Інститут математики НАН України
Донбаський державний педагогічний університет

Міжнародна конференція

«ТЕОРІЯ НАБЛИЖЕННЯ ФУНКЦІЙ ТА ЇЇ ЗАСТОСУВАННЯ»

присвячена 75-річчю з дня народження
члена-кореспондента НАН України,
професора О.І. Степанця (1942 – 2007)

28 травня – 3 червня 2017 року
Слов'янськ, УКРАЇНА

Тези доповідей

Слов'янськ – 2017

Інститут математики НАН України
Донбаський державний педагогічний університет

Міжнародна конференція

«ТЕОРІЯ НАБЛИЖЕННЯ ФУНКЦІЙ ТА ЇЇ ЗАСТОСУВАННЯ»

присвячена 75-річчю з дня народження
члена-кореспондента НАН України,
професора О.І. Степанця (1942 – 2007)

28 травня – 3 червня 2017 року

Слов'янськ, УКРАЇНА

Тези доповідей

Слов'янськ – 2017

Institute of Mathematics of NAS of Ukraine
Donbas State Pedagogical University

International conference

«THEORY OF APPROXIMATION OF FUNCTIONS AND ITS APPLICATIONS»

In honor of 75th anniversary of
Corresponding Member of NAS of Ukraine,
Professor Alexander Stepanets (1942 – 2007)

May, 28 – June 3, 2017

Slovyansk, UKRAINE

ABSTRACTS

Slovyansk – 2017

Міжнародна конференція «ТЕОРІЯ НАБЛИЖЕННЯ ФУНКЦІЙ ТА ЇЇ ЗАСТОСУВАННЯ» присвячена 75-річчю з дня народження члена–кореспондента НАН України, професора О.І. Степанця (1942-2007), 28 травня – 3 червня 2017 року, Слов'янськ, УКРАЇНА: Тези доповідей. – Слов'янськ: Донбаський державний педагогічний університет, 2017. – 104 с.

Співголови

Самойленко А.М. (Київ, Україна)

Омельченко С.О. (Слов'янськ, Україна)

Заступники голів

Савчук В.В. (Київ, Україна)

Сердюк А.С. (Київ, Україна)

Чайченко С.О. (Слов'янськ, Україна)

Вчені секретарі

Соколенко І.В. (Київ, Україна)

Шидліч А.Л. (Київ, Україна)

Програмний комітет

Абдуллаєв Ф. (Туреччина)
Білалов Б.Т. (Азербайджан)
Бойчук О.А. (Україна)
Бігун Я.Й. (Україна)
Вакарчук С. Б. (Україна)
Ван Куньян (Китай)
Ґоґінава У. (Грузія)
Голуб А.П. (Україна)
Задерей П.В. (Україна)
Зелінський Ю.Б. (Україна)
Коробов В.І. (Україна)
Макаров В.Л. (Україна)
Маслюченко В.К. (Україна)
Моторний В.П. (Україна)
Перевєрзєв С.В. (Австрія)
Пінкус А. (Ізраїль)
Працьовитий М.В. (Україна)
Престін Ю. (Німеччина)
Романюк А.С. (Україна)
Ронто М.Й. (Угорщина)
Савчук В.В. (Україна)
Самойленко А.М. (Україна)
Сердюк А.С. (Україна)
Сєндов Б. (Болгарія)
Скасків О.Б. (Україна)
Станжицький О.М. (Україна)
Тіман М.П. (Україна)
Хусаїнов Д.Я. (Україна)
Чайченко С.О. (Україна)
Чуйко С.М. (Україна)
Шевчук І.О. (Україна)

Члени оргкомітету

Кадубовський О.А.
Карпенко А.О.
Набока О.Г.
Новіков О.О.
Проскунін В.М.
Сілін Є.С.
Стасюк С.А.
Ступак О.Ю.
Ровенська О.Г.
Шулік Т.В.

International conference «THEORY OF APPROXIMATION OF FUNCTIONS AND ITS APPLICATIONS» in honor of 75th anniversary of Corresponding Member of NAS of Ukraine, Professor Alexander Stepanets (1942-2007), May, 28 – June 3, 2017, Slovyansk, UKRAINE: Abstracts. – Slovyansk: Donbas State Pedagogical University, 2017. – 104 p.

Conference Chairs

Samoilenko A.M. (Kyiv, Ukraine)

Omelchenko S.O. (Slovyansk, Ukraine)

Conference Co-Chairs

Savchuk V.V. (Kyiv, Ukraine)

Serdyuk A.S. (Kyiv, Ukraine)

Chaichenko S.O. (Slovyansk, Ukraine)

Science secretaries

Shydlich A.L. (Kyiv, Ukraine)

Sokolenko I.V. (Kyiv, Ukraine)

Program committee

Abdullayev F. (Turkey)
Bigun Ya.I. (Ukraine)
Bilalov B.T. (Azerbaijan)
Boichuk O.A. (Ukraine)
Chaichenko S.O. (Ukraine)
Chuiko S.M. (Ukraine)
Goginava U. (Georgia)
Golub A.P. (Ukraine)
Khusainov D.Ya. (Ukraine)
Korobov V.I. (Ukraine)
Makarov V.L. (Ukraine)
Maslyuchenko V.K. (Ukraine)
Motornyi V.P. (Ukraine)
Pereverzev S.V. (Austria)
Pinkus A. (Israel)
Pratsiovytyi M.V. (Ukraine)
Prestin J. (Germany)
Romanyuk A.S. (Ukraine)
Ronto M. (Hungary)
Samoilenko A.M. (Ukraine)
Savchuk V.V. (Ukraine)
Sendov B. (Bulgaria)
Serdyuk A.S. (Ukraine)
Shevchuk I.O. (Ukraine)
Skaskiv O.B. (Ukraine)
Stanzhytskyi O.M. (Ukraine)
Timan M.F. (Ukraine)
Vakarchuk S.B. (Ukraine)
Wang K. (China)
Zaderey P.V. (Ukraine)
Zelinskii Yu.B. (Ukraine)

Organizing committee members

Kadubovs'kyi O.A.
Karpenko A.O.
Naboka O.H.
Novikov O.O.
Proskunin V.M.
Rovenska O.H.
Shulyk T.V.
Silin Ye.S.
Stasyuk S.A.
Stupak O.Yu.

