Інститут математики НАН України
Донбаський державний педагогічний університет

Матеріали Міжнародної математичної конференції Крайові задачі, теорія функцій та їх застосування з нагоди 75-річчя з дня народження академіка А. М. Самойленка

12 – 14 червня 2013 р.

Слов'янськ

ІНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ НАН УКРАЇНИ
ДЕРЖАВНИЙ ВИЩИЙ НАВЧАЛЬНИЙ ЗАКЛАД
«ДОНБАСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ ПЕДАГОГІЧНИЙ
УНІВЕРСИТЕТ»

КРАЙОВІ ЗАДАЧІ, ТЕОРІЯ ФУНКЦІЙ ТА ЇХ ЗАСТОСУВАННЯ

**Міжнародна математична конференція
з нагоди 75-річчя з дня народження
академіка А.М. Самойленка**

МАТЕРІАЛИ КОНФЕРЕНЦІЇ

12—14 червня 2013 року

Слов'янськ
2013

УДК 517.9
ББК 22.151.62я431

ПРОГРАМНИЙ КОМІТЕТ

ОРГАНІЗАЦІЙНИЙ КОМІТЕТ

ВІДПОВІДАЛЬНІ ЗА ВИПУСК

Старкова О.В., Любима О.Є., Куліш П.В.

Крайові задачі, теорія функцій та їх застосування. Міжнародна математична конференція з нагоди 75-річчя з дня народження академіка А.М. Самойленка: матеріали конференції. — Слов'янськ: ДДПУ, 2013. — 47 с.

Академік А.М. Самойленко
та Слов'янський державний педагогічний університет

2 січня 2013 року виповнилося 75 років із дня народження видатного українського математика, дійсного члена Національної Академії наук України, Заслуженого діяча науки і техніки України, дійсного члена Європейської академії наук, іноземного члена академії Peloritana dei Pericolanti (м. Мессіна, Італія), академіка-секретаря Відділення математики НАН України, керівника визнаної в світі Київської школи теорії нелінійних коливань та теорії імпульсних систем, академіка Анатолія Михайловича Самойленка.

Усе своє життя академік А.М. Самойленко працює в галузі якісної теорії диференціальних рівнянь і нелінійної механіки. Його оригінальні та глибокі дослідження в з'ясуванні поведінки інтегральних кривих та інваріантних тороїдальних і компактних многовидів та їх околів, розробки теорії збурень тороїдальних многовидів, створення нових та розвиток асимптотичних методів нелінійної механіки, розробки теорії багаточастотних коливань зробили великий внесок у їх розв'язання поряд з фундаментальними дослідженнями М.М. Боголюбова, Ю.О. Митропольського, А.М. Колмогорова, В.І. Арнольда, Ю. Мозера і визначають нові напрями їх вивчення.

Про світове визнання наукової діяльності вченого свідчать загальновизнані в математичній літературі терміни "функція Гріна-Самойленка "чисельно-аналітичний метод Самойленка". Анатолій Михайлович разом з учнями опублікував монографії, які зробили фундаментальний внесок у розвиток теорії багаточастотних коливань, асимптотичних методів, імпульсних систем та чисельно-аналітичних методів. Він — автор понад 600 наукових праць, серед яких 30 монографій та 15 підручників і посібників, здебільшого перевиданих англійською мовою.

А.М. Самойленко — член редакційних колегій українських та зарубіжних журналів, серед яких "Український математичний журнал "Доповіді Національної академії наук України "Нелінійні коливання "У світі математики "Nonlinear Mathematical Physics "Memoirs on Differential Equations and Mathematical Physics" та інші.

А. М. Самойленко нагороджений Орденом Дружби народів (1984) та Орденом "За заслуги" III ступеня (2003), Орденом князя Ярослава Мудрого V ступеня (2008) та IV ст. (27 квітня 2013), Почесною Грамотою Президії Верховної Ради України (1987), є лауреатом Державних премій України в галузі науки і техніки (1985, 1996), Державної премії України в галузі освіти (2012), Республіканської комсомольської премії ім. М. Островського (1968), премій Академії наук України ім. М. Крилова (1981) та М. Боголюбова (1998), премій НАН України ім. М. Лаврентьєва (2000), М. Остроградського (2004) та Ю. Митропольського (2010), "Соросівський професор" (1998), Заслужений діяч науки і техніки України (1998), дійсний член Європейської академії наук.

А.М. Самойленко — засновник Малинської благодійної організації "Фонд сприяння розвитку здібностей обдарованих дітей та юнацтва". За значні досягнення у науковій діяльності, сприяння розвитку здібностей обдарованих дітей та юнацтва міста Малина 24 лютого 1999 року присвоєно звання "Почесний громадянин міста Малина".

Серед учнів А.М. Самойленка — 33 доктори та 83 кандидати фізико-математичних наук, дійсні члени та члени-кореспонденти академій наук, професори України, Казахстану і Таджикистану, професори Чилі, В'єтнаму, Сирії, Йорданії, Пакистану, Болгарії, Угорщини та Польщі.

Слов'янський державний педагогічний університет, на сьогодні — Донбаський державний педагогічний університет, успішно співпрацює з Інститутом математики НАН України у рамках Договору про співробітництво. Директор Інституту математики академік А.М. Самойленко тривалий час працював за сумісництвом професором Слов'янського державного педагогічного університету, результатом чого стали запрошення талановитої молоді для навчання в Інституті математики НАН України, стажування викладачів Слов'янського державного педагогічного університету в Інституті математики НАН України, численні захисти дипломних і магістерських робіт, захисти двох докторських та 12 кандидатських дисертацій.

Слов'янським державним педагогічним університетом спільно з Інститутом математики НАН України проведено наукові конференції та семінари

— "Фрактальні об'єкти в математиці, фізиці та біології" , Слов'янськ, квітень 1991 року;

— "Методи аналізу імпульсних крайових задач для систем звичайних диференціальних рівнянь" , Слов'янськ, серпень 1992 року;

— "Методи теорії наближень і аналізу крайових задач для звичайних диференціальних рівнянь" , квітень 2002 року;

— "Методи теорії наближень і аналізу крайових задач для звичайних диференціальних рівнянь" , червень 2006 року;

— науково-теоретичний семінар "Теорія апроксимації в Європейському контексті: підходи, додатки, перспективи" , серпень 2007 року;

— "Методи теорії наближень і аналізу крайових задач для звичайних диференціальних рівнянь" , жовтень 2007 року;

— міжнародний науковий семінар "Теорія функціональних просторів та їх застосування" , вересень 2009 року;

— міжнародний науковий семінар "Smoothness, approximation and related topics" , червень 2010 р.;

— науковий семінар "Нетерові крайові задачі для диференціально-алгебраїчних систем" , 23 березня 2011 року;

— науковий семінар "Нетерові крайові задачі для функціонально-диференціальних та диференціально-алгебраїчних систем" , 2 червня 2012 року.

У 1995 році побачила світ монографія "Обобщенно-обратные операторы и нетеровы краевые задачи" , написана академіком А.М. Самойленком разом з учнями. У 2004 році цю монографію було перевидано англійською мовою в США — Boichuk A.A., Samoilenko A.M. Generalized inverse operators and Fredholm boundary-value problems. — Utrecht; Boston: VSP, 2004.

Протягом останніх п'ятнадцяти років в Інституті математики науковцями Слов'янського державного педагогічного університету були захищені одна докторська та 12 кандидатських дисертацій. За цей час у відділі звичайних диференціальних рівнянь Інституту математики НАН України, який очолює академік А.М. Самойленко були захищені дисертації на здобуття наукового ступеню кандидата фіз.-мат. наук випускниками Слов'янського державного педагогічного університету

— Журавльова Валерія Пилиповича;
— Чуйка Сергія Михайловича;
— Чуйко Олени Вікторівни;
— Чуйка Олексія Сергійовича;
— Кадубовського Олександра Анатолійовича;
— Старкової Ольги Володимирівни.

У відділі теорії функцій Інституту математики НАН України, який на той час очолював член-кореспондент НАН України О.І. Степанець, були захищені дисертації на здобуття наукового ступеню кандидата фіз.-мат. наук випускниками Слов'янського державного педагогічного університету

— Рукасова Володимира Івановича;
— Новікова Олега Олександровича;
— Федоренка Олексія Сергійовича;
— Чайченка Станістава Олеговича;
— Сіліна Євгена Сергійовича;
— Овсія Євгена Юрійовича.

У 2003 році Рукасов Володимир Іванович захистив дисертацію на здобуття наукового ступеню доктора фіз.-мат. наук (науковий консультант — член-кореспондент НАН України О.І. Степанець).

У 2009 році у відділі звичайних диференціальних рівнянь Інституту математики НАН України, який очолює академік А.М. Самойленко, було захищено дисертацію на здобуття наукового ступеню доктора фіз.-мат. наук Чуйка Сергія Михайловича (науковий консультант — академік А.М. Самойленко).

Випускники магістратури та аспірантури Слов'янського державного педагогічного університету Є.Ю. Овсій та І.О. Бойчук на сьогодні — працівники Інститутів НАН України.

Академік А.М. Самойленко постійно опікується підвищенням наукового рівня співробітників Слов'янського державного педагогічного університету. Так, за сприяння академіка А.М. Самойленка

у 2008 році започатковано видання "Вісника Слов'янського державного педагогічного університету. Серія математика".

Постановою Бюро відділення математики Національної академії наук України (протокол № 9, п.5 від 24 грудня 2009 року) у складі відділу "Диференціальні рівняння та теорія коливань" спільно з Інститутом математики НАН України відкрито міжвідомчу лабораторію "Крайові задачі теорії диференціальних рівнянь". Співробітниками від Слов'янського державного педагогічного університету лабораторії є:

— Чуйко С.М. — співголова лабораторії, головний науковий співробітник, доктор фізико-математичних наук, професор;
— Чайченко С.О. — старший науковий співробітник, кандидат фізико-математичних наук, доцент;
— Старкова О.В. — старший науковий співробітник, кандидат фізико-математичних наук, доцент.

Лабораторію створено для підтримання перспективного напрямку розвитку якісної теорій диференціальних рівнянь — узагальнено-обернені оператори та нормально-розв'язні (фредгольмові, нетерові, n-нормальні та d-нормальні) крайові задачі. За даною тематикою у відділі за останні 15 років захищено 8 кандидатських дисертацій (керівник член-кореспондент НАН України, проф. О.А. Бойчук) та дві докторські дисертації (науковий консультант — академік НАН України А.М. Самойленко).

У травні 2012 року за сприяння розвитку наукових досліджень і вагомий особистий внесок у підготовку та виховання науково-педагогічних кадрів вищої кваліфікації для Слов'янського державного педагогічного університету була висловлена підтримка навчально-методичного комплексу "Диференціальні рівняння" на здобуття Державної премії України в галузі освіти 2012 року в номінації "вища освіта". Державна премія в галузі освіти лауреатам 2012 року академіку НАН України А.М. Самойленку та його учням була урочисто вручена 21 листопада 2012 року.

Рішенням Вченої ради Слов'янського державного педагогічного університету від 26 квітня 2007 року за сприяння розвитку наукових досліджень і вагомий особистий внесок у підготовку та виховання науково-педагогічних кадрів вищої кваліфікації для Слов'янського державного педагогічного університету присвоєно звання Почесного професора і внесено до реєстру Почесних професорів Слов'янського державного педагогічного університету директора Інституту математики НАН України, доктора фіз.-мат. наук, професора, академіка-секретаря НАН України Самойленка А.М.

Перестюк М.О., Бойчук О.А., Станжицький О.М., Романюк А.С., Чуйко С.М., Чайченко С.О.

Построение решений краевой задачи для класса нильпотентных систем при помощи функций управления с ненулевым средним

Астахова Т.Н., Зуев А.Л.

ctn_af@mail.ru, al_zv@mail.ru

Институт прикладной математики и механики НАНУ, Украина

В работе исследована двухточечная задача управления для класса нильпотентных систем с ненулевыми краевыми условиями и функциями управления с ненулевым средним значением.

Р. Брокетт в работе [1] выделил классы нильпотентных систем, описываемых дифференциальными уравнениями

$$\dot{z} = u, \quad \dot{Y} = zu^T - uz^T, \quad u \in \mathbb{R}^m, \quad (1)$$

где u – вектор управления, Y – антисимметрическая $m \times m$ матрица. В координатной записи система (1) примет вид

$$\dot{x} = u_1 f_1(x) + u_2 f_2(x) + ... + u_m f_m(x), \quad x \in \mathbb{R}^n, \ n = \tfrac{m(m+1)}{2}, \quad (2)$$

где x – вектор состояния системы. Векторные поля $f_i(x)$ являются аффинными отображениями в $\mathbb{R}^n$. Система (2) с $m = 2$ известна в литературе как “интегратор Брокетта”. Исследование данного класса систем с $m > 2$ представляет большой интерес в теории управления.

В данной работе рассмотрена задача построения функций управления, которые обеспечивают существование решений системы (2), удовлетворяющих заданным краевым условиям $x(0) = x^0$, $x(\tau) = x^1$ при некотором $\tau > 0$. Для решения этой задачи использовано представление решений системы (2) в виде ряда Вольтерры:

$$x(\tau) = x^0 + \sum_{i=1}^{m} f_i(x^0) \int_0^\tau u_i(t)dt +$$

$$+\frac{1}{2} \sum_{i \le j \le m} \left(\frac{\partial f_j(x)}{\partial x} f_i(x) + \frac{\partial f_i(x)}{\partial x} f_j(x) \Big|_{x=x^0} \right) \int_0^\tau u_i(t)dt \int_0^\tau u_j(t)dt +$$

$$+\frac{1}{2} \sum_{i < j \le m} [f_i, f_j](x^0) \int_0^\tau \int_0^t \{u_j(t)u_i(s) - u_i(t)u_j(s)\} \, ds \, dt, \quad (3)$$

где $\frac{\partial f_i(x)}{\partial x}$ – матрица Якоби, $[f_i, f_j](x)$ – скобка Ли векторных полей.

В докладе подробно исследован случай $m = 4$ и предложено конструктивное описание функций управления для решения поставленной краевой задачи.

1. Brockett R. W. Control Theory and Singular Riemannian Geometry. New Directions in Applied Mathematics, Eds. P.J. Hilton, G.S. Young. – New York: Springer, 1981, P. 11–27.

Mathematical models of isolated population with delay

Bihun Ya.I., Markovskiy P.I., Rozhko I.O.

yaroslav.bihun@gmail.com

Yuriy Fedkovych Chernivtsi National University, Ukraine

Hutchinson model (1948) was one of the first mathematical models of isolated population with constant delay.

Two types of model are investigated in this scientific work. The first model is with variable delay

$$\frac{du(t)}{dt} = ru(t)(1 - \frac{u(t - \tau(t, u(t)))}{K}),$$

where r - coefficient of linear growth, K - constant, which is a stationary solution and is determined by the capacity of the environment, shows delay of development of population or time needed for resources recovery.

Modified continuous Runge-Kutta methods for differential equations with state dependent delay are used to find numerical solutions of model (1). Adjusted continuous Runge-Kutta third order method is used to solve this model. The result of this investigation is a programmed algorithm which allows to find numerical solutions of differential equations with state dependent delay such as:

$$\frac{du(t)}{dt} = f(t, u(t), u(t - \tau(t, u(t)))), t \geq t_0, \tag{1}$$

with initial condition $u(t) = \varphi(t)$, $t \leq t_0$; $\varphi \in C$, $u(t_0) = \varphi(t_0)$.

