehat{f}_\varphi(k)|^p =$$

$$= \sup_{\gamma_T \subset \mathbb{N}\setminus\gamma_n} \sum_{k\in\gamma_T} |\psi_k|^p |\widehat{f}^{\psi}_{\varphi}(k)|^p,$$

где f^{ψ} — элемент единичного шара пространства $S^q_{\varphi,T}$. Отсюда, в силу неравенства Гельдера, учитывая (3.2), получаем

$$\mathscr{E}^p_{\gamma_n}(f)_{p,T} \le \sup_{\gamma_T \subset \mathbb{N}\setminus\gamma_n} \left(\sum_{k\in\gamma_T} |\psi_k|^{\frac{pq}{q-p}}\right)^{\frac{q-p}{q}} \left(\sum_{k\in\gamma_T} |\widehat{f}^{\psi}_k|^q\right)^{\frac{p}{q}} \le$$

$$\le ||f^{\psi}||^p_{q,T} \sup_{\gamma_T \subset \mathbb{N}\setminus\gamma_n} \left(\sum_{k\in\gamma_T} |\psi_{\gamma_n}(k)|^{\frac{pq}{q-p}}\right)^{\frac{q-p}{q}} \le \left(\sum_{k=1}^{T} (\bar{\psi}_{\gamma_n}(k))^{\frac{pq}{q-p}}\right)^{\frac{q-p}{q}}, \tag{3.11}$$

и, следовательно, имеет место оценка (3.10).

Для завершения доказательства достаточно убедиться в существовании элемента f_*, принадлежащего множеству ψU^q_{φ}, для которого выполняется равенство

$$\mathscr{E}^p_{\gamma_n}(f_*)_{p,T} = \left(\sum_{k=1}^{T} (\bar{\psi}_{\gamma_n}(k))^{\frac{pq}{q-p}}\right)^{\frac{q-p}{q}}, \tag{3.12}$$

С этой целью из множества $\mathbb{N}\setminus\gamma_n$ выберем набор чисел $\gamma^*_T = \{i_1, i_2, \ldots, i_T\}$ таких, что при любом $k = 1, 2, \ldots$, выполняется равенство $|\psi_{\gamma_n}(i_k)| = \bar{\psi}_{\gamma_n}(k)$, а числа c_k, $k = 1, 2\ldots$, такие, что

$$c_k = \begin{cases} |\psi_{\gamma_n}(k)|^{\frac{p}{q-p}} \left(\sum\limits_{k=1}^{T} (\bar{\psi}_{\gamma_n}(k))^{\frac{pq}{q-p}}\right)^{-1/q}, & k \in \gamma^*_T, \\ 0, & k \overline{\in} \gamma^*_T \end{cases}.$$

Рассмотрим элемент

$$h_* = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \varphi_k = \sum_{k\in\gamma^*_T} c_k \varphi_k.$$

В таком случае, учитывая выбор чисел i_k и c_k, имеем

$$||h_*||^q_{q,T} = \sup_{\gamma_T \subset \mathbb{N}} \sum_{k\in\gamma_T} c^q_k = \sum_{k\in\gamma^*_T} c^q_k =$$

$$= \sum_{k=1}^{T} |\psi_{\gamma_n}(i_k)|^{\frac{pq}{q-p}} \left(\sum_{k=1}^{T} (\bar{\psi}_{\gamma_n}(k))^{\frac{p\,q}{q-p}} \right)^{-1} = 1.$$

Поэтому, полагая $f_* = \mathcal{J} h_*$, видим, что элемент f_* принадлежит множеству ψU_{φ}^{q} при любом $q > 0$, а, значит, и множеству $\psi U_{\varphi,T}^{q}$. Для него имеет место соотношение (3.12):

$$\mathscr{E}_{\gamma_n}^{p}(f_*)_{p,T} = \sup_{\gamma_T \subset \mathbb{N} \setminus \gamma_n} \sum_{k \in \gamma_T} |\psi_k|^p c_k^p = \sum_{k \in \gamma_T^*} |\psi_k|^p c_k^p =$$

$$= \sum_{k=1}^{T} |\psi_{\gamma_n}(i_k)|^{\frac{pq}{q-p}} \left(\sum_{k=1}^{T} (\bar{\psi}_{\gamma_n}(k))^{\frac{p\,q}{q-p}} \right)^{-p/q} = \left(\sum_{k=1}^{T} (\bar{\psi}_{\gamma_n}(k))^{\frac{p\,q}{q-p}} \right)^{\frac{q-p}{q}}.$$

Объединяя соотношения (3.11) и (3.12), получаем равенство (3.9).

Рассматривая нижние грани обеих частей равенства (3.9) по всевозможным наборам γ_n из n натуральных чисел, видим, что точная нижняя грань правой части (3.9) реализуется набором γ_n^*, который определяется соотношением (3.8).

Поэтому в силу (3.1)

$$\mathscr{D}_n(\psi\, U_{\varphi}^{q})_{p,T} = \mathscr{D}_n(\psi\, U_{\varphi,T}^{q})_{p,T} =$$

$$= \left(\sum_{k=1}^{T} (\bar{\psi}_{\gamma_n^*}(k))^{\frac{p\,q}{q-p}} \right)^{\frac{q-p}{p\,q}} = \left(\sum_{k=n+1}^{n+T} \bar{\psi}_k^{\frac{p\,q}{q-p}} \right)^{\frac{q-p}{p\,q}}.$$

Таким образом, справедливо следующее утверждение

Теорема 3.4. *Пусть p и q — произвольные числа такие, что $0 < p < q < \infty$, и $\psi = \{\psi_k\}_{k=1}^{\infty}$ — система чисел, удовлетворяющая условиям (2.3) и (2.4). Тогда при любых $n \in \mathbb{N}$ справедливы равенства*

$$\mathscr{D}_n(\psi\, U_{\varphi}^{q})_{p,T} = \mathscr{D}_n(\psi\, U_{\varphi,T}^{q})_{p,T} = \left(\sum_{k=n+1}^{n+T} \bar{\psi}_k^{\frac{p\,q}{q-p}} \right)^{\frac{q-p}{p\,q}}, \qquad (3.13)$$

где $\bar{\psi} = \{\bar{\psi}_k\}_{k=1}^{\infty}$ — перестановка в убывающем порядке последовательности $\{|\psi_k|\}_{k=1}^{\infty}$.