Зміст / Contents

Олександр Іванович Степанець
(1942 – 2007)

24 травня 2017 року виповнюється 75 років від дня народження видатного українського математика, доктора фізико-математичних наук, професора, члена-кореспондента НАН України Олександра Івановича Степанця.

Олександр Іванович народився 24 травня 1942 року в селі Комарівка на Чернігівщині у вчительській родині. У 1959 році зі срібною медаллю закінчив Комарівську середню школу і у 1960 році вступив на механіко-математичний факультет Київського державного університету імені Тараса Шевченка. Вже під час навчання в університеті під керівництвом В.К. Дзядика зробив перші кроки у велику науку.

По закінченні університету у жовтні 1965 року почав працювати на посаді інженера в Інституті математики АН УРСР, в якому пропрацював до кінця свого життя. У 1967 році вступив до аспірантури Інституту математики і достроково у 1969 році захистив кандидатську дисертацію. У 1974 р. він блискуче захистив дисертацію на здобуття наукового ступеня доктора фізико-математичних наук. У 1982 р. О.І. Степанцю було присвоєно вчене звання професора. У 1997 р. обрано членом-кореспондентом НАН України. З 1990 р. Олександр Іванович – завідувач відділу теорії функцій, з 1996 р. – заступник директора з наукової роботи Інституту математики НАН України.

О.І. Степанець відомий спеціаліст у галузі теорії наближення функцій дійсної та комплексної змінної, теорії рядів Фур'є, гармонічного аналізу, теорії екстремальних задач.

У 70-х роках минулого століття він створив методи, що дозволяють розв'язувати задачу Колмогорова-Нікольського на класах функцій як однієї, так і багатьох змінних, які визначаються за допомогою модулів неперервності. Зокрема, ним було доведено багатовимірний аналог леми Корнєйчука-Стечкіна. Це дало змогу знайти розв'язки задачі Колмогорова-Нікольського для багатьох лінійних процесів підсумовування рядів Фур'є, для яких ці задачі розв'язати існуючими раніше методами не вдавалось.

До початку 80-х років XX сторіччя найбільш загальними класами періодичних функцій, для яких розглядались задачі теорії наближень, були класи, що визначаються похідними у сенсі Вейля та Вейля–Надя. Ці класи відіграють дуже важливу роль у різних розділах математики, проте в шкалах цих класів неможливо ранжувати сумовні функції малої гладкості, які не мають жодної з таких похідних, а також нескінченно диференційовні функції.

У 1983 році Олександр Іванович Степанець ввів поняття $(\psi, \bar{\beta})$-похідної, яке включає в себе і поняття похідних за Вейлем та за Вейлем-Надєм. Створена ним класифікація періодичних функцій має досить загальних характер, оскільки вона з одного боку дозволяє ранжувати всю множину сумовних (неперервних) функцій, а з іншого — дає змогу виокремлювати доволі тонкі особливості функцій. Унаслідок багаторічної діяльності О.І. Степанця, його учнів і послідовників були створені методи, що дозволяють розв'язувати задачі теорії наближень на введених ним класах $L^{\psi}_{\bar{\beta}}\mathfrak{N}$ та $C^{\psi}_{\bar{\beta}}\mathfrak{N}$.

На сьогодні на класах $L^{\psi}_{\bar{\beta}}\mathfrak{N}$ розглянуто практично всі основні задачі теорії наближень, які раніше ставились на класах диференційовних функцій, і одержані результати є завершеними на такому рівні, на якому вони були відомі раніше для класів Вейля–Надя. Одержані результати охоплюють відомі твердження для диференційовних функцій і відкривають нові ефекти, які в шкалах раніше відомих класів навіть не могли бути помічеными. Ця тематика знайшла послідовників в Україні, Росії, Китаї, Канаді, Туреччині,

Грузії та інших країнах світу.

О. І. Степанець одержав також низку глибоких остаточних результатів, пов'язаних з наближенням локально сумовних функцій, заданих на дійсній осі, з наближенням інтегралів типу Коші на спрямлюваних жорданових кривих комплексної площини та з сильним підсумовуванням ортогональних розвинень інтегровних функцій.

В останні роки життя Олександр Іванович досліджував властивості лінійних просторів S^p. Для таких просторів він розв'язав низку важливих екстремальних задач і, зокрема, задачу про найкраще n-членне наближення та задачу про поперечник за Колмогоровим q-еліпсоїдів.

У творчому доробку О. І. Степанця 7 монографій та більш ніж 200 наукових праць. Результати його досліджень отримали широке визнання як в Україні, так і за її межами, про що свідчить перевидання його монографій англійською мовою престижними закордонними видавництвами.

Олександр Іванович вдало поєднував наукову та організаційну роботу з педагогічною. Він створив математичну школу, котра об'єднує цілу плеяду математиків, які успішно працюють у різних наукових та освітніх центрах України та за її межами, продовжуючи добрі традиції вітчизняних шкіл з теорії функцій. Серед його учнів 9 докторів і 34 кандидати наук. Під його керівництвом більше ніж 30 років регулярно проводилися засідання наукових семінарів з теорії функцій в Інституті математики НАН України.

Наукові досягнення О. І. Степанця одержали державне і громадське визнання. У 2002 році Олександру Івановичу було присвоєне почесне звання "Заслужений діяч науки і техніки України", а у 2012 році присуджено Державну премію України в галузі науки і техніки (посмертно). О. І. Степанець був лауреатом республіканської премії імені М. Островського (1974 р.), премій НАН України імені М. В. Остроградського (2000 р.) та імені М. М. Крилова (2007 р.). Він був почесним професором Волинського національного університету та Слов'янського державного педагогічного університету.