This model is represented by a differential equation of neutral type

$$\frac{du(t)}{dt} = ru(t)\big(1 - \frac{u(t - \tau)}{K} + c\frac{d}{dt}(1 - \frac{u(t - \tau)}{K})\big) \tag{2}$$

which takes into account the background of the population development; $c > 0$, if population is growing, $c < 0$ in case of is decring. In case $c = 0$ we have classical Hutchinson model. Let τ, r, c - be positive numbers, such that $rc < 1$, $r\tau c < \beta_0(1 - r^2c_2)$, where β_0 is the unique positive root in the interval $(\pi/2, \pi)$ of the equations $\beta_0 \tan(\beta_0) + (\tau/c) = 0$. Then the solution $u = K$ of the equations (2) is linearly asymptotically stable. Modified Adams methods for piecewise smooth function are used to find numerical solutions of model (2). Based on the generalized Taylor's formula. Computer modeling program was developed on .NET framework using $C\#$ language to investigate model (2).

1. Gopalsamy K. Stability and Oscillations in Delay Differential Equations of Population Dynamics. – Dordrecht/Boston/London: Kluwer Academic Publishers, 1992.
2. Hairer E., Nersett S.P., Wanner G. Solving Ordinary Differential Equations I: Nonstiff Problems. – New York/Heidelberg/Berlin: Springer-Verlag, 1977.

Слабконелінійні крайові задачі для систем інтегро-диференціальних рівнянь

Бойчук О.А., Головацька І.А.
boichuk.aa@gmail.com, holovatska.iv@gmail.com
Інститут математики НАНУ, Україна

За допомогою теорії псевдообернених за Муром-Пенроузом матриць [1-4] дослідженно умови розв'язності та запропоновано ітераційні алгоритми побудови розв'язків крайової задачі для слабконелінійних систем інтегро-диференціальних рівнянь з малим параметром ε:

$$\dot{x}(t) - \Phi(t)\int_a^b [A(s)x(s) + B(s)\dot{x}(s)]ds = f(t) + \varepsilon\int_a^b K(t,s)Z(x(s,\varepsilon),s,\varepsilon)ds, \quad (1)$$

$$\ell x(\cdot) = \alpha + \varepsilon J(x(\cdot,\varepsilon),\varepsilon). \quad (2)$$

Знайдено умови існування розв'язку $x = x(t,\varepsilon)$:

$$x(\cdot,\varepsilon) \in D_2[a,b],\ \dot{x}(\cdot,\varepsilon) \in L_2[a,b],\ x(t,\cdot) \in C[0,\varepsilon_0],$$

крайової задачі (1), (2), який перетворюється при $\varepsilon = 0$ в один із розв'язків $x(t,0) = x_0(t,c_{r_2})$ породжуючої крайової задачі:

$$\dot{x}(t) - \Phi(t)\int_a^b \Big[A(s)x(s) + B(s)\dot{x}(s)\Big]ds = f(t), \quad (3)$$

$$\ell x(\cdot) = \alpha \in R^p. \quad (4)$$

Тут $A(t), B(t)$ — $m \times n$-, $\Phi(t),\ f(t),\ K(t,s)$ —$n \times m,\ n \times 1,\ n \times n$-вимірні матриці, компоненти яких належать простору $L_2[a,b]$; стовпчики матриці $\Phi(t)$ — лінійно-незалежні на $[a,b]$; l — обмежаний лінійний векторний функціонал визначений в $D_2[a;b]$, $l = col(l_1,...,l_p)$: $D_2[a;b] \to R^p$, $l_i : D_2[a;b] \to R$; $\alpha = col(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,..,\alpha_p) \in R^p$. $Z(x(t,\varepsilon),t,\varepsilon)$ — нелінійна по першій компоненті n-вимірна вектор-функція, неперервно диференційована по x в околі породжуючого розв'язку, інтегрована по t і неперервна по ε : $Z(\cdot,t,\varepsilon) \in C^1[\|x - x_0\| \le q]$, $Z(x(\cdot,\varepsilon),\cdot,\varepsilon) \in L_2[a,b]$, $Z(x(t,\cdot),t,\cdot) \in C[0,\varepsilon_0]$. $J(x(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)$ — нелінійний обмежений p-вимірний вектор-функціонал, неперервно диференційований по x у розумінні Фреше і неперервний по ε в околі породжуючого розв'язку.

Побудовано систему рівнянь для породжуючих констант, яка дає необхідні умови існування розв'язку крайової задачі (1), (2).

Теорема (Необхідна умова). *Нехай слабконелінійна крайова задача* (1), (2) *має розв'язок* $x = x(t,\varepsilon)$:

$$x(\cdot,\varepsilon) \in D_2[a,b],\ \dot{x}(\cdot,\varepsilon) \in L_2[a,b],\ x(t,\cdot) \in C(0,\varepsilon_0],$$

який при $\varepsilon = 0$ перетворюється у породжуючий розв'язок лінійної крайової задачі (3), (4) *з константою* $c_{r_2} = c^0_{r_2} \in \mathbb{R}^r$. *Тоді вектор констант* $c^0_{r_2}$ *обов'язково повинен бути дійсним коренем системи рівнянь для породжуючих констант:*

$$P_{D^*_{d_1}} \int\limits_a^b \Bigg[A(s) \int\limits_a^s \int\limits_a^b K(\tau, s) Z(x_0(s, c^0_{r_2}), s, 0) ds d\tau +$$

$$+ B(s) \int\limits_a^b K(s, \tau) Z(x_0(\tau, c^0_{r_2}), \tau, 0) d\tau \Bigg] ds = 0, \tag{5}$$

$$P_{Q^*_{d_2}} \Bigg(J(x_0(\cdot, c^0_{r_2}), 0) - \ell \Big(\int\limits_a^t \int\limits_a^b K(\tau, s) Z(x_0(s, c^0_{r_2}), s, 0) ds d\tau +$$

$$+ \Psi_0(t) D^+ \int\limits_a^b \Bigg[A(t) \int\limits_a^t \int\limits_a^b K(\tau, s) Z(x_0(s, c^0_{r_2}), s, 0) ds d\tau +$$

$$+ B(t) \int\limits_a^b K(t, s) Z(x_0(s, c^0_{r_2}), s, 0) ds \Bigg] dt \Big) \Bigg) = 0, \tag{6}$$

Матриці $D,\ Q$ —відповідно $m \times (m+n)$-, $p \times r_1$-вимірні і побудованні згідно [1], $r_1 = m + n - \operatorname{rank} D,\ r_2 = m + n - \operatorname{rank} D - \operatorname{rank} Q,\ d_1 = m - \operatorname{rank} D,\ d_2 = p - \operatorname{rank} Q$. P_{D^*} та P_{Q^*} — ортопроектори на ядро, відповідно, матриць D^* та Q^*. Матриця $P_{D^*_{d_1}}$ $(P_{Q^*_{d_2}})$ складається з повної системи d_1 (d_2) лінійно незалежних рядків матриці P_{D^*} (P_{Q^*}) [2].

Доведено, що **достатньою умовою** існування розв'язку (1), (2) є вимога, щоб дійсний корінь $c_{r_2} = c^0_{r_2} \in R^{r_2}$ системи рівнянь (5), (6) був простим.

1. А.М. Самойленко, О.А. Бойчук, С.А. Кривошея. Крайові задачі для систем лінійних інтегро-диференціальних рівнянь з виродженим ядром. Укр. мат. журн. - 1996. - **48**, №11. - с. 1576 – 1579.
2. A. A. Boichuk and A. M. Samoilenko, Generalized inverse operators and Fredholm boundary-value problems. — VSP, Utrecht - Boston (2004).
3. A. Boichuk, J. Diblik, D. Khusainov, M. Ruzickova. Boundary-Value Problems for Weakly Nonlinear Delay Differential Systems// Abstr.Appl. Anal. 2011 (2011), Article ID 631412. — 19 p.
4. І.А. Головацька. Слабконелінійні системи інтегро-диференціальних рівнянь. Вісник Київського університету. Серія: фіз.-мат. науки. - 2013. - **1**. - с. 71 – 74.

Лінійні нетерові крайові задачі для динамічних систем з імпульсною дією на часовій шкалі

Бойчук О.А., Страх О.П.

boichuk.aa@gmail.com, strah_o@ukr.net

Інститут математики НАНУ, Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Україна

Розглядається крайова задача на часовій шкалі $\mathbb{T}$:

$$\begin{cases} z^{\Delta} = A(t)z + f(t), \quad t \in [a;b]_{\mathbb{T}}, & t \neq t_k, \quad t_k \in (a;b)_{\mathbb{T}}, \\ z(t_k+0) = z(t_k) + B_k z(t_k) + a_k, & k = 1, 2, \ldots, p, \\ lz = \alpha, & \alpha \in \mathbb{R}^m, \end{cases} \tag{1}$$

де $A(t) \in \mathcal{R}\big([a;b]_{\mathbb{T}}; M_n(\mathbb{R})\big)$ — регресивна [1, p. 190] матриця, компоненти якої є rd-неперервними функціями, $B_k \in M_n(\mathbb{R})$, $a_k \in \mathbb{R}^n$, $k = \overline{1,\, p}$, $f(t) \in C_{rd}\big([a;b]_{\mathbb{T}}/\{t_k\}; \mathbb{R}^n\big)$, l — лінійний векторний функціонал $l\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. Використовуючи відомі результати [2], доведено, що дана задача є нетеровою і справедливе наступне твердження.

Теорема. *Неоднорідна крайова задача* (1) *є розв'язною тоді й тільки тоді, коли* $f(t) \in C_{rd}\big([a;b]_{\mathbb{T}}/\{t_k\}; \mathbb{R}^n\big)$, $a_k \in \mathbb{R}^n$ *та* $\alpha \in \mathbb{R}^m$ *задовольняють умову* $P_{Q_d^*}(\alpha - lF) = 0_d$, *де* $Q := lS_A(\cdot, a)$, $P_{Q_d^*}$ — $d \times m$*-вимірна матриця, що складається з* d *лінійно незалежних рядків матриці* $P_{Q^*}\colon \mathbb{R}^m \to N(Q^*)$, $F(t) = \int\limits_a^t S_A(t, \sigma(s)) f(s)\, \Delta s + \sum_{a<t_j<t} S_A(t, t_j+0) a_j$. *Задача* (1) *має* r*-параметричну сім'ю лінійно незалежних розв'язків*: $z(t; c_r) = S_A(t,a) P_{Q_r} c_r + G\left([f, a_k, \alpha]\right)(t)$, $\forall c_r \in \mathbb{R}^r$, *де* $S_A(t,s)$ *– матриця імпульсних переходів* [3], P_{Q_r} — $n \times r$*-вимірна матриця, що складається з* r *лінійно незалежних стовпців матриці* $P_Q\colon \mathbb{R}^n \to N(Q)$, Q^+ — *єдина псевдообернена за Муром–Пенроузом матриця* [2] *до матриці* Q, $G\left([f, a_k, \alpha]\right)(t) := F(t) + S_A(t,a) Q^+ \Big\{ \alpha - l \int\limits_a^{\cdot} S_A(\cdot, \sigma(s)) f(s)\, \Delta s - l \sum_{a<t_j<\cdot} S_A(\cdot, t_j+0) a_j \Big\}$ — *узагальнений оператор Гріна неоднорідної крайової задачі* (1) *на часовій шкалі.*

1. M. Bohner and A. Peterson. Dynamic equations on time scales. An introduction with applications. – Boston: MA, Birkhäuser Boston Inc., 2001.
2. A.A. Boichuk and A.M. Samoilenko. Generalized Inverse Operators and Fredholm Boundary-Value Problems. – Boston: VSP, Utrecht, 2004.
3. V. Lupulescu, A. Zada. Linear impulsive dynamic systems on time scales. Electronic Journal of Qualitative Theory of Differential Equations, 2010, № 11, P. 1-30.

Багатоточкова параболічна псевдодиференціальна задача

Дрінь Я.М., Дрінь М.М.

drin_jaroslav@i.ua

Буковинський державний фінансово-економічний університет,
Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича,
Україна

Основні позначення. Нехай $(t,x) \in \Pi_T \equiv (0,T) \times \mathbb{R}^n$, $T > 0$; $|\mu| > 1$; $0 < \gamma_1 < \cdots < \gamma_r < \gamma_0$, $0 < \nu_1 < \cdots < \nu_m < 1$, $0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_m = T$, $0 < \nu_1 < \cdots < \nu_m < 1$; $0 < \beta_1 < \cdots < \beta_m$ – відомі дійсні числа; A_k – псевдодиференціальний оператор (ПДО) з символом a_k: $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $0 \le k \le r$, B_k, $1 \le k \le m$, – ПДО з символами b_k: $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $1 \le k \le m$ порядків однорідності γ_k і β_k – відповідно; A – ПДО з символом $a = \sum\limits_{k=0}^{r} a_k$, негладким при $\sigma = 0$, $\sigma \in \mathbb{R}^n$, причому гладкість символів a_k по σ при $\sigma \neq 0$ залежить від γ_0 так: якщо $0 < \gamma_0 < 1$, то символи a_k є нескінченно гладкими [2], якщо $\gamma_0 \ge 1$, то символи мають скінченну гладкість [1] і $|D_\sigma^p d_k(\sigma)| \le c_k|\sigma|^{\lambda_k - |p|}$, де $d_k \equiv a_k$, $0 \le k \le r$, $\lambda_k \equiv \gamma_k$ або $d_k = b_k$, $1 \le k \le m$, $\lambda_k \equiv \beta_k$ відповідно, $|p| = p_1 + \cdots + p_n$; існує стала $\delta > 0$ така, що для довільних $\sigma \in \mathbb{R}^n$ вірною є нерівність: $a_{\gamma_0}(\sigma) \ge \delta|\sigma|^{\gamma_0}$.

2. Основний результат. Для багатоточкової задачі

$$\partial_t u + Au = f(t,x), \mu u|_{t=0} - \sum_{k=1}^{m} \nu_k B_k u|_{t=t_k} = \varphi(x),$$

де f: $\Pi_T \to \mathbb{R}$, φ: $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ – відомі функції (див. [1]), побудовано фундментальний розв'язок

$$G(t,x) = (2\pi)^{-n} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \exp\{i(x,\sigma) - a(\sigma)t\} \Big(\mu - \sum_{k=1}^{m} \nu_k b_k(\sigma) \exp\{-a(\sigma)t_k\}\Big) d\sigma,$$

встановлені степеневі оцінки його похідних, записана формула для розв'язку у вигляді суми згорток функції G з даними задачі f та φ.

Аналогічний результат вірний у випадку, коли символи ПДО залежать ще і від невід'ємної часової змінної t.

1. Кочубей А.Н. Параболические псевдодифференциальные уравнения, гиперсингулярные и марковские процессы. Изв. АН СССР, Сер. мат., 1988, 51, № 5. – С. 9090-9034.
2. В.В. Городецький, Я.М. Дрінь. Дослідження поведінки осцилюючих інтегралів. Наук. вісн. Чернівецького ун-ту: Зб. наук. пр. Вип. 3. Математика, Чернівці, 2011 – С. 13-18.

Побудова розв'язків інтегральних рівнянь Фредгольма з виродженим ядром у гільбертових просторах

Журавльов В.П.

vfz2008@ukr.net

Житомирський національний агроекологічний університет, Украина

Нехай $\mathbf{H}_1-$ дійсний гільбертовий простір, $[a,b]-$ скінченний проміжок, $z(t)-$ функція зі значеннями в гільбертовому просторі $\mathbf{H}_1$, вимірна у сенсі Бохнера [1], така, що $\int\limits_a^b \|z(t)\|^2_{\mathbf{H}_1} dt < \infty$. Тоді простір таких функцій буде гільбертовим. Позначимо його $\mathbf{L}_2(\mathcal{I}, \mathbf{H}_1)$.