При этом для набора чисел $\gamma_n^* = \{i_k\}_{k=1}^n$, который определяется соотношением (3.8), справедливо равенство

$$\mathscr{D}_n(\psi U_\varphi^q)_{p,T} = \mathscr{D}_n(\psi U_{\varphi,T}^q)_{p,T} = E_{\gamma_n^*}(\psi U_\varphi^q)_{p,T} = \mathscr{E}_{\gamma_n^*}(\psi U_\varphi^q)_{p,T} =$$

$$= E_{\gamma_n^*}(\psi U_{\varphi,T}^q)_{p,T} = \mathscr{E}_{\gamma_n^*}(\psi U_{\varphi,T}^q)_{p,T} =$$

$$= \sup_{f \in \psi U_\varphi^q} ||f - \sum_{k \in \gamma_n^*} \widehat{f}_\varphi(k)\varphi_k||_{p,T} = \left(\sum_{k=n+1}^{n+T} \bar{\psi}_k^{\frac{pq}{q-p}} \right)^{\frac{q-p}{pq}}.$$

Обратим внимание на то, что последовательность $\bar{\psi}_k$, $k \in \mathbb{N}$, в общем случае является ступенчатой. Поэтому, в силу равенства (3.3), такой же характер имеет и величины $\mathscr{D}_n(\psi U_\varphi^q)_{p,T}$ и $\mathscr{D}_n(\psi U_{\varphi,T}^q)_p$ при $0 < q \le p$. Если же $p < q$, то согласно (3.13), эти величины строго убывают с ростом параметра n.

Следует отметить, что в пространствах S_φ^p и $S_\varphi^{p,\mu}$ утверждения, аналогичные теоремам 3.3 и 3.4, были получены А.И. Степанцом (см., например, [10]).

4. Наилучшие n-членные приближения.

4.1. Пусть $n \in \mathbb{N}$, γ_n — произвольный набор из n натуральных чисел и

$$P_{\gamma_n} = \sum_{k \in \gamma_n} \alpha_k \varphi_k,$$

где α_k — некоторые комплексные числа.

Величина

$$e_n(f)_{p,T} = e_n(f)_{\varphi,p,T} := \inf_{\alpha_k,\, \gamma_n} ||f - P_{\gamma_n}||_{p,T} \tag{4.1}$$

называется наилучшим n-членным приближением элемента $f \in S_{\varphi,T}^p$ в пространстве $S_{\varphi,T}^p$.

Величины, аналогичные определяемым равенством (4.1), впервые, по-видимому, рассматривались С.Б.Стечкиным [12], и затем изучались в теории приближений периодических функций многими авторами (см. например [13–24]).

В настоящем разделе рассматриваются величины $e_n(f)_{p,T}$, $p > 0$, определяемые равенством (4.1) в случае, когда приближаемый элемент находится в множестве ψU^q_φ, $0 < q \le p < \infty$. Точнее рассматриваются величины

$$e_n(\psi U^q_\varphi)_{p,T} := e_n(\psi U^q_\varphi; S^p_{\varphi,T}) =$$

$$= \sup_{f\in\psi U^q_\varphi} e_n(f)_{p,T} = \sup_{f\in\psi U^q_\varphi} \inf_{\alpha_k,\,\gamma_n} ||f - P_{\gamma_n}||_{p,T}, \quad 0 < q \le p. \tag{4.2}$$

По-прежнему предполагается, что системы чисел ψ удовлетворяют условиям (2.3). В таком случае, как уже отмечалось, при всех $0 < p,\ q < \infty$ выполняется вложение $\psi U^q_\varphi \subset \psi U^q_{\varphi,T} \subset S^p_{\varphi,T}$ и, следовательно, величина (4.2) имеет смысл.

Имеют место следующие утверждения.

Теорема 4.1. *Пусть $\psi = \{\psi_k\}_{k=1}^\infty$ — система чисел, удовлетворяющая условиям (2.3) и (2.4), p и q — произвольные числа такие, что $0 < q \le p < \infty$. Тогда при любом $n \in \mathbb{N}$ существует натуральное число $s^* \in (n, n+T]$ такое, что*

$$e_n^p(\psi U^q_\varphi)_{p,T} = (s^* - n)\left(\sum_{k=1}^{s^*} \bar\psi_k^{-q}\right)^{-\frac{p}{q}},$$

где $\bar\psi = \{\bar\psi_k\}_{k=1}^\infty$ — перестановка в убывающем порядке последовательности чисел $\{|\psi_k|\}_{k=1}^\infty$. Число s^* определяется равенством

$$\sup_{s\in(n,n+T]} (s-n)\left(\sum_{k=1}^{s} \bar\psi_k^{-q}\right)^{-\frac{p}{q}} = (s^* - n)\left(\sum_{k=1}^{s^*} \bar\psi_k^{-q}\right)^{-\frac{p}{q}}. \tag{4.3}$$

Теорема 4.2. *Пусть $\psi = \{\psi_k\}_{k=1}^\infty$ — система чисел, удовлетворяющая условиям (2.3) и (2.4), p и q — произвольные числа такие, что $0 < p < q < \infty$. Тогда при любом $n \in \mathbb{N}$ справедливо равенство*

$$e_n^p(\psi U^q_\varphi)_{p,T} = \left((s^* - n)^{\frac{q}{q-p}}\left(\sum_{k=1}^{s^*} \bar\psi_k^{-q}\right)^{-\frac{p}{q-p}} + \sum_{k=s^*+1}^{n+T} {}^{1}\ \bar\psi_k^{\frac{pq}{q-p}}\right)^{\frac{q-p}{pq}}, \tag{4.4}$$

где $\bar\psi = \{\bar\psi_k\}_{k=1}^{\infty}$ — перестановка в убывающем порядке последовательности чисел $\{|\psi_k|\}_{k=1}^{\infty}$, а число s^* — наибольшее на промежутке $(n, n+T]$ натуральное число такое, что при всех $s \le s^*$ выполняется неравенство

$$s - n \le \bar\psi_s^q \sum_{k=1}^{s} \bar\psi_k^{-q}. \tag{4.5}$$

Отметим, что в пространствах S^p_φ аналогичные утверждения были получены А.И. Степанцом в работах [1, 2, 3 (гл. XI)], а в пространствах $S^{p,\mu}_\varphi$ — В.И. Рукасовым в работе [6].

Отметим также, что вопрос о нахождении точных значений величин

$$e_n(\psi U^q_{\varphi,T})_{p,T} = \sup_{f\in\psi U^q_{\varphi,T}} e_n(f)_{p,T} =$$

$$= \sup_{f\in\psi U^q_{\varphi,T}} \inf_{\alpha_k,\,\gamma_n} ||f - P_{\gamma_n}||_{p,T}, \quad 0 < p,\, q < \infty,$$

остается открытым.