Життя видатного вченого раптово обірвалося 13 жовтня 2007 року.

Світла пам'ять про Олександра Івановича Степанця назавжди збережеться в наших серцях.

А. М. Самойленко, А. С. Романюк, А. С. Сердюк, В. В. Савчук,
С. О. Чайченко, С. М. Чуйко, А. Л. Шидліч, І. В. Соколенко,
О. О. Новіков, Є. С. Сілін, О. А. Кадубовський, О. В. Чуйко.

Alexander Ivanovich Stepanets
(1942 – 2007)

May 24, 2017 marked the 75th anniversary of the birth of Alexander Ivanovich Stepanets, outstanding Ukrainian mathematician, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, and the Corresponding Member of the National Academy of Sciences of Ukraine.

Alexander Ivanovich was born on May 24, 1942 in Komarivka village, Chernihiv region in a teacher's family. In 1959, he graduated from Komarivka secondary school and was awarded with a silver medal. In 1960, A. I. Stepanets was accepted to Taras Shevchenko State University of Kyiv, Department of Mechanics and Mathematics. While studying at the university, he made first steps in big science under the supervision of V. K. Dziadyk.

In October, 1965, A. I. Stepanets graduated from the university and started to work as an engineer at the Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Ukraine. At the Institute of Mathematics, he had been working until the end of his life. In 1967, Alexander Ivanovich became a postgraduate student at the Institute of Mathematics and ahead of time in 1969 he defended the Ph.D. thesis. In 1974, he brilliantly defended the dissertation on competition of a scientific degree of the Doctor of Physical and Mathematical Sciences. In 1982, A. I. Stepanets was awarded with an academic title of Professor. In 1997 he was elected to become a Corresponding Member of the National Academy of Sciences of Ukraine. Since 1990, A. I. Stepanets headed the Department of Theory of Functions, since 1996 he was Deputy Director for Research at the Institute of Mathematics of the the National Academy of Sciences of Ukraine.

A. I. Stepanets is a well-known expert in the field of the theory of approximation of functions of real and complex variable, in the field of the theory of Fourier series, harmonic analysis, theory of extremal problems.

In the 70s of the last century, he created the methods that allowed to solve Kolmohorov-Nikolskyi's problem on the classes of functions of one and several variables, defined by means of the modules of continuity. In particular, he proved the multidimensional analogue of Korneichuk-Stiechkin's lemma. This result allowed to find solutions of the problem of Kolmohorov-Nikolskyi for many linear summation processes of Fourier's series for which these problems could not be solved by using existing at that time methods.

Until the early 80s of the XX century classes defined by means of derivatives in Weyl's and Weyl-Nagy's sense, were the most general classes of periodic functions for which problems of the approximation theory were considered. These classes play a very important role in various branches of mathematics; however in scales of these classes it is impossible to classify summable functions of small smoothness which have no of such derivatives, and also infinitely differentiable functions. In 1983, Alexander Ivanovich Stepanets introduced the concept of $(\psi;\bar{\beta})$-derivative which also included the concepts of derivatives in Weyl's and Weyl-Nagy's sense. The classification of periodic functions, created by him, is a quite general, because, on the one hand, it allows to range all set of summable (continuous) functions, and on the other hand, it allows to distinguish quite subtle properties of functions. As a result of long-term activity of A. I. Stepanets, his pupils and followers, the methods have been created. These methods allow to solve problems of the theory of approximations on the classes $L^{\psi}_{\bar{\beta}}\mathfrak{N}$ and $C^{\psi}_{\bar{\beta}}\mathfrak{N}$, which were introduced by him.

Currently, for the classes $L^{\psi}_{\bar{\beta}}\mathfrak{N}$, considered by almost all the major problems of approximation theory which were previously considered for classes of differentiable functions. The obtained

results are completed at such a level at which they were previously known for the Weyl-Nagy classes. These results cover the known assertions for differentiable functions and reveal new effects which could not even be seen in scales of previously known classes. This subject has found followers in Ukraine, Russia, China, Canada, Turkey, Georgia and other countries of the world.

A. I. Stepanets obtained a series of profound final results related to the approximation of locally summable functions given on the real axis, with the approximation of integrals of Cauchy type on the Jordan rectifiable curves of the complex plane and with strong summation of orthogonal decomposition of the integrated functions.

In the last years of his life, Alexander Ivanovich investigated the properties of linear spaces S^p. For such spaces, he solved a number of important extremal problems and, in particular, the problem of best n-term approximation and the problem of the Kolmogorov width of q-ellipsoids.

There are 7 monographs and more than 200 scientific works in the creative heritage of A. I. Stepanets. Results of his researches have received wide recognition both in Ukraine and abroad, which is evidenced by the re-edition of his monographs in English by prestigious foreign publishers.

Alexander Ivanovich successfully combined scientific, organizational and pedagogical work. He created the mathematical school which unites the whole group of mathematicians who successfully work in various scientific and educational centers of Ukraine and abroad, carrying on good traditions of the national schools on the theory of functions. Among his pupils there are 9 Doctors and 34 Candidates of Sciences. Scientific seminars on the theory of functions were regularly held under his leadership at the Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Ukraine for more than 30 years.

Scientific achievements of A. I. Stepanets gained the state and public recognition. In 2002 the honorary title "The honored worker of science and technology of Ukraine" was given to Aleksander Ivanovich, and in 2012 he was also awarded with the State prize of Ukraine in science and technology (posthumously). O. I. Stepanets was a winner of a republican award of M. Ostrovskyi (1974), awards of National Academy of Sciences of Ukraine of M. V. Ostrohradskyi (2000) and of M. M. Krylov (2007). He was the honorary professor of Volyn National University and of Slovyansk State Pedagogical University.

The life of the outstanding scientist suddenly broke off on October 13, 2007.

A bright memory of Aleksandr Ivanovich Stepanets will forever remain in our hearts.