Розглянемо задачу про умови розв'язності та загальний вигляд розв'язків інтегрального рівняння

$$(Lz)(t) := z(t) - M(t)\int\limits_a^b N(s)z(s)ds = f(t),$$

де оператор-функції $M(t) = \{m_{ij}(t)\}_{i,j=1}^{\infty}$ та $N(t) = \{n_{ij}(t)\}_{i,j=1}^{\infty}-$ задовольняють умовам

$$\int\limits_a^b \sum_{i,j=1}^{\infty} m_{ij}^2(t)dt = M_0^2 < \infty,$$

$$\int\limits_a^b \sum_{i,j=1}^{\infty} n_{ij}^2(t)dt = N_0^2 < \infty,\ f(t) \in \mathbf{L}_2(\mathcal{I}, \mathbf{H}_1).$$

Позначимо $D = I_{\mathbf{H}_1} - \int\limits_a^b N(t)M(t)\,dt$ нормально розв'язний оператор, $P_{N(D)} : \mathbf{H}_1 \to N(D)$, $P_{N(D^*)} : \mathbf{H}_1 \to N(D^*)-$ ортопроектори, D^+ псевдообернений оператор [2], $\tilde{\alpha}^{(-1)} = P_{N_0(D)}\alpha^{-1}P^*_{N_0(D)}$, $\tilde{\beta}^{(-1)} = P^*_{N_0(D^*)}\beta^{-1}P_{N_0(D^*)}$, де $\alpha = \int\limits_a^b X^*(t)X(t)dt$, $\beta = \int\limits_a^b \Phi^*(t)\Phi(t)dt-$ самоспряжені оборотні обмежені зліченновимірні матриці Грама, $P_{N_0(D)}$ та $P_{N_0(D^*)}$ звуження операторів $P_{N(D)}$ та $P_{N(D^*)}$ на підпростори $N_0(D)$ та $N_0(D^*)$, які породжені системами лінійно-незалежних вектор-стовпців матриць-ортопроекторів $P_{N(D)}$ та $P_{N(D^*)}$, відповідно.

Теорема 1. *Нехай $D : \mathbf{H}_1 \to \mathbf{H}_1-$ обмежений нормально розв'язний оператор. Тоді при виконанні умови*

$$(P_{N(L^*)}f)(t) = \Phi(t)\beta^{-1}\int\limits_a^b \Phi^*(s)f(s)ds = 0$$

операторне рівняння (1) розв'язне і має сім'ю лінійно-незалежних розв'язків

$$z(t) = X(t)c + (L^+ f)(t),$$

де $\Phi(t) = N(t)P_{N_0(D^*)}$, $X(t) = M(t)P_{N_0(D)}$*— оператор розв'язку відповідного (1) однорідного інтегрального рівняння, c— довільний елемент підпростору* $N_0(D)$ *гільбертового простору* $\mathbf{H}_1$,

$$(L^+ f)(t) = f(t) + M(t)D^- \int_a^b N(s)f(s)ds -$$
$$-M(t)\tilde{\alpha}^{(-1)} \int_a^b M^*(s)f(s)ds + M(t)\tilde{\alpha}^{(-1)}\tilde{\beta}^{(-1)} \int_a^b N(s)f(s)ds -$$
$$-N^*(t)\tilde{\beta}^{(-1)} \int_a^b N(s)f(s)ds$$

єдиний обмежений псевдооберненний оператор до оператора L.

1. *Далецкий Ю.Л., Крейн М.Г.* Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. – М.: Наука, 1970. – 534 с.
2. *Boichuk A.A., Samoilenko A.M.* Generalised inverse operators and Fredholm boundary-value problems. – Utrecht; Boston: VSP, 2004. – 317 p.

Приближение классов периодических функций двух переменных обобщенными суммами Зигмунда

Задерей П.В., Бодрая В.И.

sgpi@slav.dn.ua

Київський національний університет технологій та дизайну, Україна

В работе [1] введены классы периодических функций двух переменных $C^{\psi,\overline{\psi}}_{2,\beta,\infty}$ и прямоугольные линейные средние рядов Фурье функций двух переменных $U_n(f;x;\Lambda)$. Пусть $\varphi_i(x), i=1,2$ – непрерывные, монотонно возрастающие при $x \geq 0$ такие, что $\varphi_i(0)=0$. Если величины $\lambda^{(n_i)}_{k_i}$ $k_i \leq n_i$, задаются соотношениями

$$\lambda^{(n_i)}_{k_i} = 1 - \varphi_i(k_i)/\varphi_i(n_i),$$

то многочлены $U_n(f;x;\Lambda) = Z^{\varphi}_n(f;x)$ будем называть обобщенными прямоугольными суммами Зигмунда. Для верхних граней уклонений многочленов $Z^{\varphi}_n(f;x)$ на классах $C^{\psi,\overline{\psi}}_{2,\beta,\infty}$ получено утверждение.

Теорема. *Пусть* $\overline{\psi}_i \in \mathfrak{M}'_0$, $\psi_i \in \mathfrak{M}'_0$, *функции* $\psi_i(x)\varphi_i(x)$, $\overline{\psi}_i(x)\varphi_i(x)$, $i=1,2$, *монотонно возрастают и сохраняют характер выпуклости при* $x \geq 1$. *Тогда при* $n_i \to \infty$, $i=1,2$, *справедлива асимптотическая формула*

$$\mathcal{E}\left(C^{\psi,\overline{\psi}}_{2,\beta,\infty}; Z^{\varphi}_n\right) = \frac{2|\sin\frac{\beta_1\pi}{2}|}{\pi\varphi_1(n_1)}\int\limits_1^{n_1}\frac{\psi_1(x)\varphi_1(x)}{x}dx + \frac{2|\sin\frac{\beta_1\pi}{2}|}{\pi}\int\limits_{n_1}^{\infty}\frac{\psi_1(x)}{x}dx +$$

$$= \frac{2|\sin\frac{\beta_2\pi}{2}|}{\pi\varphi_2(n_2)}\int\limits_1^{n_2}\frac{\psi_2(x)\varphi_2(x)}{x}dx + \frac{2|\sin\frac{\beta_2\pi}{2}|}{\pi}\int\limits_{n_2}^{\infty}\frac{\psi_2(x)}{x}dx + O(1)\Bigg(\psi_1(n_1)+$$

$$+\psi_2(n_2) + \prod_{j=1}^{2}|\sin\frac{\overline{\beta}_j\pi}{2}|\left[\int\limits_1^{n_j}\frac{\overline{\psi}_j(x)\varphi_j(x)}{\varphi_j(n_j)x}dx + \int\limits_{n_j}^{\infty}\frac{\overline{\psi}_j(x)}{x}dx + \overline{\psi}_j(n_j)\right]\Bigg).$$

где $O(1)$ *— величина, равномерно ограниченная относительно* n_1, n_2. *С определением и свойствами множеств* $\mathfrak{M}_0$, $\mathfrak{M}'$ *можно ознакомиться, например в [2, с.160].*

1. Задерей П.В. Интегральные представления уклонений линейных средних рядов Фурье на классах дифференцируемых периодических функций двух переменных // Некоторые вопросы теории аппроксимации функций: Сб. научн. тр. / Отв. ред. В.К. Дзядык. — К.: Ин-т математики АН УССР, 1985. — С. 16 – 28.
2. Степанец А. И. Методы теории приближений: В 2 ч., К. : Ин-т математики НАН Украины, 2002, Ч. 1, 427 с.

Approximate Solution of a Boundary Value Problem for Nonlinear Control Systems by using Harmonic Inputs

Zuyev A.L.

al_zv@mail.ru

Institute of Applied Mathematics and Mechanics of NASU

Consider a control system

$$\dot{x} = \sum_{i=1}^{m} u_i f_i(x), \quad (1)$$

where $x \in \mathbb{R}^n$ is the state and $u = (u_1, u_2, ..., u_m) \in \mathbb{R}^m$ is the control. The vector fields $f_i(x)$ are assumed to be smooth mappings from $\mathbb{R}^n$ to $\mathbb{R}^n$.

This work is devoted to the controllability problem, i.e., for given $x^0, x^1 \in \mathbb{R}^n$ and $\tau > 0$, our goal is to find a control $u \in L^\infty[0, \tau]$, such that system (1) with $u = u(t)$ admits a solution $x(t)$ $(0 \le t \le \tau)$ satisfying the boundary conditions $x(0) = x^0$ and $x(\tau) = x^1$. To analyze this problem, we assume that $m < n$ and that $f_1(x)$, $f_2(x)$,..., $f_m(x)$ together with a fixed set of the first order Lie brackets span the whole tangent space for system (1),

$$\operatorname{span}\{f_i(x), [f_j, f_l](x) \,|\, i = 1, 2, ..., m,\ (j, l) \in S\} = \mathbb{R}^n \quad (2)$$

for each $x \in \mathbb{R}^n$, where $S \subseteq \{1, 2, ..., m\}^2$, $|S| = n - m$. Consider a family of controls

$$u_i(t) = v_i + \sum_{(j,l)\in S} a_{jl} \left\{ \delta_{ij} \cos\left(\frac{2\pi k_{jl}}{\tau} t\right) + \delta_{il} \sin\left(\frac{2\pi k_{jl}}{\tau} t\right) \right\}, \quad (3)$$

depending on $\tau > 0$ and parameters $a_{jl} \in \mathbb{R}$, $k_{jl} \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ with indices $(j, l) \in S$. Here δ_{ij} is the Kronecker delta. Functions (3) extend the class of harmonic inputs considered in [1]. In the sequel, we assume that the numbers $k_{jl} \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, $(j, l) \in S$, are chosen without resonances, i.e.

$$|k_{jl}| \neq |k_{qr}| \quad \text{for all} \quad (j, l) \in S, (q, r) \in S, (j, l) \neq (q, r). \quad (4)$$

We prove that functions (3) can be used to solve the controllability problem for system (3) locally. The advantage of this approach is that parameters v_i and a_{jl} are obtained by solving a system of second order algebraic equations. Some applications of this result to the motion planning problem are presented for nilpotent systems.

1. Gauthier J.-P., Jakubczyk B., Zakalyukin V. Motion planning and fastly oscillating controls. SIAM J. Control Optim., 2010, Vol. 48, P. 3433–3448.

Устойчивость упругой балочной системы с распределенными и сосредоточенным управлениями[1]

Зуев А.Л., Кучер Ю.И.

al_zv@mail.ru, julykucher@gmail.com

Институт прикладной математики и механики НАНУ, Украины

В работе рассмотрена математическая модель и исследована задача стабилизации управляемых колебаний упругой балки, которая описывается дифференциальным уравнением Эйлера–Бернулли

$$\rho(x)\ddot{w}(x,t) + (E(x)I(x)w''(x,t))'' = \sum_{j=1}^{k} \psi_j''(x)M_j, \quad x \in (0,l) \setminus \{l_0\}, \tag{1}$$

с краевыми условиями

$$w\Big|_{x=0} = w\Big|_{x=l} = 0, \quad w''\Big|_{x=0} = w''\Big|_{x=l} = 0, \tag{2}$$

и условиями сопряжения

$$w\Big|_{x=l_0-0} = w\Big|_{x=l_0+0},\ w'\Big|_{x=l_0-0} = w'\Big|_{x=l_0+0},\ w''\Big|_{x=l_0-0} = w''\Big|_{x=l_0+0},$$

$$(m\ddot{w} + \varkappa w)\Big|_{x=l_0} = (EIw'')'\Big|_{x=l_0-0} - (EIw'')'\Big|_{x=l_0+0} + F. \tag{3}$$

Здесь l — длина балки, $E(x)$ и $I(x)$ — модуль Юнга и момент инерции поперечного сечения балки, соответственно, $\rho(x)$ — линейная плотность, l_0 — точка приложения сосредоточенной управляющей силы F, m и $\varkappa$ — масса и коэффициент жесткости подвижной части управляющего механизма, соответственно. Распределенные управляющие воздействия описываются плотностями моментов M_j и функциями формы $\psi_j(x)$.

Задача (1) – (3) записывается в виде дифференциального операторного уравнения в гильбертовом пространстве $X = \overset{\circ}{H}{}^2(0,l) \times L^2(0,l) \times \mathbb{R}^2$ следующим образом:

$$\frac{d}{dt}\,\xi(t) = A\xi(t) + By, \quad t \geqslant 0, \tag{4}$$

где $\xi = (u,v,p,q)^T \in X$ — фазовый вектор, $A : D(A) \to X$ — линейный дифференциальный оператор, $B : \mathbb{R}^{k+1} \to X$, $y = (M_1,\ldots,M_k,F)^T$ — вектор управления.

Предложен функционал управления в виде обратной связи $y = h(\xi)$, обеспечивающий сильную асимптотическую устойчивость тривиального решения уравнения (4).

[1]Данная работа выполнена при поддержке проекта “Control, Stability, and Model Reduction of Hybrid Systems with Elastic Components” в рамках украинско-австрийского научно-технического сотрудничества

О некоторых точных формулах рекуррентного соотношения Харера-Загира

Кадубовский А.А.

kadubovs@ukr.net

Донбасский государственный педагогический университет, Украина

Пусть $\varepsilon_g(n)$ – число хордовых n-диаграмм рода g $(2g \leq n)$ [1].

Для величины $\varepsilon_g(n)$ в [2] установлено рекуррентное соотношение

$$(n+1)\varepsilon_g(n) = 2(2n-1)\varepsilon_{g-1}(n)+(2n-1)(n-1)(2n-3)\varepsilon_{g-1}(n-2). \quad (1)$$

Точные формулы для величин $\varepsilon_0(n)$, $\varepsilon_1(n)$ и $\varepsilon_2(n)$, $\varepsilon_3(n)$ были получены в работах [1] и [3] соответственно.

Предложение 1. Для натуральных $g \leq 5$ и $n \geq 2g$ имеет место формула

$$\varepsilon_g(n) = \frac{(2n)!}{n!(n-2g)!} \cdot \frac{P_g(n)}{2 \cdot (3g)!}, \quad (2)$$

где $P_1(n) = 1$; $P_2(n) = 5n - 2$; $P_3(n) = 70n^2 - 154n + 24$;
$P_4(n) = 1925n^3 - 10395n^2 + 12034n - 792$;
$P_5(n) = \frac{1}{2}(175175n^4 - 1751750n^3 + 5050045n^2 - 4074070n - 109200)$.

Предложение 2. $\forall\ n \geq 2g \geq 2$ коэффициент $k_1(g)$ при старшем члене (n^{g-1}) многочлена $P_g(n)$ можно вычислить по формуле

$$k_1(g) = \frac{2 \cdot (3g)!}{12^g \cdot g!}. \quad (3)$$

Следствие. $\forall\ g \in N$ при $n \to \infty$ величины $\varepsilon_g(n)$ и

$$\overline{\varepsilon_g(n)} = \frac{(2n)!}{n!(n-2g)!} \cdot \frac{n^{g-1}}{12^g \cdot g!} \quad (4)$$

являются эквивалентными бесконечно большими.

Следует отметить, что асимптотическое поведение величины $\varepsilon_g(n)$ (при $n \to \infty$) достаточно хорошо изучено в литературе (напр., [4]). А известная асимптотическая оценка для $\varepsilon_g(n)$ теперь может быть получена и посредством привлечения величины (4).

1. Gori R., Marcus M. Counting non-isomorphic chord diagrams. Theoretical Computer Science, 1998, № 204, P. 55 – 73.
2. Harer J., Zagier D. The Euler characteristic of the moduli space of curves. Inventiones mathematical, 1986, № 85, P. 457 – 485.
3. Andersen J.E., Penner R.C., Reidys C.M., Waterman M.S. Enumeration of linear chord diagrams // Arxiv: math., Preprint, 28 p. 2010, http://arxiv.org/abs/1010.5614.
4. Chmutov S., Pittel B. The genus of a random chord diagram is asymptotically normal. J. Comb. Theory, Ser.A, 2013, P. 102 – 110.

Про навчальні плани підготовки майбутніх вчителів загальнотехнічних дисциплін та праці

Ковальов В.І., Божко В.О., Ковальова Л.В.

sgpi@slav.dn.ua

Донбаський державний педагогічний університет, Україна

За навчальним планом підготовки студентів на технологічному факультеті Донбаського державного педагогічного університету під курс Вищої математики відведено понад 120 годин аудиторних занять на три семестри. Це понад 40 годин на семестр, серед них половина практичні та лабораторні, решта – лекції. Такої кількості учбових годин цілком достатньо, аби перелічити найважливіші напрямки розвитку та практичного застосування математичних методів без будь-якого їх обґрунтування.