Доказательство теоремы 4.1 и вспомогательных утверждений во многом повторяет доказательство аналогичных утверждений в работах [3 (гл. XI), 7, 10].

4.2. Прежде всего сформулируем и докажем следующие леммы 4.1. и 4.2, занимающие центральное место в доказательстве теорем 4.1 и 4.2. Для этого введем некоторые обозначения.

Пусть $\mathcal{M}$ — множество всех последовательностей $m = \{m_k\}_{k=1}^{\infty}$, неотрицательных чисел, $m_k \ge 0$ $\forall k \in \mathbb{N}$, таких, что

$$|m| := \sum_{k=1}^{\infty} m_k \le 1, \tag{4.6}$$

и $\mathcal{A}$ — множество всех невозрастающих последовательностей $\alpha = \{\alpha_k\}_{k=1}^{\infty}$ положительных чисел, $\alpha_k > 0$ $\forall k \in \mathbb{N}$, для которых выполняется условие

$$\lim_{k\to\infty} \alpha_k = 0. \tag{4.7}$$

Пусть, далее, γ_n — произвольный набор из n различных натуральных чисел. Положим для любых $m \in \mathcal{M}$, $\alpha \in \mathcal{A}$, $n, T \in \mathbb{N}$ и $r \in (0, \infty)$

$$\mathscr{E}_n(m) = \mathscr{E}_n(\alpha, r, T, m) := \inf_{\gamma_n} \sup_{\gamma_T \subset \mathbb{N} \setminus \gamma_n} \sum_{k \in \gamma_T} \alpha_k m_k^r$$

и

$$\mathscr{E}_n = \mathscr{E}_n(\alpha, r, T) := \sup_{m \in \mathcal{M}} \mathscr{E}_n(m) = \sup_{m \in \mathcal{M}} \mathscr{E}_n(\alpha, r, m, T). \tag{4.8}$$

Лемма 4.1. *Пусть $r \geq 1$ и $\alpha \in \mathcal{A}$. Тогда для любых натуральных n и T существует число $s^* \in (n, n+T]$ такое, что*

$$\mathscr{E}_n(\alpha, r, T) = (s^* - n) \left(\sum_{k=1}^{s^*} \alpha_k^{-\frac{1}{r}} \right)^{-r}. \tag{4.9}$$

Число s^* определяется равенством

$$\sup_{s \in (n, n+T]} (s - n) \left(\sum_{k=1}^{s} \alpha_k^{-\frac{1}{r}} \right)^{-r} = (s^* - n) \left(\sum_{k=1}^{s^*} \alpha_k^{-\frac{1}{r}} \right)^{-r}. \tag{4.10}$$

Точную верхнюю грань в правой части соотношения (4.8) реализует последовательность $m^* = \{m_k^*\}_{k=1}^{\infty}$ из $\mathcal{M}$, для которой

$$m_k^* = \begin{cases} \left(\alpha_k^{\frac{1}{r}} \sum\limits_{i=1}^{s^*} \alpha_i^{-\frac{1}{r}} \right)^{-1} & k \in [1, s^*], \\ 0, & k > s^*. \end{cases} \tag{4.11}$$

Лемма 4.2. *Пусть $r \in (0, 1)$ и $\alpha \in \mathcal{A}$. Тогда для любых натуральных n и T справедливо равенство*

$$\mathscr{E}_n = \mathscr{E}_n(\alpha, r, T) = \left((s^* - n)^{\frac{1}{1-r}} \left(\sum_{k=1}^{s^*} \alpha_k^{-\frac{1}{r}} \right)^{\frac{r}{r-1}} + \sum_{k=s^*+1}^{n+T} \alpha_k^{\frac{1}{1-r}} \right)^{1-r}, \tag{4.12}$$

в котором $s^* = s^*(n,\alpha,r,T)$ — наибольшее натуральное число, $s^* \in (n, n+T]$, удовлетворяющее условию

$$s-n \le \alpha_s^{\frac{1}{r}} \sum_{k=1}^{s} \alpha_k^{-\frac{1}{r}} \quad \text{для всех } s \in (n, s^*]. \tag{4.13}$$

Точную верхнюю грань в правой части соотношения (4.8) реализует такая последовательность $m^{**} = \{m_k^{**}\}_{k=1}^{\infty}$ из $\mathcal{M}$, что

$$m_k^{**} = \begin{cases} \alpha_k^{-\frac{1}{r}} (s^*-n)^{\frac{1}{1-r}} \left(\sum\limits_{i=1}^{s^*} \alpha_i^{-\frac{1}{r}} \right)^{\frac{1}{r-1}} \mathscr{E}_n^{\frac{1}{r-1}} & k \in [1, s^*], \\ \alpha_k^{\frac{1}{1-r}} \mathscr{E}_n^{\frac{1}{r-1}}, & k > s^*. \end{cases} \tag{4.14}$$

4.3. Доказательство лемм. Пусть $r \in (0,\infty)$ и α — произвольная последовательность из множества $\mathcal{A}$. Для любой последовательности $m \in \mathcal{M}$, через $\gamma^*(m) = \{i_1^*(m), i_2^*(m), \dots\}$ обозначим такую перестановку чисел натурального ряда $\mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$, что

$$\alpha_{i_1^*(m)} m_{i_1^*(m)}^r \ge \alpha_{i_2^*(m)} m_{i_2^*(m)}^r \ge \dots . \tag{4.15}$$

Вследствие (4.6) и (4.7) $\alpha_k m_k^r \to 0$ при $k \to \infty$, и всегда найдется хотя бы одна одна перестановка γ^*, удовлетворяющая условию (4.15). Тогда в силу определения величины $\mathscr{E}_n(m)$ имеет место равенство

$$\mathscr{E}_n(m) = \sum_{k=n+1}^{n+T} \alpha_{i_k^*} m_{i_k^*}^r. \tag{4.16}$$

Убедимся, что для нахождения величины $\mathscr{E}_n$ достаточно ограничиться подмножеством $\mathcal{M}'$ всех последовательностей m из $\mathcal{M}$, для которых $i_k^*(m) = k$, $k \in \mathbb{N}$, то есть, для которых числа $\alpha_k m_k^r$ не возрастают. А именно, докажем следующее утверждение.

Предложение 4.1. *Пусть $r \in (0,\infty)$ и $\alpha \in \mathcal{A}$. Тогда справедливо равенство*

$$\mathscr{E}_n = \sup_{m \in \mathcal{M}'} \mathscr{E}_n(m). \tag{4.17}$$

Для этого покажем, что для любой последовательности $m \in \mathcal{M}$ найдется последовательность $m' \in \mathcal{M}'$ такая, что $\mathscr{E}_n(m') \geq \mathscr{E}_n(m)$ и $|m'| \leq |m|$.