A. M. Samoilenko, A. S. Romanyuk, A. S. Serdyuk, V. V. Savchuk,
S. O. Chaichenko, S. M. Chuiko, A. L. Shydlich, I. V. Sokolenko,
O. O. Novikov, Ye. S. Silin, O. A. Kadubovs'kyi, O. V. Chuiko.

On the some sharp inequalities for orthonormal polynomials

F. G. Abdullayev[1,2], G. A. Abdullayev[2]
[1]Kyrgyz-Turkish Manas University, Bishkek, Kyrgyzstan,
[2]Mersin University, Mersin, Turkey
fahreddin.abdullayev@manas.edu.kg; fabdul@mersin.edu.tr; gabdullayeva@yandex.com

Let $\mathbb{C}$ be a complex plane, $\overline{\mathbb{C}} := \mathbb{C} \cup \{\infty\}$; $L \subset \mathbb{C}$ be a closed rectifiable Jordan curve, $G := intL$, with $0 \in G$. Let $h(z)$ be a non-negative, summable on L and non-zero except possible on a set of measure zero function. The systems of polynomials $\{K_n(z)\}$, $K_n(z) = a_n z^n + ...$, $\deg K_n = n$, $n = 0, 1, 2, ...$, satisfying the given condition:

$$\int_L h(z) K_n(z) \overline{K_m(z)} \, |dz| = \begin{cases} 1, & n = m, \\ 0, & n \neq m, \end{cases}$$

are called orthonormal polynomials for the pair (L, h). These polynomials are determined uniquely if the coefficient $a_n > 0$.

These polynomials were first studied in [9]. Some properties of the polynomials $K_n(z)$ under the various conditions on the weight function $h(z)$ and contour L were investigated in [5]-[8], [10]-[12], [1]-[4] and others (also, references in therein).

In this work, investigated the order of growth of the modulus of an arbitrary algebraic polynomials in the weighted space, where the contour and the weight functions have some singularities on the finite points on the contour. In particular, New exact estimations for the growth of the modulus of orthogonal polynomials were obtained.

1. Abdullayev F. G., On the some properties on orthogonal polynomials over the regions of complex plane I. // Ukr. Math. J. – 2000. – **52**, No 12. – P. 1807–1817.
2. Abdullayev F. G., On the some properties on orthogonal polynomials over the regions of complex plane II. // Ukr. Math. J. – 2001. – **53**, No 1. – P. 1–14.
3. Abdullayev F. G. On the interference of the weight boundary contour for orthogonal polynomials over the region // J. of Comp. Anal. and Appl. – 2004. – **6**, No 1. – P. 31–42.
4. Abdullayev F. G., Abdullayev G. A. On the Sharp Inequalities for Orthonormal Polynomials Along a Contour // Complex Analysis and Operator Theory. – 2017. –No 1, DOI: 10.1007/s11785-017-0640-1.
5. Fauth G., Über die Approximation analytischer Funktionen durch Teilsummenihrer Szegö-Entwicklung // Mitt. Mathem. Semin. Giessen. – 1966. – **67**. – P. 1–83.
6. Geronimus Ya. L., Polynomials Orthogonal on a Circle and Interval. IX + 210 S. m. 9 Tafeln. Oxford/London/New York/Paris, 1960.
7. Korovkin P. P., Sur les polynomes orthogonaux le long d'un contour rectifiable dans le cas de la présence d'un poids // Rec. Math. [Mat. Sbornik] N.S. – 1941. – **9(51)**, No 3, P. 469–485.
8. Kuz'mina A. L., Asymptotic representation of polynomials orthogonal on a piecewise-analytic curves // Proc. "Functional Analysis and theory of Functions". I. Kazan', 1963. – P. 42–50.
9. Szegö G., Über orthogonale Polynome, die zu einer gegebenen Kurve der komplexen Ebene gehören // Mathem. Zeitschr. – 1921. – **9**. – P. 218–270.
10. Szegö G., Orthogonal Polynomials. – Fizmatgis,1962, (in Russian).
11. Suetin P. K., Main properties of the orthogonal polynomials along a circle // Uspekhi Math. Nauk. – 1966. – **21**, No 2 (128). – P. 41–88.
12. Suetin P. K., On some estimates of the orthogonal polynomials with singularities weight and contour // Sib. Math. J. – 1967. – **8**, No 3. – P. 1070–1078 (in Russian).

On the Properties of the Algebraic Polynomials in L_p, $0 < p \leq \infty$.

F. G. Abdullayev[1,2], T. Tunç[2], G. A. Abdullayev[2]
[1]Kyrgyz-Turkish Manas University, Bishkek, Kyrgyzstan,
[2]Mersin University, Mersin, Turkey
fahreddin.abdullayev@manas.edu.kg; ttunc77@gmail.com; gabdullayeva@yandex.com

Let $\mathbb{C}$ be a complex plane, $G \subset \mathbb{C}$ be a bounded Jordan region, $L := \partial G$, $\Omega := \overline{\mathbb{C}} \setminus \overline{G}$. Let $\wp_n$ denotes the class of arbitrary algebraic polynomials $P_n(z)$ of degree at most $n \in \mathbb{N}$.

Let $0 < p \leq \infty$. For a rectifiable Jordan curve L, we denote

$$\begin{aligned} \|P_n\|_p &:= \left(\int_L h(z) \, |P_n(z)|^p \, |dz| \right)^{1/p}, \ 0 < p < \infty, \\ \|P_n\|_\infty &:= \max_{z \in L} |P_n(z)|, \ p = \infty. \end{aligned}$$

In this we study the following inequality:

$$\|P_n\|_\infty \leq c\mu_n(L, h, p) \, \|P_n\|_p \, , \tag{1}$$

where $c = c(L, p) > 0$ is a constant which is independent of n and P_n, and $\mu_n(L, h, p) \to \infty$, $n \to \infty$, depending on the geometrical properties of curve L and weight function h. We give condition "pay off"singularity of the curve and weight function, so that, the estimation of (1) has coincided with the estimation of where the boundary curve and weight functions are not any singularities. Also investigated the cases when conditions are "pay off"singularity of the curve and the weight function does not hold ([1]-[3]).