Випускники педагогічного університету, не залежно від їх конкретної спеціалізації, мають бути високо обізнаними, ерудованими, високо культурними фахівцями, спроможними давати добре обґрунтовані відповіді на питання, які висуває не тільки допитлива молодь, але й представники інших категорій суспільства. Мова йде не тільки про мешканців України, оскільки ми рухаємось за Болонським проектом.

На нашу думку, запропонований навчальний план з такою вагою математичних відомостей, ставить нашого випускника в дуже не зручне становище. Відомо, що моральними якостями вчитель, як ні один інший фахівець, несе відповідальність за майбутнє Вітчизни. Стає дуже сумно від однієї лише думки про діток, до яких на урок (не суттєво який саме) прийшов чи прийшла погано підготовлений чи підготовлена особа.

Підстав для негайної ревізії навчального плану з метою його докорінного перегляду у бік суттєвого збільшення сектору математичної просвіти слухачів технологічного факультету багато.

Головна – отримавши диплом бакалавра за відповідним фахом на технологічному факультеті, у свої 20 з невеликим, молода людина тільки отримує смак до самого навчання, як процесу неперервного вдосконалення своєї особистості. В зв'язку з цим виникає потреба в подальшому поширенні математичного світогляду, що наполегливо вимагає міцних знань фундаментальних категорій та тверджень.

До проблеми поєднання вербальних та графічних методів навчання в історії вітчизняної педагогічної думки (70-90 рр XX ст.)

Москальова О.І.

moi.olga61@mail.ru

Донбаський державний педагогічний університет, Україна

Педагогічна наука та шкільна практика наразі перебувають у пошуках інноваційних методів навчання, застосування яких значно підвищило б ефективність навчання. Дослідженню проблем різноманітних форм поєднання словесних та графічних методів навчання присвячені праці науковців та педагогів-новаторів зазначеного історичного періоду А.М. Алексюка, Л.В. Занкова, В.В. Кокоріна, І.Я. Лернера, В.І. Лозової, Д.С. Меженка, Г.С. Романенко, М.М. Скаткіна, В.Ф. Шаталова, В.М. Шеймана, С.Д. Шевченка та ін.

До вербальних методів навчання (від лат. verbalis – усний, словесний) науковці та педагоги-практики зазначеного періоду відносять розповідь, пояснення, лекцію, бесіду, диспут, роботу з книгою тощо. Кожен з цих методів має свої особливості, але загальним для всіх є слово.

Методи усного викладу навчального матеріалу вчителем, як правило, поєднуються з використанням наочності. У процесі навчальної роботи вчитель ілюструє (наочно пояснює) своє викладання, або демонструє той або інший навчальний посібник, який може бути представлений і в якості ілюстрації, і бути використаним як джерело нових знань.

Видатний педагог радянської доби Л.В. Занков наголошував, що виділення в окрему групу наочних методів не відображає реальної педагогічної дійсності, адже у практиці навчання наочні засоби не можуть застосовуватися без словесного звертання вчителя до учнів.

Схожу точку зору висловлює вітчизняний учений А.М. Алексюк. Дослідник зазначав, що практично підтверджено і експериментально доведено доцільність різних форм поєднання слова і наочності в навчанні. Досліджуючи дану проблему, А.М. Алексюк виявив декілька рівнів у застосуванні різних видів наочного методу навчання залежно від характеру та міри самостійності пізнавальної діяльності учнів.

Вагомим внеском у розвиток теоретичних основ навчання є науковий доробок В.І. Лозової стосовно ролі наочних методів у навчальному процесі. Учена зазначає, що наочні методи навчання є допоміжними, які забезпечують набуття знань у поєднанні зі словесними методами.

На нашу думку, ефективність навчального процесу значно підвищиться за умови застосування оптимальних, різноманітних форм поєднання словесних та графічних методів, зокрема вербально-графічного методу. Однак цей досвід потребує цілісного дослідження та актуалізації в сучасних умовах модернізації української системи освіти.

Приближение периодических функций повторними суммами Валле Пуссена

Новиков О.А., Ровенськая О.Г., Шаповалов М.С.

sgpi@slav.dn.ua

Донбасский государственный педагогический университет, Украина

Обозначим через $S_n(f;x)$ частичные суммы ряда Фурье функции $f \in L$. Пусть p_1, p_2 — произвольные натуральные числа такие, что $p_1+p_2<n$. Функции $f \in L$ поставим в соответствие последовательность тригонометрических полиномов

$$V_{n,p_1,p_2}(f;x) = V^{(2)}_{n,\overline{p}}(f;x) = \frac{1}{p_1}\sum_{k=n-p_1}^{n-1}\frac{1}{p_2}\sum_{m=k-p_2+1}^{k} S_m(f;x),$$

которые будем называть повторними суммами Валле Пуссена [1].

Классы периодических функций $C^{\overline{\psi}}_{\infty}$ были введены А.И. Степанцом [2]. Эта классификация позволила единым образом ранжировать по аппроксимативным свойствам широкий спектр функций, в том числе функции малой, ограниченной гладкости и бесконечно дифференцируемые. В виде таких классов можно представить классы W^r_β и другие. Более подробно с информацией по этими вопросам можно ознакомиться в [3]. Нами получено следующее утверждение.

Теорема. *Пусть* $f \in C^{\overline{\psi}}_{\infty}$, $\psi_i \in \mathfrak{M}'_0 = \mathfrak{M}_0 \bigcap \mathfrak{M}'$, $i=1,2$, $p_1 \le p_2$, $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{p_2}{n}=0$. *Тогда при* $n\to\infty$ *имеет место асимптотическая формула*

$$\mathcal{E}(C^{\overline{\psi}}_{\infty};V^{(2)}_{n,\overline{p}}) = \sup_{f\in C^{\overline{\psi}}_{\infty}} ||f(x)-V^{(2)}_{n,\overline{p}}(f;x)||_C =$$

$$= \frac{2}{\pi}\int\limits_n^{\infty}\frac{\psi_2(x)}{x}dx + \frac{4}{\pi^2}\overline{\psi}(n)\ln\frac{n}{p_1+p_2} + O(1)\overline{\psi}(n), \qquad (1)$$

где $O(1)$ *— величина, равномерно ограниченная относительно* n, p_1, p_2. *С определением и свойствами множеств* $\mathfrak{M}_0$, $\mathfrak{M}'$ *можно ознакомиться, например в [3, с.160].*

Асимптотическая формула (1) дает решение задачи Колмогорова–Никольского для повторних сумм Валле Пуссена и классов $C^{\overline{\psi}}_{\infty}$.

1. Ровенская О. Г., Новиков О. А. Приближение интегралов Пуассона повторными суммами Валле Пуссена. Нелінійні коливання, 2010, Т. 13, № 1, С. 96 — 99.
2. Степанец А. И. Скорость сходимости рядов Фурье на классах $\overline{\psi}$-интегралов. Укр. мат. журн., 1997, Т. 49, № 8, С. 1069 — 1113.
3. Степанец А. И. Методы теории приближений: В 2 ч., К. : Ин-т математики НАН Украины, 2002, Ч. 1, 427 с.

Усреднение динамических систем на временных шкалах

Огуленко А.П.

ogulenko.a.p@onu.edu.ua

Одесский национальный университет имени И.И. Мечникова, Украина

В докладе представляется обоснование метода усреднения для динамических уравнений на временных шкалах (аналог теоремы Н.Н. Боголюбова) и предлагается схема усреднения для управляемых динамических систем на временных шкалах.

Динамические уравнения на временных шкалах являются новым объектом для исследования и моделируют процессы, которые с течением времени происходят то в непрерывном, то в дискретном режиме. Систематизация основных результатов для таких уравнений представлена в работах M. Bohner, A. Peterson [3,4].

Рассматривается система уравнений на временной шкале с малым параметром:

$$\begin{cases} x^{\Delta} = \varepsilon X\left(t, x\right) \\ x(t_0) = x_0. \end{cases} \tag{1}$$

Здесь $\mathbb{T}$ — временная шкала — непустое замкнутое подмножество из $\mathbb{R}$, $t \in \mathbb{T}$ — время, $x \in \mathbb{R}^n$, x^{Δ} — Δ-производная, $\varepsilon > 0$ — малый параметр, $X(t,x)$ — n-мерная вектор-функция, $t_0 < \inf \mathbb{T}$. Системе (1) ставится в соответствие следующая усредненная система:

$$\begin{cases} \xi^{\Delta} = \varepsilon \overline{X}\left(\xi\right) \\ \xi(t_0) = x_0, \end{cases} \tag{2}$$

$$\overline{X}(x) = \lim_{\substack{T \to \infty \\ T \in \mathbb{T}}} \frac{1}{T} \int\limits_{t_0}^{T} X(t,x) \Delta t. \tag{3}$$

Близость решений системы (1) и (2) доказывает следующая теорема:

Теорема. *Пусть в области $Q = \{t \in \mathbb{T}, x \in D\}$ выполнены условия: 1) функция $X(t,x)$ rd-непрерывна по t, ограничена константой $M > 0$, липшицева по x с константой $\lambda > 0$; 2) предел (3) существует равномерно относительно $x \in D$; 3) решение $\xi(t)$ усредненной системы (2) с начальным условием $\xi(t_0) = x_0 \in D' \subset D$ определено для всех $t \in \mathbb{T}$ и лежит вместе с ρ-окрестностью в области D; 4) существует такое число $\mu_0 > 0$ ($\mu(t)$ — функция "зернистости"временной шкалы), что для любого $t \in \mathbb{T}$ либо $\mu(t) = 0$, либо $\mu(t) > \mu_0$.*

Тогда для любых $\eta > 0$ и $L > 0$ найдется такое $\varepsilon_0\left(\eta, L\right) > 0$, что для $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ и $t_0 \leqslant t \leqslant L\varepsilon^{-1}$ справедлива оценка:

$$\|x(t) - \xi(t)\| \leqslant \eta \ ,$$

где $x(t)$ и $\xi(t)$ — решения задач Коши (1) и (2) соответственно.

Аналогичные оценки для непрерывного ($\mathbb{T} = \mathbb{R}$) и дискретного ($\mathbb{T} = \mathbb{Z}$) времени получены в [1, 2]. В [5] получены оценки близости решений исходной и усредненной систем на временных шкалах на асимптотически большом промежутке при достаточно сложно проверяемых ограничениях на правую часть динамической системы (1).

Пусть теперь рассматривается управляемая система уравнений на временной шкале стандартного вида с малым параметром:

$$\begin{cases} x^{\Delta}(t) = \varepsilon\left[f(t, x(t)) + A(x(t))\varphi(t, u(t))\right] \\ x(t_0) = x_0. \end{cases} \tag{4}$$

Здесь $\mathbb{T}$ — временная шкала — непустое замкнутое подмножество из $\mathbb{R}$, $t \in \mathbb{T}$ — время, $x \in \mathbb{R}^n$, x^{Δ} — Δ-производная, $\varepsilon > 0$ — малый параметр, $f(t, x)$ — n-мерная вектор-функция, $A(x)$ — $n \times m$ матрица, $\varphi(t, u)$ — m-мерная вектор-функция, $u(t) \in U$ — r-мерный вектор управления, $U \in comp\,(R^r)$, $t_0 < \inf \mathbb{T}$.

Системе (4) ставится в соответствие следующая усредненная система:

$$\begin{cases} \xi^{\Delta} = \varepsilon\left[\bar{f}\,(\xi) + A\,(\xi)\,v\right] \\ \xi(t_0) = x_0, \end{cases} \tag{5}$$

где

$$\bar{f}(x) = \lim_{\substack{T\to\infty \\ T\in\mathbb{T}}} \frac{1}{T}\int\limits_{t_0}^{T} f(t, x)\Delta t, \quad v \in V, \quad V = \lim_{\substack{T\to\infty \\ T\in\mathbb{T}}} \frac{1}{T}\int\limits_{t_0}^{T} \varphi(t, U)\Delta t. \tag{6}$$

Последний интеграл в (6) понимается как аналог интеграла Аумана на временной шкале, а сходимость соответствующего предела в смысле метрики Хаусдорфа.

Предлагается алгоритм, определяющий соответствие между управлениями исходной и усредненной систем. Для задач (4) и (5) получено обоснование схемы полного усреднения.

1. Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А. *Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний.* - М.:Наука, 1974. - 503 с.
2. Плотников В.А., Плотникова Л.И., Яровой А.Т. *Метод усреднения дискретных систем и его приложение к задачам управления.* // Нелинейные колебания. - 2004. - Т.7, No. 2. - С. 241 - 254.
3. Bohner M., Peterson A. *Dynamic Equations on Time Scales: An Introduction with Applications.* Boston: Birkhäuser, 2001
4. Bohner M., Peterson A. *Advances in Dynamic Equations on Time Scales.* Birkhäuser, Boston, 2003
5. Slavík A. *Averaging dynamic equations on time scales.* // Journal of Mathematical Analysis and Applications 388 (2012), 996–1012 (preprint)

Декомпозиція та стійкість сингулярно збурених лінійних систем

Осипова О.В.

shurenkacv@gmail.com

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича, Україна

Розглядається сингулярно збурена система

$$\begin{aligned} \dot{x}_0 &= A_{00}x_0 + A_{01}x_1 + A_{02}x_2, \\ \varepsilon_1\dot{x}_1 &= A_{10}x_0 + A_{11}x_1 + \varepsilon_1 A_{12}x_2, \\ \varepsilon_1\varepsilon_2\dot{x}_2 &= A_{20}x_0 + A_{21}x_1 + A_{22}x_2, \end{aligned} \tag{1}$$

де $x_i \in \mathbb{R}^{n_i}$, $A_{ij} = A_{ij}(t)$, матриці розмірностей $n_i \times n_j$, $i, j = \overline{0,2}$, ε_1, ε_2 – малі додатні параметри [1, 2].

Теорема 1. *Нехай справджуються умови:*

1) матриці $A_{ij}(t)$, $i, j = \overline{0,2}$, рівномірно обмежені при $t \in \mathbb{R}$,

2) власні значення матриць $A_{ii}(t)$, $i = 1, 2$, задовольняють умову $\mathrm{Re}\lambda \leq -2\mu$, $\mu > 0$.

Тоді для достатньо малих ε_1, ε_2 існує невироджена заміна змінних

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E & \varepsilon_1 H & \varepsilon_1\varepsilon_2 H_0 \\ P & E + \varepsilon_1 PH & \varepsilon_2 H_0 \\ R & P_1 + \varepsilon_1 RH & E + \varepsilon_1\varepsilon_2 P_0 H_0 + \varepsilon_2 P_1 H_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}, \tag{2}$$

де $R = P_0 + P_1 P$, за допомогою якої система (1) зводиться до трьох незалежних підсистем

$$\dot{u} = B_{00}u, \varepsilon_1\dot{v} = B_{11}v, \varepsilon_1\varepsilon_2\dot{w} = B_{22}w. \tag{3}$$

Знайти точний вигляд матриць P_0, P, P_1, H_0, H_2, H вдається тільки в найпростіших випадках. В роботі знайдено асимптотичні розклади цих матриць за степенями малих параметрів ε_1, ε_2 і одержано нульове і перше наближення для розщепленої системи (3) та встановлено принцип зведення.

Теорема 2. *Нехай справджуються умови теореми 1 і нульовий розв'язок виродженої системи (при $\varepsilon_1 = 0$, $\varepsilon_2 = 0$) експоненціально стійкий. Тоді нульовий розв'язок вихідної системи (1) при достатньо малих ε_1, ε_2 експоненціально стійкий.*

1. Сельський С.С., Черевко І.М. Розщеплення систем лінійних диференціальних сингулярно збурених рівнянь // Наук. вісник Чернівецького університету: Зб. наук. пр. Математика. – Т.1, №3. – Чернівці: ЧНУ, 2011. – С. 104-107.
2. Осипова О.В., Черевко І.М. Розщеплення різнотемпових сингулярно збурених лінійних систем // Науковий вісник Чернівецького університету. Серія: математика : зб. наук. праць. – Т. 2, № 1. – Чернівці : ЧНУ, 2012. – С. 78-83.