При построении последовательности m' будет существенно использоваться следующий факт.

Факт 4.1. *Пусть $\alpha \in \mathcal{A}$, $m \in \mathcal{M}$, $r \in (0,\infty)$ и $s > i \geq 1$. Пусть, кроме того,*

$$\alpha_i m_i^r < \alpha_s m_s^r$$

и $m_s = \bar{m}_s + \bar{\bar{m}}_s$, где значение $\bar{\bar{m}}_s$ определяется условием

$$\alpha_s m_s^r = \alpha_i (m_i + \bar{\bar{m}}_s)^r. \tag{4.18}$$

Тогда если $m' = \{m'_k\}_{k=1}^\infty$, где

$$m'_k = \begin{cases} m_i + \bar{\bar{m}}_s, & k = i \\ \bar{m}_s, & k = s, \\ m_k, & k \neq s,\ k \neq i \end{cases} \tag{4.19}$$

то выполняются неравенства

$$\alpha_{i_k^*(m)} m_{i_k^*(m)}^r \leq \alpha_{i_k^*(m')} {m'}_{i_k^*(m')}^r, \quad k \in \mathbb{N} \tag{4.20}$$

и

$$\mathscr{E}_n(m) \leq \mathscr{E}_n(m'). \tag{4.21}$$

В силу (4.18) и (4.19), для доказательства неравенства (4.20) достаточно показать, что

$$\alpha_i m_i^r \leq \alpha_s \bar{m}_s^r$$

или

$$\alpha_i^{1/r} m_i \leq \alpha_s^{1/r} (m_s - \bar{\bar{m}}_s).$$

Учитывая (4.18), для доказательства последнего неравенства достаточно убедиться, что $\alpha_i^{1/r}\ \bar{\bar{m}}_s \geq \alpha_s^{1/r}\ \bar{\bar{m}}_s$. Данное неравенство вследствие того, что $\alpha \in \mathcal{A}$, выполняется. Таким образом, соотношение (4.20) доказано. Тогда, учитывая (4.16) и (4.20), получаем (4.21):

$$\mathscr{E}_n(m) = \sum_{k=n+1}^{n+T} \alpha_{i_k^*} m_{i_k^*}^r \leq \sum_{k=n+1}^{n+T} \alpha_{i_k^*} {m'}_{i_k^*}^r = \mathscr{E}_n(m').$$

Перейдем к доказательству предложения 4.1. Для построения последовательности m' применим прийом, предложенный при доказательстве аналогичных утверждений в работах [2, 3 (гл. XI), 7].

Первый шаг. Если $i_1^*(m) \neq 1$, то величину $m_{i_1^*}$ представим в виде $m_{i_1^*} = \bar{m}_{i_1^*} + \bar{\bar{m}}_{i_1^*}$, где $\bar{\bar{m}}_{i_1^*}$ подобрано так, чтобы выполнялось равенство $\alpha_1(m_1 + \bar{\bar{m}}_{i_1^*})^r = \alpha_{i_1^*} m_{i_1^*}^r$, и положим $m^{(1)} = \{m_k^{(1)}\}_{k=1}^\infty$, где

$$m_k^{(1)} = \begin{cases} m_1 + \bar{\bar{m}}_{i_1^*}, & k = 1 \\ \bar{m}_{i_1^*}, & k = i_1^*, \\ m_k, & k \neq i_1^*,\ k \neq 1. \end{cases}$$

Если же $i_1^* = 1$, то положим $m^{(1)} = m$. Учитывая факт 4.1, заключаем, что в обеих случаях $i_1^*(m^{(1)}) = 1$, $|m^{(1)}| = |m|$ и

$$\mathscr{E}_n(m) \leq \mathscr{E}_n(m^{(1)}).$$

Второй шаг. Если $i_2^*(m^{(1)}) \neq 2$, то, аналогично, величину $m_{i_2^*}^{(1)}$ представим в виде $m_{i_2^*}^{(1)} = \bar{m}_{i_2^*}^{(1)} + \bar{\bar{m}}_{i_2^*}^{(1)}$, где $\bar{\bar{m}}_{i_2^*}$ подобрано так, чтобы выполнялось равенство $\alpha_2(m_2^{(1)} + \bar{\bar{m}}_{i_2^*}^{(1)})^r = \alpha_{i_2^*}(m_{i_2^*}^{(1)})^r$, и положим $m^{(2)} = \{m_k^{(2)}\}_{k=1}^\infty$, где

$$m_k^{(2)} = \begin{cases} m_1^{(1)}, & k = 1, \\ m_2^{(1)} + \bar{\bar{m}}_{i_2^*}^{(1)}, & k = 2, \\ \bar{m}_{i_2^*}^{(1)}, & k = i_2^*, \\ m_k^{(1)}, & k \neq i_s^*,\ s = 1, 2;\ k \neq 2. \end{cases}$$

Если же $i_2^*(m^{(1)}) = 2$, то положим, соответственно, $m^{(2)} = m^{(1)}$. Учитывая факт 4.1, в обеих случаях будем иметь $i_k^*(m^{(2)}) = k,\ k = 1, 2$, $|m^{(2)}| = |m^{(1)}| = |m|$ и

$$\mathscr{E}_n(m) \leq \mathscr{E}_n(m^{(1)}) \leq \mathscr{E}_n(m^{(2)}).$$

Продолжая эту процедуру далее, на $(n+T)$-м шаге построим последовательность $m^{(n+T)} = \{m_k^{(n+T)}\}_{k=1}^\infty$, для которой $i_k^*(m^{(n+T)}) = k$, $k = \overline{1, n+T}$, $|m^{(n+T)}| = |m|$ и будет выполняться соотношение

$$\mathscr{E}_n(m) \leq \mathcal{E}(m^{(1)}) \leq \mathscr{E}_n(m^{(2)}) \leq \ldots \leq \mathscr{E}_n(m^{(n+T)}).$$

Тогда, положив $m' = \{m'_k\}_{k=1}^{\infty}$, где

$$m'_k = \begin{cases} m_k^{(n+T)}, & k = 1, 2, \ldots, n+T, \\ 0, & k > n+T, \end{cases}$$

учитывая (4.16) и построение последовательности $m^{(n+T)}$, получим $|m'| \le |m^{(n+T)}| = |m|$ и $\mathscr{E}_n(m') = \mathscr{E}_n(m^{(n+T)}) \ge \mathscr{E}_n(m)$. Предложение доказано.

