А.А. Кадубовский, к. физ.-мат. н., доцент
ГВУЗ «Донбасский государственный педагогический университет»
(Украина, г. Славянск)

О ЧИСЛЕ НЕРАВНЫХ k_n – УГОЛЬНИКОВ

Известно, что такие хордовые структуры на окружности, как хордовые диаграммы, играют важную роль в теории атомов и молекул, которые тесно связаны с различными областями математики, в частности теории узлов.

Под хордовой структурой на окружности следует понимать семейство «однородных» объектов, состоящих из (одного и того же) конечного числа (возможно ориентированных) хорд с концами в фиксированных точках «базисной» окружности. Эта окружность, в общем случае, может содержать как изолированные точки, так и дополнительную информацию о ее дугах и точках, например, используя окрашенность в конечное число определенных цветов.

В задачах «на перечисление» отношение эквивалентности указанных объектов рассматривают преимущественно в двух аспектах: с точностью до поворота (относительно действия циклической группы) и с точностью до осевой симметрии, поворота или же их композиции (относительно действия группы диэдра).

В первом случае два таких объекта будем называть изоморфными (неизоморфными), а во втором – эквивалентными (неэквивалентными).

Данная статья посвящена задачам о подсчете числа неизоморфных и неэквивалентных $k-$угольников с вершинами среди n фиксированных точек на окружности, являющихся вершинами правильного $n-$угольника ($3 \le k \le n$).

Под $n-$шаблоном будем понимать окружность и n точек на ней, которые являются вершинами правильного $n-$угольника с фиксированной нумерацией последних (числами от 1 до n) в направлении по часовой стрелке – рис. 1 a).

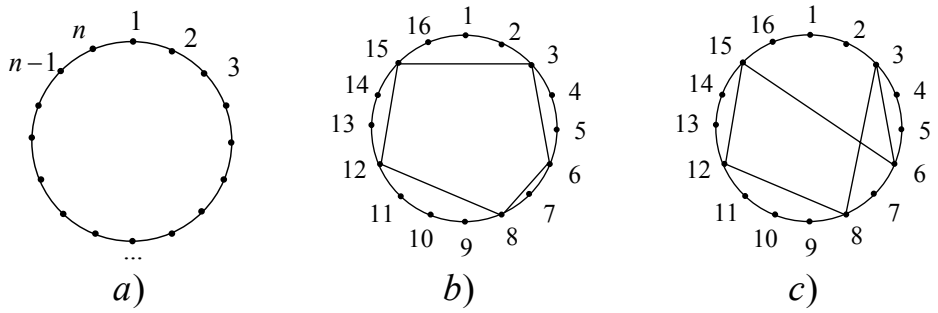

Рис. 1: a) $n-$шаблон; b), c) выпуклый (невыпуклый) $5_{16}-$угольник

Среди вершин $n-$шаблона зафиксируем k точек ($3 \le k \le n$) и построим произвольную замкнутую ломанную с вершинами в указанных точках. Полученный таким образом выпуклый (невыпуклый) многоугольник будем называть выпуклым (невыпуклым) k_n-угольником – рис. 1 b), c).

Через $\Im_{n,k}$ обозначим множество всевозможных k_n-угольников, построенных на $n-$шаблоне. Подмножество $\Im_{n,k}$, состоящее из выпуклых k_n-угольников, обозначим как $L_{n,k}$, а невыпуклых k_n-угольников – $P_{n,k}$.

n_n – угольники, что естественно, будем называть n – угольниками, а для множества $\Im_{n,n}$ использовать сокращенное обозначение $\Im_n$.

В работе [1] установлены формулы для нахождения числа $N^*(n)$ неизоморфных и числа $N^{**}(n)$ неэквивалентных n – угольников из класса $\Im_n$ – соотношения (1) и (2) соответственно

$$N^*(n)=\begin{cases}\dfrac{1}{2n^2}\left(\sum\limits_{j:n}\varphi^2\left(\dfrac{n}{j}\right)\cdot j!\cdot\left(\dfrac{n}{j}\right)^j\right), & n=2m+1\\ \dfrac{1}{2n^2}\left(\sum\limits_{j:n}\varphi^2\left(\dfrac{n}{j}\right)\cdot j!\cdot\left(\dfrac{n}{j}\right)^j+2^{\frac{n}{2}}\cdot\left(\dfrac{n}{2}\right)\cdot\left(\dfrac{n}{2}\right)!\right), & n=2m,\end{cases}\qquad(1)$$

где $\varphi(q)$ – функция Эйлера;

$$N^{**}(n)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}\left(N^*(n)+2^{(n-3)/2}\cdot\left(\dfrac{n-1}{2}\right)!\right), & n=2m+1\\ \dfrac{1}{2}\left(N^*(n)+2^{(n-8)/2}\cdot(n+4)\cdot\left(\dfrac{n-2}{2}\right)!\right), & n=2m.\end{cases}\qquad(2)$$

В работе [3] установлена равносильность задач о подсчете числа неизоморфных (неэквивалентных) k_n – угольников из класса $L_{n,k}$ с соответствующими трактовками классической «задачи об ожерельях (с k и $n-k$ бусинами двух сортов)». Используя результаты работы [2], в [3] приведены формулы для нахождения числа $L^*_{n,k}$ неизоморфных и числа $L^{**}_{n,k}$ неэквивалентных k_n – угольников из класса $L_{n,k}$

$$L^*_{n,k}=\frac{1}{n}\cdot\sum_{i:(n,k)}\varphi(i)\cdot C^{\frac{k}{i}}_{\frac{n}{i}},\quad L^{**}_{n,k}=\frac{1}{2}\left(L^*_{n,k}+C^{\left[\frac{k}{2}\right]}_{\left[\frac{n-k}{2}\right]+\left[\frac{k}{2}\right]}\right),\qquad(3)$$

где (n,k) – наибольший общий делитель чисел n, k; $[q]$ – целая часть числа q.