Рекурентні формули та нулі многочленів Фабера

Савчук В.В.

savchuk@imath.kiev.ua

Інститут математики НАНУ, Украина

В багатьох задача теорії многочленного наближення аналітичних функцій в обмежених однозв'язних областях комплексної площини важливою є інформація про розміщення нулів послідовності многочленів Фабера, які відповідають даній області.

Добре відомо, що для фаберових областей мають місце такі ж порядкові оцінки більшості апроксимативних характеристик, що й для одиничного круга. Однак розв'язання екстремальних задач про точні значення, наприклад, величин найкращих лінійних наближень, побудованих на основі розкладів в ряди за многочленами Фабера, зводиться до питання про наявність хоча б одного спільного нуля для всіх многочленів Фабера.

В наступному твердженні показано, що така ситуація є неможливою за винятком випадку, коли область є кругом. Це, зокрема, показує, що система многочленів Фабера, як базис, є не ефективною для розв'язання екстремальних задач.

Теорема 1. *Нехай Ω — обмежена однозв'язна область в комплексній площині, межею якої є спрямлювана жорданова крива $\Gamma = \partial\Omega$ і $\{F_k\}_{k=0}^{\infty}$ — система многочленів Фабера для області Ω. Тоді наступні твердження рівносильні:*

1) існує точка $z_0 \in \Omega$ така, що $F_1(z_0) = \ldots = F_k(z_0) = \ldots = 0$;

2) Ω — круг з центром в точці z_0 деякого додатного радіуса α, тобто $\Omega = \{z : |z - z_0| < \alpha\}$.

Доведення цього твердження ґрунтується на рекурентних формулах для многочленів Фабера, які мають і самостійний інтерес.

Теорема 2. *Нехай Ω — обмежена однозв'язна область в комплексній площині, межею якої є спрямлювана жорданова крива Γ, $\{F_k\}_{k=0}^{\infty}$ і $\{F_{k,1}\}_{k=0}^{\infty}$ — системи многочленів Фабера для області Ω відповідно першого і другого родів. Тоді для $n = 1, 2, \ldots$*

$$F_n'(z) = \sum_{k=0}^{n-1} F_{n-k-1}(z) F_{k,1}(z) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{F_{n-k-1}(z) F_{k+1}'(z)}{k+1} \quad \forall\ z \in \mathbb{C}.$$

$$F_{n-1,1}(z) = \frac{F_n'(z)}{n} = \frac{1}{n-1} \sum_{k=0}^{n-2} \frac{F_{n-k-1}(z) F_{k+1}'(z)}{k+1} \quad \forall\ z \in \mathbb{C}.$$

Оцінки K–функціоналів другого порядку на просторах Гарді

Савчук В.В., Савчук М.В.

savchuk@imath.kiev.ua, savchuk_m@ukr.net

Інститут математики НАНУ, Інститут підготовки кадрів державної служби зайнятості України, Украина

Позначимо, як зазвичай, символом H_p простір Гарді в одиничному крузі $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$, а символом $\|\cdot\|_p$ – стандартну норму в ньому.

Нехай $r \in \mathbb{N}$, $p \geq 1$, функція $f \in H_p$ і $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \widehat{f}_k z^k$, $\widehat{f}_k = f^{(k)}(0)/k!$, — її розвинення в ряд Тейлора. Позначимо

$$f^{(r)}(z) := i^r \sum_{k=1}^{\infty} k^r \widehat{f}_k z^k = \frac{\partial^r}{\partial x^r} f(\rho e^{ix}),\ z = \rho e^{ix}.$$

K–функціоналом порядку r на просторі H_p називається величина

$$K_r(f,\delta)_p := \inf\left\{\|f-g\|_p + \delta\|g^{(r)}\|_p : g^{(r)} \in H_p\right\}, \quad \delta > 0.$$

Цей функціонал відіграє роль можоранти для основних апроксимативних величин в теорії наближення. Зокрема, для величин найкращих многочлених наближень $E_n(f)_p := \inf_{P\in\mathcal{P}_{n-1}} \|f-P\|_p$, $n \in \mathbb{N}$, справджується таке

Твердження. *Нехай функція $f \in H_p$, $1 \leq p \leq \infty$. Тоді для будь-якого $n \in \mathbb{N}$ і $r \in \mathbb{N}$ має місце нерівність*

$$E_n(f)_p \leq K_r\left(f, n^{-r}\right)_p. \tag{1}$$

Для даного $n \in \mathbb{N}$ і будь-якого $r \in \mathbb{N}$ рівність досягається для функції $f(z) = z^n$.

З огляду на співвідношення (1) виникає природний інтерес до відшукання точних оцінок K–функціоналів.

В наступних теоремах наводяться точні оцінки K–функціоналів другого порядку функцій $f \in H_p$, виражені в термінах симетричних різниць першого і другого порядків відповідно похідної f' і самої функції f.

Нагадаємо, що в просторі H_p кожну функцію можна ототожнити зі своїми граничними значеннями на одиничному колі $\{z : |z| = 1\}$ і розглядати останні, як 2π–періодичну функцію дійсної змінної.

Теорема 1. *Нехай f — голоморфна функція така, що $f' \in H_p$, $1 \leq p \leq \infty$. Тоді для будь-якого $n \in \mathbb{N}$*

$$K_2\left(f, n^{-2}\right)_p \leq \frac{1}{2}\int_0^{\pi/n} \|f'(\cdot+t) - f'(\cdot-t)\|_p dt.$$

Для даного $n \in \mathbb{N}$ рівність досягається для функції $f(z) = z^n$.

Теорема 2. *Нехай $f \in H_p$, $1 \le p \le \infty$. Тоді для будь-якого $n \in \mathbb{N}$*

$$K_2\left(f, n^{-2}\right)_p \le \frac{n}{\pi - 2} \int_0^{\pi/(2n)} \|f(\cdot + t) - 2f(\cdot) + f(\cdot - t)\|_p dt.$$

Для даного $n \in \mathbb{N}$ рівність досягається для функції $f(z) = z^n$.

Найкращі наближення класів згорток періодичних функцій тригонометричними поліномами

Сердюк А.С.
serdyuk@imath.kiev.ua
Інститут математики НАНУ, Україна

Нехай послідовність амплітуд $\psi(k)$, $k = 1, 2, \ldots$, гармонік сумовного ядра

$$\Psi_\beta(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \psi(k) \cos\left(kt - \frac{\beta\pi}{2}\right), \quad \psi(k) > 0, \quad \beta \in \mathbb{R},$$

є опуклою послідовністю, починаючи з деякого номера n, тобто,

$$\Delta^2\psi(k) = \psi(k) - 2\psi(k+1) + \psi(k+2) \ge 0, \quad k = n, n+1, \ldots$$

Доведено, що виконання умови

$$\Delta^2\psi(n) > 2\sum_{\nu=1}^{\infty}\left(\frac{\psi\big((2\nu+1)n\big)}{\psi(n)} \sum_{j=1}^{\infty} \psi(n+j) + \sum_{j=0}^{\infty}{}' \psi\big((2\nu+1)n + j\big)\right),$$

в якій символ $\sum\limits_{j=0}^{\infty}{}'$ означає, що доданок з нульовим індексом слід поділити на 2, є достатньою умовою того, щоб ядро $\Psi_\beta(t)$ задовольняло умову Надя N_n^*.

Як наслідок, для класів згорток з такими ядрами

$$C^{\psi}_{\beta,p} = \{f \in C : \ f = \Psi_\beta * \varphi, \ ||\varphi||_p \le 1, \ \varphi \perp 1\}$$

при $p = 1$ і $p = \infty$ встановлено точні значення найкращих наближень тригонометричними поліномами в метриках просторів L і C відповідно.

Інтерференція у випадку наближення операторами Валле Пуссена функцій, визначених на дійсній осі

Сілін Є.С.

silin-evgen@meta.ua

Донбаський державний педагогічний університет, Україна

Нехай $\widehat{L}$ — простір функцій f, заданих на дійсній осі $\mathbb{R}$, які мають скінченну норму: $||f||_{\widehat{L}} = \sup_{a\in\mathbb{R}} \int_a^{a+2\pi} |f(t)|\ dt$. $\widehat{C}$ — підмножина неперервних функцій з $\widehat{L}$. $\mathfrak{A}$ — множина функцій $\psi(v)$, які: 1) зростають та неперервні на $[0,1)$, $\psi(v) \geq 0$, $\psi(0) = 0$; 2) $\psi(v)$ опукла на $[1,\infty)$ і $\lim_{v\to\infty} \psi(v) = 0$; 3) $\psi'(v+0)$ має обмежену варіацію на $[0;\infty)$. $\mathfrak{A}' := \{\psi \in \mathfrak{A} : \int_1^\infty \psi(v)/v\ dv < \infty\}$. Покладемо $\overline{\psi} := \psi_{1+} + i\psi_{2-}$, де ψ_{1+} і ψ_{2-} — парне та непарне продовження $\psi_1 \in \mathfrak{A}$ і $\psi_2 \in \mathfrak{A}'$ відповідно. Якщо $f \in \widehat{C}$ можна подати у вигляді $f(x) = A + \int_{\mathbb{R}} \varphi(x+t) \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \overline{\psi}(s) e^{-ist} ds dt := A + \varphi * \widehat{\overline{\psi}}$, де $A = \text{const}$, $\int_{\mathbb{R}} = \lim_{a\to\infty} \int_{-a}^{a}$, $\varphi : \operatorname{ess\,sup} |\varphi(t)| \leq 1$, то ми кажемо: 1) функція $\varphi(\cdot)$ є $\overline{\psi}$-*похідною* функції $f(\cdot)$ і позначаємо $f^{\overline{\psi}}(\cdot)$; 2) $f \in \widehat{C}^{\overline{\psi}}_\infty$. Для $f \in \widehat{C}^{\overline{\psi}}_\infty$ також означимо $V_{\sigma,h}(f;x) = A + f^{\overline{\psi}} * \widehat{\lambda_{\sigma,h}\overline{\psi}}(x)$ — *оператор Валле Пуссена*, де $0 < h = h(\sigma) < \sigma < \infty$, $\lambda_{\sigma,h}(t) = 1$ якщо $0 \leq |t| \leq \sigma - h$, $\frac{\sigma-|t|}{h}$ якщо $\sigma - h \leq |t| \leq \sigma$, 0 у випадку $\sigma \leq |t|$. Далі введемо множину $\mathfrak{A}_0 := \{\psi \in \mathfrak{A} : 0 < t/(\eta(t) - t) < \text{const}\}$, де $\eta(t) = \psi^{-1}\left(\frac{1}{2}\psi(t)\right)$. Предметом нашого дослідження є суми $\Sigma_{\sigma,h,m} = \sum\limits_{i=1}^{m} \alpha_i [f(x+\delta_i) - V_{\sigma,h}(f;x+\delta_i)]$, де $\alpha_i(\sigma)$ та $\delta_i(\sigma)$ — величини, які рівномірно обмежені по σ.

Теорема. *Нехай $\psi_1 \in \mathfrak{A}_0$, $\psi_2 \in \mathfrak{A}'_0$, $\mathfrak{A}'_0 := \mathfrak{A}_0 \cap \mathfrak{A}'$, дійсні числа $\sigma > h \geq 1$ такі, що $0 \leq \lim\limits_{\sigma\to\infty} (h/\sigma) < 1$, стала $a \in (0, \pi\sigma/h)$. Величини α_i та δ_i рівномірно обмежені по σ і h. Тоді*

$$\sup_{f\in\widehat{C}^{\overline{\psi}}_\infty} ||\Sigma_{\sigma,h,m}||_{\widehat{C}} = |\overline{\psi}(\sigma)| \left(\frac{4}{\pi^2} R_m \ln\frac{\sigma}{h} + \frac{2}{\pi} \left|\sum_{i=1}^m \int_\sigma^\infty \frac{\psi_2(t)}{t} \cos\left(\frac{a\delta_i}{\sigma}\right) dt\right|\right) +$$
$$+ O(1)|\overline{\psi}(\sigma)|, \quad \sigma \to \infty,$$

де $R_m = [(\sum_{i=1}^m \alpha_i \cos(\sigma\delta_i + \gamma))^2 + (\sum_{i=1}^m \alpha_i \sin(\sigma\delta_i + \gamma))^2]^{1/2}$, $\gamma = \operatorname{arctg}\frac{\psi_2(\sigma)}{\psi_1(\sigma)}$, *O(1) — величина, рівномірно обмежена щодо σ, h.*

1. Степанец А.И. Методы теории приближений: В 2 т. - Киев: Ин-т математики НАН Украины, 2002. — Т.2. — 468 с.
2. Дрозд В.В. Одновременное приближение функций и их производных операторами Фурье в среднем // Одновременное приближение функций и их производных операторами Фурье. — Киев, 1989. — С. 46 – 58. — (Препр. / АН Украины. Ин-т математики; 89.17).

Дослідження задач оптимального керування для деяких класів імпульсних систем

Станжицький О.М., Зима Г.С.

ostanzh@gmail.com, anna.zyma@mail.ru

Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Донбаський державний педагогічний університет, Україна

Розглядається задача оптимального керування імпульсною системою

$$\dot{x} = A(t,x) + B(t,x)u, t \neq t_i$$
$$\triangle\, x|_{t=t_i} = g_i(x)w_i \tag{1}$$

з критерієм якості

$$C(u,w) = \int_0^T [A^0(t,x) + B^0(t,u)]dt + A^1(x(t_1),...,x(t_N),t_1,...,t_N)+$$
$$+B^1(w_1,...,w_N,t_1,...,t_N) \to inf, \tag{2}$$

де $T > 0$ фіксоване, $t \in [0,T]$, $t_i \in (0,T]$, $N = N(T) < \infty$ - кількість моментів імпульсної дії на $(0,T]$, $u \in U \subset \mathbb{R}^m$, U - замкнена опукла множина в $\mathbb{R}^m$, $w_i(i = \overline{1,N}) \subset V$, V - замкнена опукла множина в $\mathbb{R}^r$. Функції $A(t,x), B(t,x)$ вважаються неперервними за сукупністю змінних $t \in [0,T]$, $x \in \mathbb{R}^n$, $g_i(x)$ - неперервні за $x \in \mathbb{R}^n$ та задовольняють за змінною x умову лінійного росту.

A^0, B^0, A^1, B^1 - неперервні за сукупністю змінних, причому $A^0 \geq 0, A^1 \geq 0$, а B^0 та B^1 задовольняють умови:

а) $B^0(t,u)$ - опукла по u та $B^0(t,u) \geq a|u|^p$ для деяких $a > 0$ і $p > 1$;

б) $B^1(w_1,...,w_N,t_1,...,t_N) \geq a(\mid w_1 \mid^p +...+ \mid w_N \mid^p)$.

Допустимими для задачі (1), (2) вважаються керування $u = u(t)$ та вектори $w_1,...,w_N$, що

1) $u(t) \in L_p(0,T], u(t) \in U, t \in [0,T]$;

2) $w_i \in V \;\; i = 1,...,N$.