Продолжим доказательство лемм 4.1. и 4.2. Согласно (4.16) и определению множества $\mathcal{M}'$ для любой последовательности $m \in \mathcal{M}'$ имеем

$$\mathscr{E}_n(m) = \sum_{k=n+1}^{n+T} \alpha_k m_k^r = \sum_{k=1}^{n+T} \alpha_k m_k^r - \sup_{\gamma_n \subset [1, n+T]} \sum_{k \in \gamma_n} \alpha_k m_k^r =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \widetilde{\alpha}_k m_k^r - \sup_{\gamma_n} \sum_{k \in \gamma_n} \widetilde{\alpha}_k m_k^r =: \widetilde{\mathscr{E}}_n(m, \widetilde{\alpha}, r), \tag{4.22}$$

где

$$\widetilde{\alpha}_k = \begin{cases} \alpha_k, & k = 1, 2, \ldots, n+T, \\ 0, & k > n+T \end{cases} \tag{4.23}$$

Объединяя соотношения (4.17) и (4.22), делаем вывод, что

$$\mathscr{E}_n = \sup_{m \in \mathcal{M}'} \widetilde{\mathscr{E}}_n(m, \widetilde{\alpha}, r) \le \sup_{m \in \mathcal{M}} \widetilde{\mathscr{E}}_n(m, \widetilde{\alpha}, r) =: \widetilde{\mathscr{E}}_n(\widetilde{\alpha}, r). \tag{4.24}$$

Для оценки величины $\widetilde{\mathscr{E}}_n(\widetilde{\alpha}, r)$ воспользуемся теоремами 1 и 2, полученными в [25], из которых с учетом (4.24) и (4.23) следует, что

$$\mathscr{E}_n \le \widetilde{\mathscr{E}}_n(\widetilde{\alpha}, r) \le (s^* - n) \left(\sum_{k=1}^{s^*} \alpha_k^{-\frac{1}{r}} \right)^{-r}, \quad r \ge 1,$$

где число s^* определяется равенством (4.10); и в случае, когда $r \in (0, 1)$,

$$\mathscr{E}_n \le \widetilde{\mathscr{E}}_n(\widetilde{\alpha}, r) \le \left((s^* - n)^{\frac{1}{1-r}} \left(\sum_{k=1}^{s^*} \alpha_k^{-\frac{1}{r}} \right)^{\frac{r}{r-1}} + \sum_{k=s^*+1}^{n+T} \alpha_k^{\frac{1}{1-r}} \right)^{1-r},$$

где s^* — наибольшее натуральное число, $s^* \in (n, n+T]$, удовлетворяющее условию (4.13).

Для завершения доказательства лемм 4.1 и 4.2 остается заметить, что последовательности m^* и m^{**}, задающиеся соответственно равенствами (4.11) и (4.14) принадлежат множеству $\mathcal{M}$, и что для них имеют место равенства

$$\mathscr{E}_n(m^*) = (s^*-n)\left(\sum_{k=1}^{s^*} \alpha_k^{-\frac{1}{r}}\right)^{-r}, \quad r \geq 1,$$

и

$$\mathscr{E}_n(m^{**}) = \left((s^*-n)^{\frac{1}{1-r}}\left(\sum_{k=1}^{s^*} \alpha_k^{-\frac{1}{r}}\right)^{\frac{r}{r-1}} + \sum_{k=s^*+1}^{n+T} \alpha_k^{\frac{1}{1-r}}\right)^{1-r}, \quad r \in (0,1).$$

Леммы доказаны.

Следует отметить, что идея получения оценок величин $\mathscr{E}_n$ при помощи оценок величин $\widetilde{\mathscr{E}}_n(\widetilde{\alpha}, r)$ принадлежит А.И. Степанцу.

4.4. Доказательство теорем 4.1 и 4.2. В силу (4.1) и (1.7), для любого элемента $f \in S^p_{\varphi,T}$ имеем

$$e_n(f)_{p,T} = \inf_{\gamma_n} E_{\gamma_n}(f)_{p,T}.$$

Откуда, вследствие предложения 1.1, делаем вывод, что

$$e_n(f)_{p,T} = \inf_{\gamma_n} ||f - S_{\gamma_n}(f)||_{p,T} = \inf_{\gamma_n} \sup_{\gamma_T \subset \mathbb{N}\setminus\gamma_n} \sum_{k\in\gamma_T} |\widehat{f}_\varphi(k)|^p.$$

Пусть i_k, $k = 1, 2, \ldots,$ — натуральные числа такие, что

$$|\psi_{i_k}| = \bar{\psi}_k, \quad k \in \mathbb{N}. \tag{4.25}$$

Тогда, согласно (2.2), для любого элемента $f \in \psi U^q_\varphi$ имеем

$$e_n(f)_{p,T} = \inf_{\gamma_n} \sup_{\gamma_T \subset \mathbb{N}\setminus\gamma_n} \sum_{k\in\gamma_T} \bar{\psi}^p_k |\widehat{f}^\psi_\varphi(i_k)|^p, \tag{4.26}$$

и следовательно,

$$e_n^p(\psi U_\varphi^q)_{p,T} = \sup_{f\in\psi U_\varphi^q} \inf_{\gamma_n} \sup_{\gamma_T\subset\mathbb{N}\setminus\gamma_n} \sum_{k\in\gamma_T} \bar\psi_k^p |\widehat{f}_\varphi^\psi(i_k)|^p \le$$

$$\le \sup_{m\in\mathcal{M}} \inf_{\gamma_n} \sup_{\gamma_T\subset\mathbb{N}\setminus\gamma_n} \sum_{k\in\gamma_T} \bar\psi_k^p m_k^r, \tag{4.27}$$

где $r = \frac{p}{q}$, а $\mathcal{M}$ — множество, определенное в подразделе 4.2.