Результаты, связанные с решением задачи о подсчете числа неэквивалентных k_n – угольников из классов $\Im_{n,k}$ и $P_{n,k}$, автору неизвестны.

Решению указанных задач и посвящена данная работа.

Теорема 1. [3] Число $N^*_{n,k}$ неизоморфных k_n – угольников из класса $\Im_{n,k}$ можно вычислить с помощью формул

$$n\cdot N^*_{n,k}=\frac{A^k_n}{2k}+\begin{cases}\sum\limits_{j:(n,k);j\neq1}\phi^2(j)\cdot\dfrac{j}{2k}\cdot A^{\frac{k}{j}}_{\frac{n}{j}}\cdot(j)^{\frac{k}{j}-1}, & n=2t+1\\ \sum\limits_{j:(n,k);j\neq1}\phi^2(j)\cdot\dfrac{j}{2k}\cdot A^{\frac{k}{j}}_{\frac{n}{j}}\cdot(j)^{\frac{k}{j}-1}, & \begin{cases}n=2t,\\ k\neq2m\end{cases}\\ \sum\limits_{j:(n,k);j\neq1;2}\phi^2(j)\cdot\dfrac{j}{2k}\cdot A^{\frac{k}{j}}_{\frac{n}{j}}\cdot(j)^{\frac{k}{j}-1}+A^{\frac{k}{2}}_{\frac{n}{2}}\cdot2^{\frac{k}{2}-2}\left(\dfrac{k+2}{k}\right), & \begin{cases}n=2t,\\ k=2m.\end{cases}\end{cases}\qquad(4)$$

Следствие 1. Число неизоморфных k_n – угольников из класса $P_{n,k}$ можно вычислить с помощью соотношения

$$P^*_{n,k} = N^*_{n,k} - L^*_{n,k}. \tag{5}$$

Теорема 2. (основная) Число неэквивалентных k_n – угольников из класса $\Im_{n,k}$ можно вычислить с помощью формул

$$N^{**}_{n,k} = \frac{1}{2}\left(N^*_{n,k} + \frac{1}{n} \cdot R_{n,k} \right), \tag{6}$$

$$\frac{R_{n,k}}{n} = \begin{cases} A_{\frac{n-2}{2}}^{\frac{k-1}{2}} \cdot 2^{\frac{k-3}{2}}, & n = 2m+2, \quad k = 2l+1 \\ A_{\frac{n-2}{2}}^{\frac{k}{2}-1} \cdot 2^{\frac{k}{2}-4} \cdot \left(2n - k + 4 \cdot \frac{n}{k}\right), & n = 2m+2, \quad k = 2l \\ A_{\frac{n-1}{2}}^{\frac{k-1}{2}} \cdot 2^{\frac{k-3}{2}}, & n = 2m+1, \quad k = 2l+1 \\ \frac{1}{k} \cdot A_{\frac{n-1}{2}}^{\frac{k}{2}} \cdot 2^{\frac{k}{2}-2} \left(k+2\right), & n = 2m+1, \quad k = 2l. \end{cases} \tag{7}$$

Следствие 2. Число неэквивалентных k_n – угольников из класса $P_{n,k}$ можно вычислить с помощью соотношения

$$P^{**}_{n,k} = N^{**}_{n,k} - L^{**}_{n,k}. \tag{8}$$

Замечание. При $k = n$ соотношения (4) и (6), (7) совпадают с формулами (1) и (2) соответственно. Таким образом, приведенные теоремы 1 и 2 является обобщением классических результатов работы [1].

Следует также отметить, что существует тесная связь между классом $\Im_n$ и множеством двухцветных хордовых O – диаграмм (с n хордами) с одним черным (или белым) циклом [4]. А именно, при нечетных n число неизоморфных (неэквивалентных) n – угольников из класса $\Im_n$ вдвое меньше, чем число неизоморфных (неэквивалентных) двухцветных диаграмм указанного типа.

Литература

1. Golomb S.W., Welch L.R. On the Enumeration of Polygons / S.W. Golomb, L.R. Welch // The American Mathematical Monthly – 1960, Vol. 67, № 4. – P. 349 – 353.

2. Яковенко Д.И. Задача об ожерельях / Д.И. Яковенко // Вестник Омского университета, 1998. – Вып. 2. – С. 21 – 24.

3. Кадубовський О.А. Про число нерівних k – кутників побудованих на колі з n точками / О.А. Кадубовський, О.М. Буглак // Збірник наукових праць фізико-математичного факультету СДПУ. – 2011. – № 1. – С. 61 – 72.

4. Кадубовський О.А. Двокольорові O – діаграми з одним чорним циклом / О.А. Кадубовський, Ю.С. Саприкіна, С.Ю. Мазур // Пошуки і знахідки. Серія: фізико-математичні науки. – 2010. – Вип. 10, Том I. – С. 51 – 60.