Теорема. *Нехай для системи (1) з критерієм якості (2), виконуються вищевказані умови. Тоді задача (1), (2) має розв'язок в класі допустимих керувань, тобто існує оптимальне керування $u^*(t)$, що мінімізує критерій якості (2).*

Автономные нетеровы краевые задачи для систем обыкновенных дифференциальных уравнений в частном критическом случае

Старкова О.В., Чуйко Ан.С.

star-o@ukr.net

Донбасский государственный педагогический университет, Украина

Исследована задача о нахождения решения нетеровой ($m \neq n$) краевой задачи

$$dz/dt = Az + f + \varepsilon Z(z, \varepsilon), \quad \ell z(\cdot, \varepsilon) = \alpha + \varepsilon J(z(\cdot, \varepsilon), \varepsilon), \quad \alpha \in \mathbb{R}^m, \quad (1)$$

при $\varepsilon = 0$ обращающегося в решение $z_0(t) \in C^1[a, b^*]$ порождающей задачи

$$dz_0/dt = Az_0 + f, \quad \ell z_0(\cdot) = \alpha, \quad b^* = b(0), \quad A \in \mathbb{R}^{n \times n}, \quad f \in \mathbb{R}^n. \quad (2)$$

Обозначим $(m \times 1)$-мерную матрицу $\mathfrak{B}_0 = P_{Q^*}\{\alpha - \ell K[Az_0(\tau, c_0^*) + f](\cdot)\}$.

Теорема. *В критическом случае* ($P_{Q^*} \neq 0$) *для корня* $c^* = \mathrm{col}\ (c_0^*,\ \beta^*) \in \mathbb{R}^{r+1}$ *уравнения*

$$F(c^*) = P_{Q^*}\{\varphi_0(c^*) - \ell K[f_0(s, c^*)](\cdot)\} = 0, \quad (3)$$

$$\varphi_0(c^*) = \alpha\beta^* + J(z_0(\cdot, c_0^*), 0), f_0(t, c^*) = \beta^*[Az_0(t, c_0^*) + f] + Z(z_0, 0)$$

при условиях $F'_\beta(c^*) \neq 0$, $P_{\mathfrak{B}_0^*}(1)P_{Q^*} = 0$, $P_{\mathfrak{B}_0^*} : \mathbb{R}^{r+1} \to N(\mathfrak{B}_0^*)$ *имеет по меньшей мере одно решение* $z(t, \varepsilon) \in C^1[a, b(\varepsilon)], C[0, \varepsilon_0]$, *при* $\varepsilon = 0$ *обращающееся в решение* $z_0(t, c_0^*)$ *порождающей задачи (2).*

Здесь $Q = \ell X(\cdot)-$ $(m \times n)$-матрица, rank $Q = n - r$, $P_{Q^*}-$ ортопроектор: $\mathbb{R}^m \to N(Q^*)$, $X(t)-$ нормальная фундаментальная матрица однородной части дифференциальной системы (2), $K[f](t)-$ оператор Грина задачи Коши [1].

Для нахождения решения автономной краевой задачи (1) предложена итерационная схема, построенная по аналогии с методом наименьших квадратов [2]; в качестве примера построено периодическое решение уравнения Дюффинга.

1. Boichuk A.A. Generalized inverse operators and Fredholm boundary-value problems / A.A. Boichuk, A.M. Samoilenko. — Utrecht; Boston: VSP, 2004.— 317 p.
2. Чуйко С.М., Старкова О.В. О приближенном решении автономных краевых задач методом наименьших квадратов. Нелінійні коливання, 2009, **12**, № 4, — С. 556 — 573.
3. Чуйко С.М., Старкова О.В. Модифицированная двухшаговая итерационная техника для построения функций Матье. Комп. исследов. и моделирование, 2012, **4**, №1, С. 31 — 43.

Развитие творческого потенциала личности студентов в высшем негосударственном образовательном учреждении при изучении высшей математики

Степанов В.И.

rector@aeli.altai.ru

Алтайский экономико-юридический институт, г. Барнаул, Россия

Постоянное расширение и углубление сфер применения труда выпускника вуза, полифункциональность деятельности будущего специалиста обуславливает необходимость профессиональной мобильности и "по горизонтали"и "по вертикали". Компетентностный подход в образовании требует переориентации технологий обучения на самостоятельную исследовательскую работу. Развитие творческих качеств у студента, что, в свою очередь, требует инновационной методологической перестройки оценки качества усвоенных знаний. Навыков и способностей [1]. В Алтайском экономико-юридическом институте они изучают курс математики, который включает разделы - "Теория вероятностей и элементы математической статистики"и "Финансовая математика". Изучение первого раздела дает студентам возможность правильно оценивать приводимые в литературе данные, основанные на выборочных исследованиях: уровень бедности в разных регионах, готовность голосовать за того или иного кандидата, рост ВВП, рост заработной платы. Они получают знания, дающие студентам возможность самим оценить изменение курса доллара на сравнительно небольшом промежутке, оценить ошибку при получении статистических данных, когда опрос проводится по телефону. На семинарах и лабораторных занятиях применяются системы заданий, которые также формируют творческое мышление студентов, его понятийно-образно-практические компоненты. Для развития системного мышления на уроках используются интеллектуально-творческие игры. Эксперимент показал целесообразность применения данных игр при закреплении учебного материала. Студенты быстро включались в работу, принимали активное участие в ней до конца игры.

1. Шехонин, А.А., Тарлыков, В.А. Оценивание компетенций в сетевой среде вуза. Высшее образование в России, 2009, № 9, С. 17.

Особливості професійного становлення студентів вищих навчальних закладів

Ступак О.Ю.

stupak-oxana@rambler.ru

Донбаський державний педагогічний університет, Україна

В умовах докорінної перебудови всіх боків життя суспільства, утвердження Української держави на міжнародному рівні надзвичайно гостро виступає проблема професіоналізму в усіх сферах буття. Виникає потреба в ефективній підготовці нового типу спеціалістів, які б характеризувалися високими організаторськими, комунікативними, проективними та креативними здібностями. Визначальну роль у формуванні особистісного ставлення до професії, виявлення суб'єктності, розвитку самоуправління, здатності до управління ситуацією, процесом, колективом відіграють допрофесійні етапи, зокрема період навчання у вищому начальному закладі. Особливо набуття управлінської компетентності є значимим для педагогічної професії.

Намагання та готовність студентів брати активну участь у вирішенні навчально-виховних завдань, що стоять перед вищими навчальними закладами, зокрема педагогічними університетами, формує в майбутніх фахівців самостійне мислення, соціальну активність, організаторські, комунікативні та управлінські здібності, що, безумовно, є важливим для професійно-педагогічної та управлінської культури майбутнього вчителя. Водночас сучасна система вищої освіти стикається з низькою проблем, які характеризуються небажанням студентів розширювати свої знання, уміння та навички, несамостійністю під час навчального процесу, пасивністю в позанавчальний час. Ускладнення освітньо-виховних завдань сучасної вищої школи пояснюється її орієнтованістю на виховання самостійності та активності, мотивації до набуття знань майбутніх фахівців. Цю проблему, на наш погляд, можуть успішно розв'язати спеціально підготовлені випускники педагогічних університетів, діяльність яких спрямована на реалізацію сучасних освітніх вимог. Цьому сприяє їхня участь у позанавчальній діяльності ВНЗ, волонтерських, громадських об'єднаннях та організаціях, у тому числі в роботі органів студентського самоврядування вищих педагогічних закладів освіти. Однак, з огляду на широкі потенційні можливості студентського самоврядування у вищих навчальних закладах, передусім у педагогічних, постає вагома проблема недостатності узагальненого досвіду використання потенціалу самоврядних організацій у формуванні управлінської культури студентської молоді.

Про гладкість інваріантних торів зліченних систем еволюційних рівнянь

Теплінський Ю.В.

yuriy-teplinsky@yandex.ru

Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка, Україна

Останнім часом спостерігається посилення уваги багатьох дослідників до вивчення інваріантних многовидів різного виду рівнянь у різноманітних просторах. Відмітимо тут роботи [1–5], присвячені дослідженню інваріантних торів диференціальних, диференціально-різницевих та різницевих рівнянь у банахових просторах обмежених числових послідовностей $\mathfrak{M}$. У цьому повідомленні ми обговорюємо можливості застосування методу функції Гріна-Самойленка для вивчення властивостей неперервності та гладкості інваріантних торів таких систем у лінійному випадку.

Розглянуто такі системи рівнянь:

$$\frac{d\varphi}{dt} = a(\varphi), \quad \frac{dx}{dt} = P(\varphi)x + c(\varphi); \tag{1}$$

$$\varphi_{n+1} = \varphi_n + a(\varphi_n), \quad n \in Z, \tag{2}$$
$$x_{n+1} = P(\varphi_{n+p})x_n + c(\varphi_{n+g+1});$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = a(\varphi), \quad \frac{dx(t)}{dt} = B(\varphi, t)x(t+\Delta) + c(\varphi, t). \tag{3}$$

Тут

$$\{\varphi, x\} \subset \mathfrak{M}; \qquad P(\varphi) = [p_{ij}(\varphi)]_{i,j=1}^{\infty} \ \text{ та } \ B(\varphi, t) = [b_{ij}(\varphi, t)]_{i,j=1}^{\infty}$$

– нескінченні матриці;

$$a(\varphi), \quad c(\varphi) \ \text{ та } \ c(\varphi, t)$$

– вектор–функції відповідних розмірностей; елементи

$$b_{ij}(y_1(\varphi, t), y_2(\varphi, t), \dots)$$

матриці $B(\varphi, t)$ та координати

$$c_i(\varphi, t) = c_i(z_1(\varphi, t), z_2(\varphi, t), \dots)$$

функції $c(\varphi, t)$ визначаються рівностями

$$y_i(\varphi, t) = \varphi_{i_{t+\Gamma_i}}(\varphi) \ \text{ та } \ z_i(\varphi, t) = \varphi_{i_{t+\delta_i}}(\varphi)$$

відповідно,

$$x(t+\Delta) = (x_1(t+\Delta_1), x_2(t+\Delta_2), \dots);$$

Γ_i, δ_i та Δ_i – довільні фіксовані дійсні числа, $i = 1, 2, \ldots$; Z – множина цілих чисел, p і g – цілочислові параметри; $\varphi = \varphi_t(\varphi)$, $\varphi_0(\varphi) = \varphi$, є розв'язком першого рівняння систем (1) або (3).

Накладаючи на коефіцієнти систем (1) – (3) традиційні умови періодичності та інтерпретуючи координати вектора φ як кутові, вважаємо, що ці системи рівнянь визначені на декартовому добутку $\mathfrak{M} \times \mathcal{T}_\infty$, де $\mathcal{T}_\infty$ – нескінченновимірний тор.

Демонструються достатні умови неперервності та гладкості інваріантних торів систем рівнянь (1)–(3), а також напівінваріантного тору виродженої системи

$$\varphi_{n+1} = \varphi_n + a(\varphi_n), \quad x_{n+1} = P(\varphi_n)x_n + c(\varphi_n), \quad n \in Z.$$

1. Samoilenko A. M. and Teplinskii Yu. V. Countable Systems of Differential Equations. – Utrecht-Boston: VSP, 2003.
2. Самойленко А. М., Теплінський Ю. В. Елементи математичної теорії еволюційних рівнянь у банахових просторах. – Київ: Ін-т математики НАН України, 2008.
3. Самойленко А. М., Теплінський Ю. В., Пасюк К. В. Про існування інваріантних торів зліченних систем диференціально-різницевих рівнянь, визначених на нескінченновимірних торах // Нелінійні коливання. – 2009. – 12, №3. – С. 347-367.
4. Самойленко А. М., Теплінський Ю. В., Пасюк К. В. Про існування нескінченновимірних інваріантних торів нелінійних зліченних систем диференціально-різницевих рівнянь // Нелінійні коливання. – 2010. – 13, №2. – С. 253-271.
5. Teplinskiy Y. V., Pasyuk K. V. Infinite Dimensional Invariant Tori for Countable Systems of Differential-Difference Equations // Mathematical Analysis, Differential Equations and their Applications. – Sofia: Academic publishing house "Prof. Marin Drinov". – 2011. – P. 217-228.

Дослідження однієї крайової задачі

Філіпчук М.П.

filko@ukr.net

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича, Україна

Розглянемо крайову задачу для системи диференціальних рівнянь із перетвореним аргументом вигляду

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), x(\lambda(t))), \quad Ax(0) + Bx(T) + C\int_0^T x(t)dt = d, \quad (1)$$

де $t \in [0,T]$; $x, f \in R^n$; $\lambda : [0,T] \to [0,T]$ – довільне неперервне відображення; A, B, C – сталі $n \times n$ матриці; d – сталий n-вимірний вектор. Функція $f(t,x,y)$ є неперервною по t, x, y в області $G = [0,T] \times D \times D$, де D – замкнена обмежена область в R^n, обмежена вектором $M > 0$ і задовольняє умову Ліпшіца по x, y з матрицею $K \geq 0$.

Дослідження крайової задачі (1) здійснюється за допомогою модифікованої схеми чисельно-аналітичного методу А.М. Самойленка [1] без визначального рівняння.

Теорема. *Нехай виконуються умови:*

1) матриця $H = A + B + TC$ є невиродженою;

2) вектор $w_0 = H^{-1}d$ лежить в області D разом зі своїм $\beta = TSM$-околом, де $S = |H^{-1}B| + \frac{T}{2}|H^{-1}C| + E$;

3) найбільше власне значення матриці $Q = 2TSK$ не перевищує одиниці.

Тоді крайова задача (1) має в області D єдиний розв'язок $x^*(t)$, який є границею послідовних наближень

$$x_0(t) = w_0,$$

$$x_m(t) = w_0 - H^{-1}B\int_0^T g_{m-1}(s)ds - H^{-1}C\int_0^T\int_0^t g_{m-1}(s)dsdt +$$

$$+\int_0^t g_{m-1}(s)ds, \quad g_{m-1}(s) \equiv f(s, x_{m-1}(s), x_{m-1}(\lambda(s))), \quad m = 1, 2, \ldots,$$

причому $|x^*(t) - x_m(t)| \leq Q^m(E-Q)^{-1}\beta$ для всіх $t \in [0,T]$.

1. Самойленко А.М., Ронто Н.И. Численно-аналитические методы в теории краевых задач обыкновенных дифференциальных уравнений. – К.: Наук. думка, 1992. – 280 с.

Раціональні наближення класів згорток періодичних функцій

Чайченко С.О.

stolch@mail.ru

Донбаський державний педагогічний університет, Україна

Нехай $\{a_k\}_{k=0}^{\infty}$ — послідовність комплексних чисел $a_k \in \mathbb{C}$, $a_k \in \mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : \ |z| < 1\}$, причому $a_k = 0$ при $k = 0$, $k \geq n+1$. Розглянемо систему раціональних функцій [1, 2]

$$\varphi_0(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \ \varphi_k(z) = \sqrt{\frac{1-|a_k|^2}{2\pi}} \cdot \frac{1}{1-\overline{a}_k z} \cdot \prod_{j=0}^{k-1} \frac{z-a_j}{1-\overline{a}_j z}, \ k \in \mathbb{N}. \quad (1)$$

Визначимо ядро $K_\psi(x;t) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \psi(k)[\rho_k(x)\rho_k(t) + \tau_k(x)\tau_k(t)]$, де $\rho_0(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$, $\rho_k(t) = \sqrt{2} \cdot \mathrm{Re}\ \varphi_k(e^{it})$, $\tau_k(t) = \sqrt{2} \cdot \mathrm{Im}\ \varphi_k(e^{it})$, $k \in \mathbb{N}$, — система тригонометричних раціональних функцій, $\psi(k)$ — довільна незростаюча і опукла нуль-послідовність, і розглянемо клас 2π-періодичних функцій, які можуть бути подані у вигляді згортки

$$f(x) = A_0 + \int_0^{2\pi} g(t) K_\psi(x;t)\ dt, \quad g \in L_p, \quad (2)$$

де L_p, $p \geq 1$ — простір Лебега вимірних 2π-періодичних функцій. Нехай

$$R_n(f) = R_n(f; a_1, a_2, ..., a_n) = \inf_{\alpha_k, \beta_k} \Big\| f(\cdot) - \Big(\sum_{k=0}^{n} \alpha_k \rho_k(\cdot) + \sum_{k=1}^{n} \beta_k \tau_k(\cdot) \Big) \Big\|_C,$$

де $a_k \in \mathbb{D}$, $k = 1, 2, \ldots, n$ — набір чисел, які визначають систему (1), α_k, β_k — дійсні коефіцієнти, $||f||_C = \sup_{x \in [0;2\pi]} |f(x)|$. .