Для оценки последней величины в правой части соотношения (4.27) воспользуемся доказанными выше леммами 4.1 и 4.2. Полагая $\alpha_k = \bar\psi_k^p$, $k\in\mathbb{N}$ видим, что согласно (4.25) и (2.3), так выбранные числа α_k удовлетворяют требованиям лемм. Поэтому, в силу (4.27) и соотношений (4.9) и (4.12), имеют место оценки

$$e_n^p(\psi U_\varphi^q)_{p,T} \le \mathscr{E}_n(\alpha,r,T) = (s^*-n)\left(\sum_{k=1}^{s^*}\alpha_k^{-\frac{1}{r}}\right)^{-r} =$$

$$= (s^*-n)\left(\sum_{k=1}^{s^*}\bar\psi_k^{-q}\right)^{-\frac{p}{q}}, \quad 0<q\le p,$$

где число s^* определяется равенством (4.3); и в случае, когда $0 < p < q$,

$$e_n^p(\psi U_\varphi^q)_{p,T} \le \mathscr{E}_n(\alpha,r,T) =$$

$$= \left((s^*-n)^{\frac{1}{1-r}}\left(\sum_{k=1}^{s^*}\alpha_k^{-\frac{1}{r}}\right)^{\frac{r}{r-1}} + \sum_{k=s^*+1}^{n+T}\alpha_k^{\frac{1}{1-r}}\right)^{1-r} =$$

$$= \left((s^*-n)^{\frac{q}{q-p}}\left(\sum_{k=1}^{s^*}\bar\psi_k^{-q}\right)^{-\frac{p}{q-p}} + \sum_{k=s^*+1}^{n+T}\bar\psi_k^{\frac{pq}{q-p}}\right)^{\frac{q-p}{pq}},$$

где s^* — наибольшее на промежутке $(n, n+T]$ натуральное число такое, что при всех $s\le s^*$ выполняется неравенство (4.5).

Для завершения доказательства теорем остается показать, что в множестве ψU_φ^q имеются элементы f_1 и f_2, для которых

$$e_n^p(f_1)_{p,T} = (s^*-n)\left(\sum_{k=1}^{s^*}\bar\psi_k^{-q}\right)^{-\frac{p}{q}}, \quad 0<q\le p, \tag{4.28}$$

и

$$e_n^p(f_2)_{p,T} =$$

$$= \left((s^* - n)^{\frac{q}{q-p}} \left(\sum_{k=1}^{s^*} \bar{\psi}_k^{-q} \right)^{-\frac{p}{q-p}} + \sum_{k=s^*+1}^{n+T} \bar{\psi}_k^{-\frac{pq}{q-p}} \right)^{\frac{q-p}{pq}}, 0 < p < q. \quad (4.29)$$

Для этого положим

$$h := \sum_{k=1}^{\infty} c_{i_k} \varphi_{i_k} \quad \text{и} \quad g := \sum_{k=1}^{\infty} d_{i_k} \varphi_{i_k},$$

где числа i_k выбраны согласно (4.25),

$$c_{i_k}^q = \begin{cases} \bar{\psi}_k^{-q} \left(\sum\limits_{i=1}^{s^*} \bar{\psi}_i^{-q} \right)^{-1}, & k = 1, 2, \ldots, s^*, \\ 0, & k > s^*. \end{cases} \quad (4.30)$$

и

$$d_{i_k}^q = \begin{cases} \bar{\psi}_k^{-q} (s^* - n)^{\frac{q}{q-p}} \left(\sum\limits_{i=1}^{s^*} \bar{\psi}_i^{-q} \right)^{\frac{q}{p-q}} \widetilde{\mathscr{E}}_n^{\frac{pq}{p-q}}, & k = 1, 2, \ldots, s^*, \\ \bar{\psi}_k^{-\frac{pq}{q-p}} \widetilde{\mathscr{E}}_n^{\frac{pq}{p-q}}, & k \in (s^*, n+T], \\ 0, & k > n+T, \end{cases} \quad (4.31)$$

где $\widetilde{\mathscr{E}}_n = \widetilde{\mathscr{E}}_n(\psi, p, q)$ — величина, равная правой части соотношения (4.29).

Элементы h и g, являясь линейными комбинациями конечного числа элементов φ_j, принадлежат пространствам S_φ^p при любом $p > 0$, и поскольку

$$||h||_{\varphi,q}^q = \sum_{k=1}^{\infty} c_{i_k}^q = 1, \quad ||g||_{\varphi,q}^q = \sum_{k=1}^{\infty} d_{i_k}^q = 1,$$

то $h,\ g \in U_\varphi^q$. Поэтому, полагая $f_1 = \mathcal{J}^\psi h$ и $f_2 = \mathcal{J}^\psi g$, видим, что $f_1,\ f_2 \in \psi U_\varphi^q$ и $f_1^\psi = h,\ f_2^\psi = g$. В силу (4.30),

$$\bar{\psi}_k^p c_{i_k}^p = \begin{cases} \left(\sum\limits_{i=1}^{s^*} \bar{\psi}_i^{-q} \right)^{-\frac{p}{q}}, & k = 1, 2, \ldots, s^*, \\ 0, & k > s^*. \end{cases}$$

Поэтому, вследствие (4.26), справедливо равенство (4.28), чем и завершается доказательство теоремы 4.1.

В силу (4.31)

$$\bar\psi_k^p d_{i_k}^p = \begin{cases} (s^*-n)^{\frac{p}{q-p}} \left(\sum\limits_{i=1}^{s^*} \bar\psi_i^{-q}\right)^{\frac{p}{p-q}} \widetilde{\mathcal{E}}_n^{\ \frac{p^2}{p-q}}, & k=1,2,\ldots,s^*, \\ \bar\psi_k^{\frac{pq}{q-p}} \widetilde{\mathcal{E}}_n^{\ \frac{p^2}{p-q}}, & k\in(s^*,n+T], \\ 0, & k>n+T, \end{cases} \tag{4.32}$$

то есть, при всех $k=1,2,\ldots,s^*$ произведение $\bar\psi_k^p d_{i_k}^p$ постоянно

$$\bar\psi_k^p d_{i_k}^p = (s^*-n)^{\frac{p}{q-p}} \left(\sum_{i=1}^{s^*} \bar\psi_i^{-q}\right)^{\frac{p}{p-q}} \widetilde{\mathcal{E}}_n^{\ \frac{p^2}{p-q}}, \tag{4.33}$$

а при $k\in(s^*,n+T]$ $(s^*<n+T)$ — не возрастает

$$\bar\psi_k^p d_{i_k}^p = \bar\psi_k^{\frac{pq}{q-p}} \widetilde{\mathcal{E}}_n^{\ \frac{p^2}{p-q}}. \tag{4.34}$$

Убедимся, что выполняется неравенство $\bar\psi_{s^*}^p d_{i_{s^*}}^p \geq \bar\psi_{s^*+1}^p d_{i_{s^*+1}}^p$. Это неравенство согласно (4.33) и (4.34), равносильно условию

$$(s^*-n)\left(\sum_{i=1}^{s^*} \bar\psi_i^{-q}\right)^{-1} \geq \bar\psi_{s^*+1}^q.$$

Последнее условие, в силу (4.5), выполняется, поэтому действительно

$$\bar\psi_{s^*}^p c_{i_{s^*}}^p \geq \bar\psi_{s^*+1}^p c_{i_{s^*+1}}^p. \tag{4.35}$$

Объединяя соотношения (4.32) и (4.26), с учетом (4.35), убеждаемся, что действительно имеет место соотношение (4.29), а значит, и равенство (4.4). Теорема 4.2 также доказана.