1. Abdullayev F. G., Özkartepe N. P., On the Behavıor of the Algebraıc Polynomıal in Unbounded Regıons wıth Pıecewıse Dını-Smooth Boundary // Ukr. Math. J. – 2014. – **66**, No 5. – P. 579–597.
2. Abdullayev F. G., Özkartepe N. P., On the growth of algebraic polynomials in the whole complex plane // Journal of Korean Math. Soc. – 2015. – **52**, No 4. – P. 699–725.
3. Abdullayev F. G., Özkartepe N. P., Uniform and pointwise polynomial inequalities in regions with cusps in the weighted Lebesgue space // Jaen Journal on Approximation. – 2015. – **7**, No 2. – P. 231–261.

Ring Q-homeomorphisms on Finsler manifolds

Elena Afanas'eva
Institute of Applied Mathematics and Mechanics of NASU, Slovyansk, Ukraine
es.afanasjeva@yandex.ru

By a *Finsler manifold* $(\mathbb{M}^n, \Phi)$, $n \geq 2$, we mean a smooth manifold of class C^∞ with defined Finsler structure $\Phi(x,\xi)$, where $\Phi(x,\xi) : T\mathbb{M}^n \to \mathbb{R}^+$ is a function satisfying the following conditions: 1) $\Phi \in C^\infty(T\mathbb{M}^n \setminus \{0\})$; 2) $\forall\ a > 0 \quad \Phi(x, a\xi) = a\Phi(x,\xi)$ hold and $\Phi(x,\xi) > 0$ for $\xi \neq 0$; 3) the $n \times n$ Hessian matrix $g_{ij}(x,\xi) = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 \Phi^2(x,\xi)}{\partial \xi_i \partial \xi_j}$ is positive defined at every point of $T\mathbb{M}^n \setminus \{0\}$, cf. [1]. By the *geodesic distance* $d_\Phi(x,y)$ we mean the infimum of lengths of piecewise-smooth curves joining x and y in $(\mathbb{M}^n, \Phi)$, $n \geq 2$.

Later we consider the Finsler structure of a type $\widetilde{\Phi}(x,\xi) = \frac{1}{2}(\Phi(x,\xi) + \Phi(x,-\xi))$ thereby obtaining a Finsler manifold $(\mathbb{M}^n, \widetilde{\Phi})$ with symmetrized (reversible) function $\widetilde{\Phi}$. Clearly, if $\widetilde{\Phi}$ is reversible, then the induced distance function $d_{\widetilde{\Phi}}$ is reversible, i.e., $d_{\widetilde{\Phi}}(x,y) = d_{\widetilde{\Phi}}(y,x)$, for all pairs of points $x, y \in \mathbb{M}^n$ (see [2]). It is also known that the reversible Finsler metric coincides with the Riemannian one (see, e.g., [3]).

Let D and D' be domains on the Finsler manifolds $(\mathbb{M}^n, \widetilde{\Phi})$ and $(\mathbb{M}^n_*, \widetilde{\Phi}_*)$, $n \geq 2$, respectively, and let $Q : \mathbb{M}^n \to (0,\infty)$ be a measurable function. A homeomorphism $f : D \to D'$ is *ring Q-homeomorphism at a point* $x_0 \in \overline{D}$ if

$$M\left(\Delta(f(C), f(C_0); D')\right) \ \leq \int\limits_{A \cap D} Q(x) \cdot \eta^n\left(d_{\widetilde{\Phi}}(x, x_0)\right) d\sigma_{\widetilde{\Phi}}(x) \tag{1}$$

holds for any geodesic ring $A = A(x_0, \varepsilon, \varepsilon_0)$, $0 < \varepsilon < \varepsilon_0 < \infty$, any two continua (compact connected sets) $C \subset \overline{B(x_0, \varepsilon)} \cap D$ and $C_0 \subset D \setminus B(x_0, \varepsilon_0)$ and each Borel function $\eta : (\varepsilon, \varepsilon_0) \to [0, \infty]$, such that $\int\limits_{\varepsilon}^{\varepsilon_0} \eta(r) dr \geq 1$. We say that f is a *ring Q-homeomorphism* in D, if (1) holds for all points $x_0 \in \overline{D}$.

We say that the boundary of the domain D is *weakly flat at a point* $x_0 \in \partial D$, if for any number $P > 0$ and any neighborhood U of x_0 there exists a neighborhood $V \subset U$, such that $M(\Delta(E, F; D)) \geq P$ for any continua E and F in D, intersecting ∂U and ∂V.

Theorem. *Let D and D' have weakly flat boundaries, $\overline{D}$ and $\overline{D'}$ be compact. Suppose that $Q : \mathbb{M}^n \to (0, \infty)$ is a function of $L^1(D)$ satisfying*

$$\int\limits_{D(x_0, \varepsilon, \varepsilon_0)} \frac{Q(x) d\sigma_{\widetilde{\Phi}}(x)}{d_{\widetilde{\Phi}}(x, x_0)^n} \ = \ o\left(\left[\log \frac{1}{\varepsilon}\right]^n\right) \tag{2}$$

at every point $x_0 \in \partial D$, $\varepsilon_0 = \varepsilon(x_0) < \ d(x_0) \ = \sup\limits_{x \in D} d_{\widetilde{\Phi}}(x, x_0)$. Then any ring Q-homeomorphism $f : D \to D'$ can be extended to a homeomorphism $\overline{f} : \overline{D} \to \overline{D'}$.

1. Dymchenko Yu. V. The relation between the capacity of a condenser and the module of a family of separated surfaces in Finsler spaces, Zap. Nauchn. Sem. S.-Peterburg. Otdel. Mat. Inst. Steklov. (POMI), Analiticheskaya Teoriya Chisel i Teoriya Funktsii. 28. – 2013. – **418**, P 74–89 (in Russian).
2. Cheng X., Shen Z. Finsler geometry. An approach via Randers spaces. – Heidelberg: Science Press Beijing, Beijing; Springer, 2012.
3. Bao D., Chern S., Shen Z. An Introduction to Riemann-Finsler Geometry. Graduate Texts in Mathematics, 200. – New York: Springer-Verlag, 2000.