Через Θ_p позначимо множину послідовностей $\psi(n)$, кожна з яких задовольняє наступним умовам: 1) $\psi(n)$, $n = 1, 2, \ldots$, монотонно незростає; 2) знайдеться число $\varepsilon > 0$ і додатна стала C такі, що для всіх натуральних $k_1 > k_2 \geq 1$, $\quad k_1^{\frac{1}{p}+\varepsilon} \psi(k_1) \leq C k_2^{\frac{1}{p}+\varepsilon} \psi(k_2)$;

Теорема 1. *Нехай $g \in L_p$, $1 \leq p < \infty$ і $\psi \in \Theta_p$. Тоді згортка вигляду (2) є неперервною періодичною функцією і виконується нерівність*

$$R_n(f) \leq K \psi(n) n^{1/p}.$$

1. Takenaka C. On the orthogonal functions and a new formula of interpolation // Jap. Jour. of Math. – 1925. – № 2. – P. 129–145.
2. Malmquist F. Comptes rendus du sixiene congres des mathematiciens scandinares. Kopenhagen, 1925. P. 253.

О регуляризации линейной периодической краевой задачи с вырожденным импульсным воздействием в критическом случае

Чуйко Е.В., Белущенко А.В.
chujko-slav@inbox.ru

Донбасский государственный педагогический университет, Украина

Предположим T-периодическую задачу для системы

$$z' = A(t)z + f(t)$$

некорректно поставленной в классе функций $z(t) \in C^1[0,T]$. Нами исследованы условия регуляризации [1] краевой задачи

$$z' = A(t)z + f(t),\ \ell z(\cdot) := z(0) - z(T) = 0,\ \Delta z(\tau) = Sz(\tau - 0) \quad (1)$$

в пространстве [1,2]:

$$z(t) \in C^1\Big\{[0,T] \setminus \{\tau\}_I\Big\}.$$

Поставленная задача продолжает исследование условий регуляризации нетеровых краевых задач при помощи импульсного воздействия, приведенные в монографии [1] и статье [2] на случай не фиксированной матрицы S. Пусть $X_0(t)$ — нормальная ($X_0(\tau) = I_n$) фундаментальная матрица однородной части системы обыкновенных дифференциальных уравнений (1),

$$\mathcal{K}[f(s)](t) := -X_0(t)\int_t^\tau X_0^{-1}(s)f(s)ds, \quad t \in [0,\tau[,$$

$$\mathcal{K}[f(s)](t) := X_0(t)\int_\tau^t X_0^{-1}(s)f(s)ds, \quad t \in [\tau,T]$$

— обобщенный оператор Грина задачи Коши $z(\tau) = 0$ для дифференциальной системы (1) и $X(t)$ — нормальную фундаментальную матрицу однородной части системы с импульсным воздействием (1)

$$X(t) = X_0(t),\ \ t \in [0,\tau[;\ X(t) = X_0(t)(I_n + S),\ t \in [\tau,T].$$

Теорема. *Если задача о нахождении T-периодических решений дифференциальной системы (1) некорректно поставлена в классе функций*

$$z(t) \in C^1[0,T],$$

то для любого корня $\mathcal{S} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *уравнения*

$$(Q + Q_1 S)(Q + Q_1 S)^+ = I_n, \quad Q := \ell X_0(\cdot), \quad \mathcal{Q} := \ell X(\cdot) \in \mathbb{R}^{n\times n}$$

и для произвольной непрерывной функции $f(t)$ *в пространстве*

$$z(t) \in C^1\Big\{[0,T] \setminus \{\tau\}_I\Big\}$$

существует не менее одного решения $z(t) = \mathcal{G}[f(s)](t)$ *краевой задачи (1), где*

$$\mathcal{G}[f(s)](t) := \mathcal{K}[f(s)](t) - X(t)\mathcal{Q}^+\ell\mathcal{K}[f(s)](\cdot)$$

— обобщенный оператор Грина в задаче о регуляризации периодической краевой задачи (1).

В зависимости от матрицы $\mathcal{S}$ импульсное воздействие (1) является при условии

$$\det\Big(I_n + \mathcal{S}\Big) \neq 0$$

невырожденным [1], либо вырожденным [3,4]:

$$\det\Big(I_n + \mathcal{S}\Big) = 0.$$

Существенным отличием обобщенного оператора Грина в случае, когда уравнение [5]

$$(Q + Q_1 S)(Q + Q_1 S)^+ = I_n$$

имеет действительное решение $\mathcal{S} \in \mathbb{R}^{n\times n}$, от некорректно поставленной задачи о регуляризации линейной краевой задачи в рамках доказанной теоремы является независимость матрицы $\mathcal{S}$, а следовательно, и нормальной $(X(\tau) = I_n)$ фундаментальной матрицы $X(t)$ однородной части системы (1) от неоднородностей некорректно поставленной в классе функций

$$z(t) \in C^1[0,T]$$

краевой задачи (1).

1. Бойчук А.А., Перестюк Н.А., Самойленко А.М. Периодические решения импульсных дифференциальных систем в критических случаях. Дифференц. уравнения, 1991, **27**, No. 9, С. 1516 — 1521.
2. Бойчук А.А., Чуйко С.М. Бифуркация решений импульсной краевой задачи. Нелінійні коливання, 2008, **11**, № 1, С. 21 — 31.
3. Чуйко С.М., Чуйко Е.В. Обобщенный оператор Грина задачи Коши с импульсным воздействием. Докл. НАН Украины, 1999, No 6, С. 43 — 47.
4. Чуйко Е.В. Слабонелинейные краевые задачи с вырожденным импульсным воздействием.Доповіді НАНУ, 1996, № 11, С. 29 — 34.
5. Чуйко С.М. Про регуляризацію лінійної нетерової крайової задачі за допомогою виродженої імпульсної дії. Нелінійні коливання, 2013, **16**, № 1, С. 133 — 145.

Слабонелинейная нетерова краевая задача с импульсным воздействием в случае паметрического резонанса

Чуйко С.М.

chujko-slav@inbox.ru

Донбасский государственный педагогический университет, Украина

Исследована задача о построении решения [1–3]

$$z(t,\varepsilon) \in C^1\Big\{[a,b] \setminus \{\tau_i\}_I\Big\}, C[0,\varepsilon_0], \quad i = 1,\ 2,\ \dots\ ,\ p$$

краевой задачи

$$dz/dt = A(t)z + f(t) + \varepsilon Z(z,\mu,t,\varepsilon), \quad t \neq \tau_i, \quad \mathcal{L}z(\cdot,\varepsilon) = \alpha \tag{1}$$

в малой окрестности решения порождающей системы

$$dz_0/dt = A(t)z_0 + f(t), \quad \mathcal{L}z_0(\cdot) = \alpha, \quad t \neq \tau_i, \quad \alpha \in \mathbb{R}^m. \tag{2}$$

Здесь $\ell_i z(\cdot) : C^1[\tau_i, \tau_{i+1}] \to \mathbb{R}^m-$ линейные функционалы, $X(t)-$ нормированная фундаментальная матрица [1] однородной части краевой задачи (2). Предположим нелинейную вектор-функцию $Z(z,\mu,t,\varepsilon)$ непрерывно дифференцируемой по z и непрерывно дифференцируемой по μ в малой окрестности решения порождающей задачи (2) и начального значения $\mu_0(\varepsilon)$ собственной функции $\mu(\varepsilon)$. Кроме того считаем матрицу $A(t)$, нелинейную вектор-функцию $Z(z,\mu(\varepsilon),t,\varepsilon)$ и неоднородность порождающей задачи $f(t)$ непрерывными по t на отрезке $[a,b]$.

Нетерова ($m \neq n$) импульсная краевая задача (2) в критическом случае [3]

$$P_{Q^*} \neq 0, \quad P_{Q^*} : \mathbb{R}^m \to N(Q^*), \quad Q := \Big[\ell_0 X_0(\cdot)\ \dots\ \ell_p X_0(\cdot)\Big]$$

разрешима тогда и только тогда, когда

$$P_{Q^*}\Big\{\alpha - \mathcal{L}K\Big[f(s)\Big](\cdot)\Big\} \neq 0 \tag{3}$$

в виде

$$z(t,c_r) = X_r(t)c_r + G\Big[f(s);\alpha\Big](t),$$

где

$$K\Big[f(s)\Big](t) = X_0(t)\int_a^t X_0^{-1}(s)f(s)ds$$

— оператор Грина задачи Коши для дифференциальной системы (2), $X_0(t)-$ нормальная фундаментальная матрица [3] однородной части этой системы. Необходимые условия существования решения нетеровой краевой задачи (1) в случае параметрического резонанса [4] определяет следующая лемма, являющаяся обобщением соответствующего утверждения [5].

Лемма. *Пусть нетерова* $(m \neq n)$ *краевая задача (1) представляет критический* $(P_{Q^*} \neq 0)$ *случай и выполнено условие разрешимости (3) порождающей задачи (2). Предположим также, что в малой окрестности решения* $z_0(t, c_0)$ *порождающего уравнения слабонелинейная система (1) имеет решение*

$$z(t,\varepsilon) \in C^1\Big\{[a,b] \setminus \{\tau_i\}_I\Big\}, C[0,\varepsilon_0], \quad i = 1,\ 2,\ \dots\ ,\ p$$

при этом в достаточно малой окрестности точки μ_0 *существует собственная функция* $\mu(\varepsilon) \in C[0,\varepsilon_0]$. *Тогда имеет место равенство*

$$\mathcal{F}(c_0,\mu_0) := P_{Q^*}\ell K\Big[Z(z_0(s,c_0),\mu_0,s,\varepsilon)\Big](\cdot) = 0.$$

По аналогии с нетеровыми слабонелинейными краевыми задачами в критическом случае [1], а также периодическими краевыми задачами [2], последнее уравнение будем называть уравнением для порождающих констант задачи (1) в случае параметрического резонанса. Нами доказано, что наличии простых действительных корней уравнения для порождающих констант краевая задача (1) в малой окрестности решения $z_0(t, c_0)$ порождающей задачи (2) и в достаточно малой окрестности начального значения μ_0 собственной функции $\mu(\varepsilon)$ задача (1) имеет по меньшей мере одно решение.

1. Boichuk A.A., Samoilenko A.M. Generalized inverse operators and Fredholm boundary-value problems.— Utrecht; Boston: VSP, 2004.— XIV + 317 pp.
2. Самойленко А.М., Перестюк Н.А. Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием.– Киев: Вища шк, 1987.– 287 с.
3. Чуйко С.М. Обобщенный оператор Грина краевой задачи с импульсным воздействием // Дифференц. уравнения. № 8. 2001, **37**. С. 1132 — 1135.
4. Шмидт Г. Параметрические колебания. — М.: Мир, 1978. — 336 с.
5. Чуйко С.М., Кулиш П.В. Линейная нетерова краевая задача в случае параметрического резонанса // Труды ИПММ НАН Украины. — 2012. — **24**. — С. 243 — 252.

Периодическая задача для уравнения Хилла в случае параметрического резонанса в критическом случае

Чуйко С.М., Кулиш П.В.
chujko-slav@inbox.ru
Донбасский государственный педагогический университет, Украина

Исследована задача о нахождения периодического решения

$$y(t,\varepsilon) \in C^2[0,2\pi], \quad C[0,\varepsilon_0], \quad \mu(\varepsilon) \in C[0,\varepsilon_0]$$

уравнения Хилла

$$y'' + y = f(t) + \varepsilon Y(y, \mu(\varepsilon), t, \varepsilon), \quad (1)$$

при $\varepsilon = 0$ обращающегося в решение порождающего уравнения

$$y_0'' + y_0 = f(t).$$

Периодическая задача для уравнения (1) представляет критический случай [1].

Лемма. *Предположим $2\pi-$ периодическую задачу для порождающего уравнения разрешимой, а также предположим, что периодическая задача для уравнения (1) имеет решение, при $\varepsilon = 0$ обращающееся в порождающее $y_0(t, c_0)$, и собственную функцию $\mu(\varepsilon) : \mu(0) = \mu_0$; тогда вектор*

$$\check{c}_0 := \mathrm{col}\left(c_0,\ \mu_0\right) \in \mathbb{R}^2$$

удовлетворяет уравнению для порождающих амплитуд

$$\int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} \cos s \\ -\sin s \end{pmatrix} Y(y_0(s,c_0), \mu_0, s, 0)\ ds = 0. \quad (2)$$

Нами получены достаточные условия существования единственного периодического решения уравнения (1) в случае простых [2] действительных корней уравнения для порождающих амплитуд (2). Для нахождения решения задачи (1) предложена гибридная итерационная техника, построенная по аналогии с методом наименьших квадратов [3].

1. Boichuk A.A., Samoilenko A.M. Generalized inverse operators and Fredholm boundary-value problems. // — Utrecht; Boston: VSP, 2004. — PP. 317.
2. Якубович В.А., Старжинский В.М. Параметрический резонанс в линейных системах. // — М.: Наука, 1987. — С. 328.
3. Чуйко С.М., Кулиш П.В. Линейная нетерова краевая задача в случае параметрического резонанса. // Труды Инст. прикладной математики и механики НАН Украины. — 2012. **24** — С. 250 — 259.

Ускорение сходимости итерационной схемы для автономной нетеровой краевой задачи методом Ньютона

Чуйко С.М., Любимая О.Е.
chujko-slav@inbox.ru
Донбасский государственный педагогический университет, Украина

Для нахождения решения

$$z(t,\varepsilon) \in C^2[a, b(\varepsilon)],\ C[0,\varepsilon_0],\ b(\cdot) \in C[0,\varepsilon_0]$$

автономной краевой задачи для ситемы обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка [4,5]

$$z'' = Az + f + \varepsilon Z(z, z', \varepsilon),\ \ell z(\cdot,\varepsilon) = \alpha + \varepsilon J(z(\cdot,\varepsilon), z'(\cdot,\varepsilon), \varepsilon), \qquad (1)$$

при $\varepsilon = 0$ обращающегося в решение порождающей краевой задачи

$$z_0'' = Az_0 + f, \quad A \in \mathbb{R}^{n\times n}, \quad f \in \mathbb{R}^n, \quad \ell z_0(\cdot) = \alpha, \quad \alpha \in \mathbb{R}^m \qquad (2)$$

по схеме Ньютона построена итерационная схема.

В критическом случае ($P_{Q^*} \neq 0$) при условии

$$P_{Q^*}\{\alpha - \ell K[f](\cdot)\} = 0$$

порождающая задача (2) имеет семейство решений [1]

$$z_0(t, c_0) = X_r(t)c_0 + G\Big[f;\alpha\Big](t), \quad X_r(t) = X(t)P_{Q_r}, \quad c_0 \in \mathbb{R}^r.$$

Здесь $Q = \ell X(\cdot)-$ $(m \times n)-$ матрица, rank $Q = n_1,\ n - n_1 = r$, $P_{Q^*}-$ $(m\times m)$- матрица-ортопроектор $P_{Q^*} : \mathbb{R}^m \to N(Q^*)$, $X(t)$- фундаментальная матрица однородной части дифференциальной системы (2); P_{Q_r}-$(n\times r)$-матрица, составленная из r- линейно-независимых столбцов $(n\times n)-$ матрицы-ортопроектора $P_Q : \mathbb{R}^n \to N(Q)$; $K[f](t)$ — оператор Грина задачи Коши для дифференциальной системы (2);

$$G\Big[f;\alpha\Big](t) = X(t)Q^+\left\{\alpha - \ell K\Big[f\Big](\cdot)\right\} + K\Big[f\Big](t)$$

— обощенный оператор Грина задачи (2).