1. *Степанец А.И.* Аппроксимационные характеристики пространств S_φ^p // Укр. мат. журн. — 2001.— Т. 53, № 3. — С. 392–416.
2. *Степанец А.И.* Аппроксимационные характеристики пространств S_φ^p в разных метриках // Укр. мат. журн. — 2001.— Т. 53, № 8. — С. 1121–1146.

3. *Степанец А.И.* Методы теории приближений: В 2 ч. // Труды Ин–та математики НАН Украины. — Т. 40 — Киев: Ин–т математики НАН Украины, 2002. — Ч.II. — 468 с.
4. *Степанец А.И., Сердюк А.С.* Прямые и обратные теоремы теории приближений функций в пространстве S^p // Укр. мат. журн. — 2002.— Т. 54, № 1. — С. 106–124.
5. *Степанец А.И., Рукасов В.И.* Пространства S^p с несимметричной метрикой // Укр. мат. журн. — 2003. — Т. 54, № 2. — С. 264–277.
6. *Рукасов В.И.* Наилучшие n-членные приближения в пространствах с несимметричной метрикой // Укр. мат. журн. — 2003. — Т. 55, № 4. — С. 500–509.
7. *Степанец А.И., Шидлич А.Л.* Наилучшие n-членные приближения Λ-методами в пространствах S^p_φ // Укр. мат. журн. — 2003. — Т. 55, № 8. — С. 1107–1126.
8. *Степанец А.И.* Наилучшие приближения q-эллипсоидов в пространствах $S^{p,\mu}_\varphi$ // Укр. мат. журн. — 2004. — Т. 56, № 10. — С. 1378–1383.
9. *Степанец А.И.* Наилучшие n-членные приближения с ограничениями // Укр. мат. журн. — 2005. — Т. 57, № 4. — С. 533–553.
10. *Степанец А.И.* Задачи теории приближений в линейных пространствах. // Укр. мат. журн. — 2006.— Т. 58, № 1. — С. 47–92.
11. *Lindenstrauss J., Tzafriri L.* Classical Banach spaces. I, Springer–Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1977. — 190 p.
12. *Стечкин С.Б.* Об абсолютной сходимости ортогональных рядов // Докл. АН СССР. — 1955.–102, № 1. – С.37–40
13. *Исмагилов Р. С.* Поперечники множеств в линейных нормированных пространствах и приближение функций тригонометрическими многочленами // Успехи мат. наук. — 1974. — Т. 29, № 3. — С. 161–178.
14. *Кашин Б. С.* Об экстремальных свойствах полных ортонормированных систем // Тр. МИАН СССР. — 1985. — Т. 172. — С. 187–191.
15. *Кашин Б. С.* О нижних оценках для n-членных приближений // Мат. заметки. — 2001. — Т. 70, № 4. — С. 636–638.
16. *Майоров В. Е.* О линейных поперечниках соболевских классов // Докл. АН СССР. — 1978. — Т. 243, № 5. — С. 1127–1130.
17. *Майоров В. Е.* О линейных поперечниках соболевских классов и цепочках экстремальных подпространств // Мат. сб. — 1980. — Т. 113(155), №3 (11). — С. 437–463.
18. *Белинский Э.С.* Приближение периодических функций многих переменных "плавающей" системой экспонент и тригонометрические поперечники // Докл. АН СССР. — 1985. — Т. 284, № 6. — С. 1294–1297.
19. *Белинский Э. С.* Приближение "плавающей" системой экспонент на классах периодических гладких функций // Мат. сб. — 1987. — Т. 180. — С. 46–

47.

20. *Романюк А. С.* О наилучшей тригонометрической и билинейной аппроксимации классов Бесова функций многих переменных // Укр. мат. журн. — 1995. — Т. 47, № 8. — С. 1097–1111.
21. *Романюк А. С.* Об оценках аппроксимативных характеристик классов Бесова периодических функций многих переменных // Укр. мат. журн. — 1997. — Т. 49, № 9. — С. 1250–1261.
22. *Романюк А. С.* Наилучшие M-членные тригонометрические приближения классов Бесова периодических функций многих переменных // Изв. РАН. Сер. матем., — 2003. — Т. 67, № 2. — С. 61–100.
23. *Темляков В. Н.* О приближении периодических функций многих переменных // Докл. АН СССР. — 1984. — Т. 279, № 2. — С. 301–305.
24. *Темляков В. Н.* Приближение функций с ограниченной смешанной производной // Тр. МИАН СССР. — 1986. — Т. 178. — 112 с.
25. *Степанець А.И., Шидлич А.Л.* Об одной екстремальной задаче для конечных сумм // Проблемы теории приближений функций и смежные вопросы: Сб. трудов Института математики НАН Украины. — 2007. — Т. 4, № 1. — С. 335–351.

Отримано 20.10.2009

Арон Якович Вольперт
(до 100-річчя від дня народження)

Арон Якович Вольперт народився 20 січня 1910 р. у м. Сахновщина Харківської області в сім'ї коваля Якова Яковича Вольперта та кравчині Рози Борисівни Вольперт. У 1925 р., після закінчення трудової школи, навчався в Дніпропетровському хімічному технікумі. У 1929 - 1933 р.р. навчався в Дніпропетровському фізико-хіміко-математичному інституті народного комісаріату освіти (нині - Дніпропетровський державний університет) і отримав кваліфікацію викладача математики Вишів та середніх шкіл. У 1933 - 1939 р.р. виконував обов'язки доцента кафедри математики Чернігівського, а згодом – Артемівського педагогічного інституту. У 1939 - 1941 р.р. навчався в аспірантурі Московського державного університету під науковим керівництвом академіка АН СРСР С.М. Нікольського та академіка АН СРСР П.С. Александрова[2]. Тематику дисертації запропонував П.С. Александров. У стінах Дніпропетровського державного університету 4 липня 1941 А.Я. Вольперт захистив дисер-

[2]Никольский С.М. П.С. Александров и А.Н. Колмогоров в Днепропетровске // Успехи мат. наук. 1983. Июль - август. – Т. 38, вып. 4 (231). – С. 37 - 49.

тацію на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук [3].

Під час Великої вітчизняної війни в 1941 - 1942 р.р. А.Я. Вольперт працював диспетчером машинобудівного заводу в м. Кунгур Пермської обл.; з 10 лютого 1942 р. – курсант 13 учбового танкового полку згодом - механік-водій 173 танкової бригади. У жовтні 1942 р. А.Я. Вольперт рішенням парткомісії 13 учбового танкового полку Уральського військового округу став кандидатом у члени КПРС. Після важкого поранення в березні - вересні 1943 р. проходив лікування в евакуаційному шпиталі.