MIXED MODULUS OF CONTINUITY IN THE LEBESGUE SPACES WITH MUCKENHOUPT WEIGHTS

Ramazan Akgun
Balikesir University, Balikesir, Turkey
rakgun@balikesir.edu.tr

Main properties of the mixed modulus of continuity in the Lebesgue spaces with Muckenhoupt weights are investigated. We use the mixed modulus of continuity to obtain Potapov type direct and inverse estimates of angular trigonometric approximation of functions in these spaces. We prove an equivalence between the mixed modulus of continuity and the K-functional.

1. Akgun R. Mixed modulus of continuity in Lebesgue spaces with Muckenhoupt weights and their properties // Turk. J. Math. – 2016. – **40**, No 6. – P. 1169–1192.

2. Akgun R. Sharp Jackson and converse theorems of trigonometric approximation in weighted Lebesgue spaces // Proc. A. Razmadze Math. Inst. – 2010. – **152**. – P. 1–18.

REALIZATION FUNCTIONAL IN LEBESGUE SPACES WITH MUCKENHOUPT WEIGHTS

Ramazan Akgun
Balikesir University, Balikesir, Turkey
rakgun@balikesir.edu.tr

A characterization is obtained for the modulus of smoothness in the Lebesgue spaces $L_{p,\omega}$, $1 < p < \infty$, with weights ω satisfying the Muckenhoupt's A_p condition. Also, a realization result and the equivalence between the modulus of smoothness and the Peetre K-functional are proved in this space for $1 < p < \infty$, and $\omega \in A_p$.

1. Akgun R. Realization and characterization of modulus of smoothness in weighted Lebesgue spaces // St. Petersburg Math. J. – 2015. – **26**. – P. 741–756.
2. Akgun R. Sharp Jackson and converse theorems of trigonometric approximation in weighted Lebesgue spaces // Proc. A. Razmadze Math. Inst. – 2010. – **152**. – P. 1–18.

Behavior of partial logarithmic derivatives and distribution of zeros of entire functions

Andriy Bandura[1] **and Oleh Skaskiv**[2]
[1]Ivano-Frankivs'k National Technical University of Oil and Gas, Ivano-Frankivs'k, Ukraine
[2] Ivan Franko National University of Lviv, Lviv, Ukraine
[1]*andriykopanytsia@gmail.com*, [2]*olskask@gmail.com*

Let us to denote Δ as Laplace operator, Z_F be a zero set of entire function F. We consider $\Delta \ln |F|$ as generalized function and denote

$$G_R(F) = \bigcup_{z^0 \in Z_F} \left\{ z \in \mathbb{C}^n \colon |z_j - z_j^0| < \frac{r_j}{l_j(z^0)} \quad \forall j \in \{1, 2, \ldots, n\} \right\} = \bigcup_{z^0 \in Z_F} D^n \left(z^0, \frac{R}{\mathbf{L}(z^0)} \right),$$

where $l_j : \mathbb{C}^n \to \mathbb{R}_+$ is a continuous function. Other definitions and notations see in [1] and [2].

Theorem. *Let $\mathbf{L} \in Q^n$. If an entire function F satisfies the following conditions*

1) *for every $R > \mathbf{0}$ there exists $p_1 = p_1(R) > 0$ such that for all $z \in \mathbb{C}^n \setminus G_R(F)$ and for every $j \in \{1, \ldots, n\}$*
$$\left| \frac{\partial \ln F(z)}{\partial z_j} \right| \le p_1 l_j(z), \tag{1}$$
where $\ln F(z)$ is the principal value of logarithm.

2) *for every $R > \mathbf{0}$ and $R' \ge \mathbf{0}$ exists $p_2 = p_2(R, R') \ge 1$ that for all $z^0 \in \mathbb{C}^n$ such that $T^n(z^0, \frac{R}{\mathbb{L}(z^0)}) \setminus G_{R'}(F) = \bigcup_i C_i \ne \emptyset$, where the sets C_i are connected disjoint sets, and either a) $\max\limits_i \min\limits_{z \in C_i} |F(z)| \le p_2 \min\limits_i \min\limits_{z \in C_i} |F(z)|$, or b) $\max\limits_i \max\limits_{z \in C_i} |F(z)| \le p_2 \min\limits_i \max\limits_{z \in C_i} |F(z)|$, or c) $|F(z^*)| = \max_i \max_{z \in C_i} |F(z)|$, $|F(z^{**})| = \min_i \min_{z \in C_i} |F(z)|$, and z^*, z^{**} belong to the same set C_{i_0}*

3) *for every $R > \mathbf{0}$ there exists $n^*(R) > 0$ such that for all $z \in \mathbb{C}^n$*
$$\int_{D^n(z^0, R/\mathbf{L}(z^0))} \Delta \ln |F| dV_{2n} \le n^*(R)$$

then F has bounded $\mathbf{L}$-index in joint variables.

1. Bandura A. I., Bordulyak M. T., Skaskiv O. B. Sufficient conditions of boundedness of **L**-index in joint variables // Mat. Stud. – 2016. – **45**, No 1. – P. 12–26.
2. Bandura A., Skaskiv O. Entire functions of several variables of bounded index. – Lviv, Chyslo, Publisher I. E. Chyzhykov, 2016. – 128 p.