Предположим выполненными необходимые и достаточные условия разрешимости [1,2] задачи (1). Для нахождения решения задачи (1) в малой окрестности порождающего решения $z_0(t, c_0)$ и функции

$$\check{c}(\varepsilon) := \mathrm{col}(c(\varepsilon), \beta(\varepsilon)),\ \check{c}(0) = \check{c}_0 = \mathrm{col}(c_0, \beta_0)$$

в статье [3] построен оператор

$$\Psi\Big(\check{c}(\varepsilon), z(\tau,\varepsilon)\Big)(\varepsilon): \ C[0,\varepsilon_0] \to C[0,\varepsilon_0],$$

где

$$\begin{aligned}\Psi(\check{c}(\varepsilon), z(\tau,\varepsilon))(\varepsilon) := \check{c}(\varepsilon) + B_0^+ P_{Q_d^*}\{\varepsilon\beta^2\alpha + \ell_1\xi(\cdot,\varepsilon) + \ell_2\xi'(\cdot,\varepsilon) + \\ + \varepsilon\ell_3(z_0(\cdot,c_0)) + J_1(z,z,\varepsilon) + \varepsilon\beta(2+\varepsilon\beta)\tilde{J}(z,z',\varepsilon) - \\ - \ell K\{2\beta Ax + \varepsilon\beta^2(Az+f) + A_1(\tau)\xi + A_2(\tau)\xi' + \varepsilon A_3(z_0(\tau,c_0)) + \\ + R_1(z,z',\varepsilon) + \varepsilon\beta(2+\varepsilon\beta)Z(z,z',\varepsilon)\}(\cdot)\}.\end{aligned}$$

Нами и предложена итерационная схема, сходящаяся при условии $2\cdot\gamma_1\cdot\gamma_2\cdot\gamma_3 < 1$; величины $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ гарантируют выполнение неравенств

$$||\Psi(\check{c}_0, z(t,\varepsilon))|| \le \gamma_1,$$

$$||(\Psi'_b(\check{c}_0, z(t,\varepsilon))^{-1}|| \le \gamma_2,$$

$$||\Psi''_{\check{c}^2}(\check{c}(\varepsilon), z(t,\varepsilon)|| \le \gamma_3.$$

Ефективность предложенной техники с использованием метода Ньютона-Канторовича продемонстрирована на примере периодической задачи для уравнения Льенара и Ван-дер-Поля.

1. Boichuk A.A., Samoilenko A.M. Generalized inverse operators and Fredholm boundary-value problems. — Utrecht; Boston: VSP, 2004. — 317 p.
2. Чуйко С.М. Область сходимости итерационной процедуры для автономной краевой задачи. Нелинейные колебания, 2006, **9**, № 3, С. 416 – 432.
3. S.M.Chuiko, I.A.Boichuk, and O.E.Pirus On the approximate solution of an autonomous boundary-value problem by the Newton-Kantorovich method. Journal of Mathematical Sciences, 2013, **189**, №5, С. 867 — 881.
4. Любима О.Є. Прискорення ітерацій для автономної крайової задачі методом Ньютона-Канторовича. Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Серія: фізико-математичні науки, 2012, №4, С. 64 — 67.
5. Чуйко Е.В., Любимая О.Е., Чуйко Ан. С. Автономная периодическая задача для уравнения типа Хилла. Вісник Харківського національного університету імені В.Н. Каразіна. Серія: Математика, прикладна математикиа і механіка, 2012, **66**, № 1030, С.38 — 53.

Порядкові оцінки найкращих n-членних ортогональних тригонометричних наближень деяких класів функцій багатьох змінних

Шидліч А.Л.
andy709@list.ru
Інститут математики НАНУ, Україна

Нехай $\mathbb{R}^d$, $d\geq 1$, — d-вимірний простір з елементами $\mathbf{x}=(x_1,\ldots,x_d)$, і $L_p(\mathbb{T}^d)$, $1\leq p<\infty$, $\mathbb{T}^d=\prod\limits_{j=1}^{d}[-\pi,\pi]$, — простір 2π-періодичних за кожною змінною функцій $f(\mathbf{x})$ зі стандартною нормою $||f||_{L_p}$. Покладемо $(\mathbf{k},\mathbf{x}):=\sum_{j=1}^{d}k_jx_j$ і $\widehat{f}(\mathbf{k}):=(2\pi)^{-d}\int_{\mathbb{T}^d}f(\mathbf{x})e^{-i(\mathbf{k},\mathbf{x})}d\mathbf{x}$, $\mathbf{k}\in\mathbb{Z}^d$.

Через l_p^d, $0<p\leq\infty$, позначимо простір всіх елементів $\mathbf{x}=(x_1,\ldots,x_d)\in\mathbb{R}^d$, для яких є скінченною l_p-норма (квазі-норма)

$$|\mathbf{x}|_p:=||\mathbf{x}||_{l_p}=\begin{cases}\left(\sum_{k=1}^{d}|x_k|^p\right)^{1/p}, & p\in(0,\infty),\\ \sup_{1\leq i\leq d}|x_i|, & p=\infty.\end{cases}$$

Нехай, далі, $\psi=\psi(t)$, $t\geq 1$, — довільна додатна спадна функція, $\psi(0):=\psi(1)$ і $0<q,r\leq\infty$.

Вивчається асимптотична поведінка деяких важливих апроксимативних величин класів функцій багатьох змінних

$$\mathcal{F}_{q,r}^{\psi}:=\left\{f\in L_1(\mathbb{T}^d)\ :\quad ||\{|\widehat{f}(\mathbf{k})|/\psi(|\mathbf{k}|_r)\}_{k\in\mathbb{Z}^d}||_{l_q(\mathbb{Z}^d)}\leq 1\right\}.$$

Теорема. *Нехай $1\leq r\leq\infty$, $1\leq p<\infty$, $0<q<\infty$, ψ — довільна додатна спадна до нуля функція, для якої $\psi(t)/\psi(2t)\leq K_1$, $t\geq 1$, і яка при $0<p/(p-1)<q$, крім цього, є опуклою вниз і задовольняє умову*

$$\frac{t|\psi'(t)|}{\psi(t)}\geq K_2>\begin{cases}d(\frac{1}{2}-\frac{1}{q}), & 1<p\leq 2,\\ d(1-\frac{1}{p}-\frac{1}{q}), & 2\leq p<\infty,\end{cases}\quad,\quad \psi'(t):=\psi'(t+).$$

Тоді, якщо γ_n — довільний набір із n різних елементів з множини $\mathbb{Z}^d$, то

$$e_n^{\perp}(\mathcal{F}_{q,r}^{\psi})_{L_p}:=\sup_{f\in\mathcal{F}_{q,r}^{\psi}}\inf_{\gamma_n}||f(\cdot)-\sum_{\mathbf{k}\in\gamma_n}\widehat{f}(\mathbf{k})e^{i(\mathbf{k},\cdot)}||_{L_p}\asymp\begin{cases}\frac{\psi(n^{\frac{1}{d}})}{n^{\frac{1}{q}-\frac{1}{2}}}, & 1\leq p\leq 2,\\ \frac{\psi(n^{\frac{1}{d}})}{n^{\frac{1}{q}+\frac{1}{p}-1}}, & 2\leq p<\infty.\end{cases}$$

Зазначимо, що величину $e_n^{\perp}(\mathcal{F}_{q,r}^{\psi})_{L_p}$ називають найкращим n-членним ортогональним тригонометричним наближенням класу $\mathcal{F}_{q,r}^{\psi}$ в просторі $L_p(\mathbb{T}^d)$, а також, що апроксимативні характеристики в просторах $L_p(\mathbb{T}^d)$ класів $\mathcal{F}_{q,r}^{\psi}$ для деяких $r\in(0,\infty]$ і деяких функцій ψ досліджувались в роботах В.М. Темлякова, Р. Де Вора, О.І. Степанця, Р.С. Лі, Ю.П. Лю та ін.

О поведении решения линейного автономного стохастического уравнения в частных производных со случайными параметрами в правой части

Юрченко И.В., Ясинский В.К.

yurchiv@rambler.ru, yasinsk@list.ru

Черновицкий национальный университет им. Ю. Федьковича, Украина

Рассмотрим стохастический эксперимент с базовым вероятностным пространством $(\Omega, \mathcal{F}, F, \mathbb{P})$, $F \equiv \{\mathcal{F}_t, t \geqslant 0\}$ – фильтрация, где задана функция $u(t,x,\omega)$, измеримая с вероятностью единица по t и x относительно минимальной σ-алгебры $\mathcal{B}\left([0,T], \mathbb{R}^1\right)$ – борелевских множеств на плоскости и для которой $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \mathbb{E}\left\{|u(t,x,\omega)|^2\right\} dx < \infty$ для всех $t \in [0,T]$, $\mathbb{E}\{\cdot\}$ — математическое ожидание, $T \subset [0,\infty)$. Пространство функции $\{u(t,x,\omega)\}$, обладающее свойством интегрируемости, обозначим через $\mathfrak{M}_T$. В пространстве $\mathfrak{M}_T$ следует ввести норму вида $\|u(t,x,\omega)\|^2 \equiv \int\limits_0^T \mathbb{E}_u(t)dt = \int\limits_0^T \mathbb{E}\left[\int\limits_{-\infty}^{+\infty} |u(t,x,\omega)|^2 dx\right]^2 dt$.

Обозначим через $Q(A,q,p) \equiv \sum\limits_{k=1}^{n} \sum\limits_{j=1}^{m} a_{kj} q^k p^j$, где $A \equiv \{a_{kj}\}$ – действительная матрица размерности $n \times m$, составленная из элементов $a_{kj} \in \mathbb{R}^1$. Рассматриваем на $(\Omega, \mathcal{F}, F, \mathbb{P})$ задачу Коши для линейного стохастического уравнения в частных производных (ЛСДУсЧП) вида $\frac{\partial}{\partial t}\left[Q\left(A, \frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}\right) u(t,x,\omega)\right] + Q\left(B, \frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}\right) u(t,x,\omega) = \varphi(\xi(\omega))$ $Q\left(C, \frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}\right) u(t,x,\omega) \frac{dw(t,\omega)}{dt}$, $Q\left(A, \frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}\right) u(t,x,\omega)\big|_{t=0} = [Qu]_0$, $B \equiv \{b_{ij}\}_{i,j=1}^{k,n}$, $b_{ij} \in \mathbb{R}^1$; $C \equiv \{c_{ij}\}_{i,j=1}^{k,n}$, $c_{ij} \in \mathbb{R}^1$, $\varphi(\cdot)$ — бэровская функция с областью значений $\mathbb{R}^1$, $\xi(\omega)$ — случайная величина, заданная плотностью $p_\xi(x)$ (или функцией распределения), $w(t,\omega)$ — одномерный винеровский процесс, причем $\xi(\omega)$ не зависит от $w(t,\omega)$.

Получены достаточные условия в терминах коэффициентов асимптотической устойчивости и неустойчивости в среднем квадратическом сильного решения этого уравнения.

1. Гихман И.И., Скороход А.В. Стохастические дифференциальные уравнения с частными производными.– К.: Ин-т математики АН УССР.– 1981.– С.25–59.
2. Царьков Е.Ф., Ясинский В.К. Квазилинейные стохастические дифференциально-функциональные уравнения.– Рига: Ориентир, 1992.– 301 с.
3. Перун Г.М., Ясинский В.К. Исследование задачи Коши для стохастических уравнений в частных производных // Укр. мат. журн.– 1993.– Т.45, № 9.– С.1773–1781.

ЗМІСТ

Наукове видання

Міжнародна математична конференція
"Крайові задачі, теорія функцій та їх застосування"

Слов'янськ, 12 – 14 червня 2013 р.

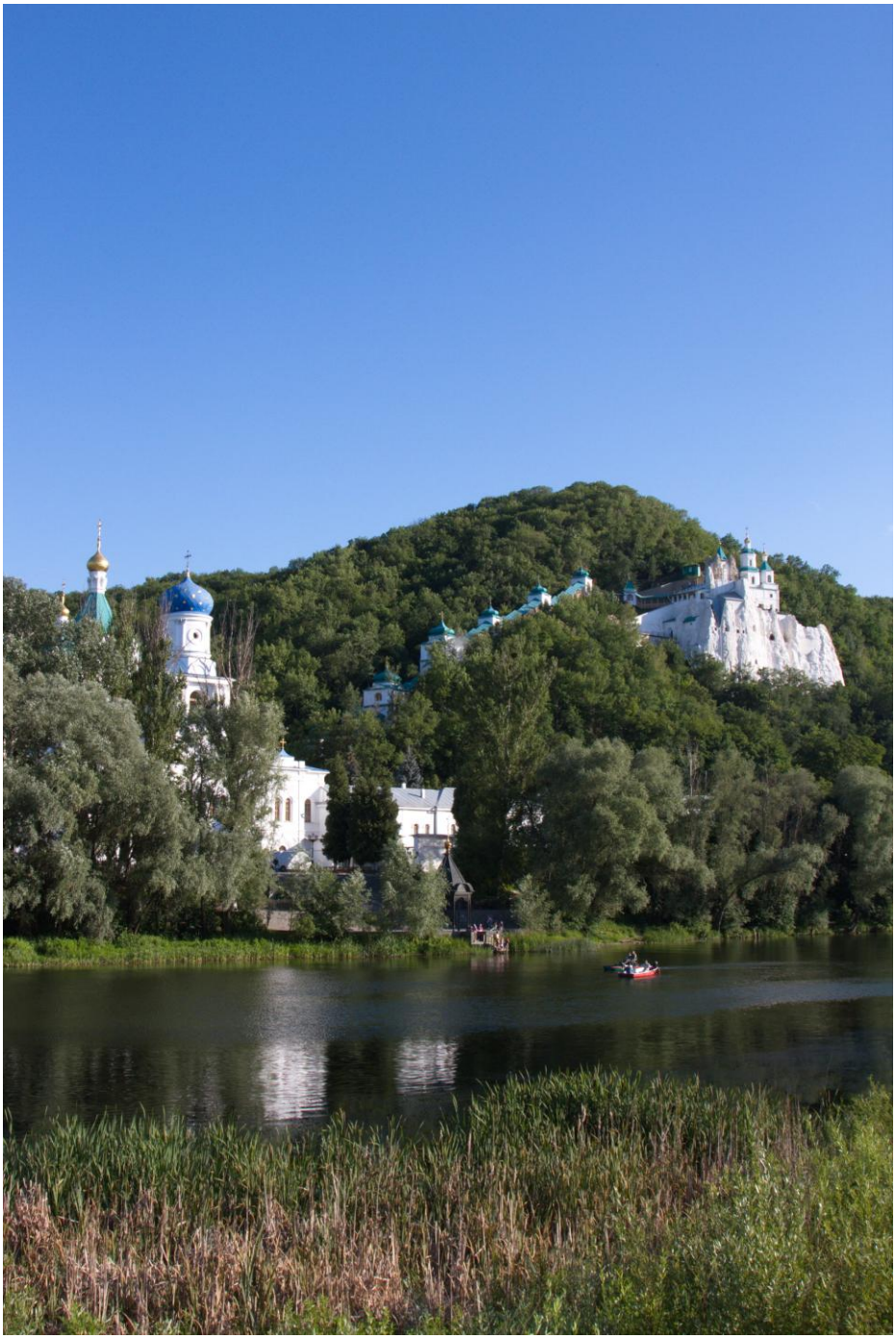
Матеріали конференції

Формат 60 84 1/16.
Наклад 120 прим.

Видавництво Маторіна Б.І.
84116, м. Слов'янськ, вул. Г. Батюка, 19.
Тел./факс +38 06262 3-20-99. Email: matorinb@ukr.net

Свідоцтво про внесення суб'єкта видавничої справи до Державного реєстру видавців, виготівників і розповсюджувачів видавничої продукції ДК №3141, видане Державним комітетом телебачення та радіомовлення України від 24.03.2008 р.

Міжнародна математична конференція
Крайові задачі, теорія функцій та їх застосування
з нагоди 75-річчя з дня народження академіка
А. М. Самойленка



12 – 14 червня 2013 р.
Слов'янськ