У 1943 - 1944 р.р. Арон Якович Вольперт виконував обов'язки доцента кафедри вищої математики державного університету м. Перм. У 1944 - 1945 р.р. – завідувач кафедри математики Ворошиловградського педагогічного інституту. З 1945 р. по 1956 р. – завідувач кафедри математики Слов'янського учительського інституту. У жовтні 1947 р. А.Я. Вольперт став членом КПРС. З 1956 р. по 1977 р. – доцент кафедри математики, згодом – кафедри математичного аналізу Слов'янського учительського інституту, потім – Слов'янського педагогічного інституту.

17 січня 1949 року Арон Якович Вольперт перший з викладачів Слов'янського учительського інституту отримав диплом кандидата фізико-математичних наук. У 1952 р. А.Я. Вольперт отримав атестат доцента за кафедрою математики.

А.Я. Вольперт – відомий спеціаліст у галузі математичного аналізу[3], зокрема теорії функцій однієї дійсної змінної[4]. Він розв'язав низку цікавих проблем метричної та дискрептивної теорії функцій, які були поставлені перед ним його вчителями П.С. Александровим, А.М. Колмогоровим та С.М. Нікольським. Так, А.Я. Вольперт узагальнив поняття абсолютної неперервності функції та похідних чисел, встановив еквівалентність абсолютної неперервності й умови Ліпшиця для адитивних функцій множин [1,2,7]. Йому належить аксіоматичне визначення класу гіперболічних функцій, встановлення критерію існування границі бага-

[3]Математика в СССР. 1958-1967: Библиография. – М.: Наука, 1969. – Т.1. – С. 265.

[4]Zentralblatt MATH Database 1931 - 2010. Zbl 0297.26003 // Vol'pert A.Ja. Über den Limes einer mehrdeutigen Funktion, die auf einer partiell geordneten Menge definiert ist // Kazan. Gos. Univ. – 1969. – V.129, №3. – P. 76 - 88; Zbl 0239.26009.Vol'pert, A.Ja. Über eine Verallgemeinerung des Riemannschen Integrals // Funkcional'. Analiz Teor. Funkcii. – 1971. – V.8. – P.167 - 179.

тозначної функції [5], визначеної на частково впорядкованій множині, та інші результати [6].

Арон Якович Вольперт нагороджений орденом Вітчизняної війни II ступеня (1985 р.), медаллю "40 років Перемоги у Великій вітчизняній війні"(1985 р.), медаллю "60 років збройних сил СРСР"(1978 р.), "50 років визволення України"(1994 р.), медаллю "Ветеран труда"(1975 р.).

Помер Арон Якович Вольперт у м. Слов'янську. Останніми словами його були: "Трудна професcия актера".

Висловлюємо щиру подяку сину А.Я. Вольперта – Б.А. Вольперту, онуку А.Я. Вольперта – канд. тех. наук, доценту Московського державного технічного університету ім. Н.Е. Баумана, доценту О.В. Малькову та науковому співробітнику нашого університету Є.Б. Яблучанському за допомогу в пошуках матеріалів про Арона Яковича Вольперта. Дякуємо також аспірантці нашого університету О.Є. Пірус за підготовку статті до друку.

С.М. Чуйко, С.О. Чайченко, О.О. Новіков,
В.О. Божко, О.В. Чуйко, О.А. Кадубовський,
О.С. Чуйко, В.Є. Величко, Є.С. Сілін.

Основні праці А.Я.Вольперта

1. Вольперт А.Я. Эквивалентность абсолютной непрерывности в узком смысле и условия Липшица для аддитивных функций множеств // Известия высших учебных заведений. Математика. – Казань: Изд-во государственного университета им. В.И. Ульянова-Ленина. – 1963. – № 3(34).– С. 23-26.

2. Вольперт А.Я. Об одном обобщении абсолютной непрерывности функции // Известия высших учебных заведений. Математика. – Казань: Изд-во государственного университета им. В.И. Ульянова-Ленина. – 1964. – № 4(41).– С. 30-38.

3. Вольперт А.Я. О гомеоморфизме счетных множеств // Математический сборник. – М.: Изд-во академии наук СССР. – 1951. – Т. 29(71)– С. 677-698.

4. Вольперт А.Я. Аксиоматическое определение гиперболических функций // Учебные записки Казанского университета. – 1969. – Т. 129, кн. 3. – С. 65-75.

5. Вольперт А.Я. О пределе многозначной функции, определенной на частично упорядоченном множестве // Учебные записки Казанского университета. – 1969. – Т. 129, кн. 3. – С. 76-88.

6. Вольперт А.Я. Об одном обобщении производных чисел Дини // Труды тбилисского математического института. – 1960. – Т. XXVII. – с. 71–83.

Міжнародний семінар 'Smoothness, approximation and Related topics'

8-10 червня 2010 р. на базі Слов'янського державного педагогічного університету було проведено міжнародний семінар "Smoothness, approximation and related topics". Цей семінар став черговим заходом, який проводиться спільно з Інститутом математики та інформатики Університету ім. Ф. Шиллера (м. Йєна, Німеччина) у межах німецько-українського наукового проекту, що фінансується Німецьким фондом наукових досліджень (DFG: 436 UKR 113/110/0-1).

Семінар був присвячений актуальним проблемам теорій наближення функцій, просторів функцій та крайових задач для систем звичайних диференціальних рівнянь. Тематика доповідей стосувалася питань узагальненої гладкості, методів тригонометричної апроксимації та апроксимації цілими функціями експоненційного типу, умов вкладення функціональних просторів, ентропії та апроксимаційних чисел, умов існування розв'язків систем нелінійних крайових задач для систем звичайних диференціальних рівнянь та ін.

Учасниками семінару стали науковці Слов'янського державного педагогічного університету: професор С.М. Чуйко, доценти С.О. Чайченко, О.О. Новіков, Є.С. Сілін, аспіранти О.Г. Ровенська, О.В. Старкова, І.О. Бойчук, Д.С. Волковницький, магістрант Т.В. Шулик, а також співробітники Університету ім. Ф. Шиллера професори Х.-Ю. Шмайссер, Д. Хороскі та Х. Кемпка. Учасники відзначили високий науковий та організаційний рівень проведеного семінару, актуальність розглянутих питань та висловили побажання щодо поглиблювання та розширення співпраці науковців Слов'янського державного педагогічного університету та Інституту математики та інформатики Університету ім. Ф. Шиллера.

С.М. Чуйко, С.О. Чайченко