Faber bases and Lebesgue constants for Lagrange interpolation

Viktoriia Bilet[1], Oleksiy Dovgoshey[1], and Jürgen Prestin[2]
[1]Institute of Applied Mathematics and Mechanics of NASU, Slovyansk, Ukraine
[2]Universität zu Lübeck, Institut für Mathematik, Lübeck, Germany
viktoriiabilet@gmail.com; oleksiy.dovgoshey@gmail.com; prestin@math.uni-luebeck.de

Let $\mathfrak{M}$ be an infinite triangular matrix whose nodes are real numbers satisfying the condition $x_{k_1,n} \neq x_{k_2,n}$ for all distinct $k_1, k_2 \in \{1, ..., n\}$ and every $n \in \mathbb{N}$. Let X be an infinite compact subset of $\mathbb{R}$. We shall write that $\mathfrak{M} \subseteq X$ if $\mathfrak{M} = \{x_{k,n}\}$ and $x_{k,n} \in X$ for all $n \in \mathbb{N}$ and $k \leq n$.

For $f \in C_X$, $\mathfrak{M} \subseteq X$ and $n \in \mathbb{N}$, the *Lagrange interpolating polynomial* $L_n(f, \mathfrak{M}, \cdot)$ is presented as

$$L_n(f, \mathfrak{M}, \cdot) = \sum_{k=1}^{n+1} f(x_{k,n+1}) l_{k,n+1}(\mathfrak{M}, \cdot),$$

where $l_{k_0,n}(\mathfrak{M}, x) := \prod_{1 \leq k \leq n,\, k \neq k_0} \frac{(x - x_{k,n})}{(x_{k_0,n} - x_{k,n})}$ are the *fundamental polynomials*

For given X, $\mathfrak{M} \subseteq X$, and $n \in \mathbb{N}$, define the *Lebesgue constant* $\Lambda_{n,X}(\mathfrak{M})$ as $\Lambda_{n,X}(\mathfrak{M}) := \sup\{\sum_{k=1}^{n+1} |l_{k,n+1}(\mathfrak{M}, x)| : x \in X\}$.

The mappings $\mathfrak{L}_{n,\mathfrak{M}} : C_X \to C_X$ with $\mathfrak{L}_{n,\mathfrak{M}}(f) = L_n(f, \mathfrak{M}, \cdot)$ are bounded linear operators having the norms $\| \mathfrak{L}_{n,\mathfrak{M}} \| = \Lambda_{n,X}(\mathfrak{M})$.

Recall that a *Faber basis* in C_X is a sequence $\tilde{p} = (p_k)_{k \in \mathbb{N}}$ of real algebraic polynomials satisfying the following conditions: for every $f \in C_X$ there is a unique sequence $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$ of real numbers such that $f = \sum_{k=1}^{\infty} a_k p_k$; for every $k \in \mathbb{N}$, $\deg p_k = k - 1$.

Let $\tilde{p} = (p_k)_{k \in \mathbb{N}}$ be a Faber basis in C_X. For every $f \in C_X$ we shall denote by $S_{n,\tilde{p}}(f)$ the partial sum $\sum_{k=1}^{n} a_k p_k$ of the series $\sum_{k=1}^{\infty} a_k p_k$, i.e., $S_{n,\tilde{p}}(f) = \sum_{k=1}^{n} a_k p_k$. If $n \in \mathbb{N}$ is given, then the *partial sum operator* $S_{n,\tilde{p}} : C_X \to C_X$ is a linear operator.

A Faber basis $\tilde{p} = (p_k)_{k \in \mathbb{N}}$ is *interpolating* if there is a sequence $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ of distinct points of X such that the equality $S_{k,\tilde{p}}(f)(x_k) = f(x_k)$ holds for all $f \in C_X$ and $k \in \mathbb{N}$.

We study some conditions under which the operators $S_{n,\tilde{p}}$ and $\mathfrak{L}_{n,\mathfrak{M}}$ are the same for every $n \in \mathbb{N}$.

Theorem 1. *Let X be an infinite compact subset of $\mathbb{R}$ and let $\mathfrak{M} = \{x_{k,n}\}$ be an interpolation matrix with the nodes in X. The following conditions are equivalent.*

(i) *The space C_X admits a Faber basis $\tilde{p} = (p_k)_{k \in \mathbb{N}}$ such that the equality $S_{n,\tilde{p}} = \mathfrak{L}_{n,\mathfrak{M}}$ holds for every $n \in \mathbb{N}$.*

(ii) *The sequence $(\Lambda_{n,X}(\mathfrak{M}))_{n \in \mathbb{N}}$ is bounded and there is a sequence $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ of distinct points of X such that for any $n \geq 2$ the tuple $(x_{1,n}, ..., x_{n,n})$ is a permutation of the set $\{x_1, ..., x_n\}$.*

Theorem 2. *Let X be an infinite compact subset of $\mathbb{R}$ and let $\tilde{p} = (p_k)_{k \in \mathbb{N}}$ be a Faber basis in C_X. The following conditions are equivalent.*

(i) *There exists an interpolation matrix $\mathfrak{M} \subseteq X$ such that equality $S_{n,\tilde{p}} = \mathfrak{L}_{n,\mathfrak{M}}$ holds for every $n \in \mathbb{N}$.*

(ii) *The basis $\tilde{p}$ is interpolating.*

1. V. Bilet, O. Dovgoshey, and J. Prestin. Boundedness of Lebesgue constants and interpolating Faber bases, accepted to Naukovi Visti NTUU KPI, 2017, 17 p.

Approximation of Bergman kernels by rational function with fixed poles

Stanislav Chaichenko
Donbas State Pedagogical University, Slovyansk, Ukraine
s.chaichenko@gmail.com

Let $\mathbf{a} := \{a_k\}_{k=0}^{\infty}$ be a sequence of points in the unit circle $\mathbb{D} := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ of the complex plane $\mathbb{C}$, among of one can be points of finite and infinite multiplicity. The Takenaka-Malmquist system of functions, generated by the sequence $\mathbf{a}$, is called the system $\varphi := \{\varphi_k\}_{k=0}^{\infty}$ of the function φ_k of the form [1]:

$$\varphi_0(z) := \frac{\sqrt{1-|a_0|^2}}{1-\overline{a_0}z}, \ \varphi_k(z) := \frac{\sqrt{1-|a_k|^2}}{1-\overline{a_k}z}\prod_{j=0}^{k-1}\frac{-|a_j|}{a_j}\frac{z-a_j}{1-\overline{a_j}z}, \ k=1,2,\ldots, \tag{1}$$

where for $a_j = 0$, we put $|a_j|/a_j := -1$.

The functions of the form (see., for example, [2, p. 6])

$$\mathcal{K}_\alpha(z;w) = \frac{1}{(1-z\overline{w})^{2+\alpha}}, \quad \alpha = 0,1,\ldots, \quad z,w \in \mathbb{D},$$

play an essential role in the theory of Bergman spaces. That functions are called the (weighted) Bergman kernels of $\mathbb{D}$.

For a given n $(1 \le n < \infty)$, by $\mathcal{R}(n)$ we denote the set of rational functions of the form

$$R_n(x) = c_0 + \sum_{m=1}^{n} c_m \varphi_{m-1}(x), \quad c_m \in \mathbb{C}.$$

Theorem. *On the set of functions $\mathcal{R}(n)$ the minimum of the functional*

$$\mu_\alpha(R_n) := \int_{\mathbb{T}} \left|\mathcal{K}_\alpha(x;w) - \frac{R_n(x)}{(1-x\overline{w})}\right|^2 d\sigma(x)$$

is realized on the function

$$r_{\alpha,n}(x;w) = (1-x\overline{w})S_{n+1}(\mathcal{K}_\alpha)(x;w) \in \mathcal{R}(n),$$

where $S_{n+1}(\mathcal{K}_\alpha)(x;w)$ is partial Fourier sum of the order $n+1$ of function $\mathcal{K}_\alpha(x;w)$ with respect to thesystem (1), $a_n = a_{n-1} = \ldots = a_{n-\alpha} \equiv w \in \mathbb{D}$, and wherein the following equality is true:

$$\inf_{R_n \in \mathcal{R}(n)} \mu_\alpha(R_n) = \mu_\alpha(r_{\alpha,n}) = \frac{|wB_{n-\alpha}(w)|^{2\alpha+2}}{(1-|w|^2)^{2\alpha+3}}.$$

1. Walsh J.L. Interpolation and Approximation by Rational Functions in the Complex Domain. – New York: American Mathematical Society Colloquium Publications, 1965. – **20**. – 405 p.
2. Hedenmalm H., Korenblum B., Zhu K. Theory of Bergman Spaces. – New York-Berlin–Heidelberg: Springer-Verlag, 2000. – 286 p.

Pfluger-type theorem for functions of refined regular growth

Igor Chyzhykov
Ivan Franko National University of Lviv, Lviv, Ukraine
chyzhykov@yahoo.com

Levin-Pfluger theory describes zero distribution for entire functions of completely regular growth ([1]), i.e. f such that

$$\ln|f(re^{i\theta})| = h(\theta)r^{\rho(r)} + o\Big(r^{\rho(r)}\Big), \quad r \to \infty,$$

outside an exceptional set, where $\rho(r)$ is a proximate order, and the indicator h is a ρ-trigonometrically convex function.

We consider the subclass of functions of completely regular growth satisfying the equality

$$\log|f(re^{i\theta})| = h(\theta)r^{\rho(r)} + O\Big(\frac{r^{\rho(r)}}{\delta(r)}\Big) \quad \text{for } re^{i\theta} \notin E \subset \bigcup_k D(a_k, s_k), \ \sum_{|a_k|\le r} s_k = O\Big(\frac{r}{\delta(r)}\Big),$$

where $D(a_k, s_k) = \{z : |z - a_k| < s_k\}$, $\delta(r)$ is an unbounded regulary growing functions.

For this class we obtain asymptotics for counting functions of zeros. Despite [2] and [3], we relax the assumption that the zeros are located on a finite system of rays emanating the origin.

1. Левин Б. Я. Распределение корней целых функций. – М.: ГИТТЛ, 1956. – 632 с.
2. Винницький Б. В., Хаць Р. В. Про асимптотичну поведінку цілих функцій нецілого порядку // Мат. Студії. – 2004. – **21**, № 2. -– С. 140–150.
3. Винницький Б. В., Хаць Р. В. Про регулярність зростання цілої функції нецілого порядку з нулями на скінченні системі променів Мат. Студії. – 2005. – **24**, № 1. -– С. 31–38.

A brief survey of polynomial approximation on the unit sphere

Feng Dai, Kunyang Wang
University of Alberta, Edmonton, Alberta, Canada
School of Mathematical Sciences, Beijing Normal University, Beijing, China
wangky@ bnu.edu.cn

The talk concerns the following topics:

(1) The equiconvergent operators of Cesáro means, and their interesting applications.

(2) Moduli of smoothness for functions on the unit sphere and the Jackson inequality.

(3) The equivalence between moduli of smoothness and K-functionals.

(4) Several weighted polynomial inequalities on the sphere including Marcinkiewicz-Zygmund inequality and the inequalities of Remez-type, Nikol'skii-type, Bernstein-type and Schur-type.

(5) Positive cubature formulas on the sphere, and their relation to the Marcinkiewicz-Zygmund inequality.

(6) Asymptotic orders of the n-widths of Sobolev's classes on the unit sphere.

Extremal decomposition problems

Iryna Denega
Institute of Mathematics of NAS of Ukraine, Kyiv, Ukraine
iradenega@yandex.ru

The report is devoted to investigation of the problems of geometric function theory of a complex variable, one of which was formulated in [1] in the list of unsolved problems. Let $\mathbb{N}$, $\mathbb{R}$ be the sets of natural and real numbers, respectively, $\mathbb{C}$ be the complex plane, $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C}\bigcup\{\infty\}$ be its one point compactification. Let $r(B,a)$ be the inner radius of the domain $B \subset \overline{\mathbb{C}}$ with respect to the point $a \in B$ [1,2]. Denote $\alpha_k := \frac{1}{\pi}\arg\frac{a_{k+1}}{a_k}$, $k = \overline{1,n}$, $\alpha_{n+1} := \alpha_1$.

Problem. Consider the product

$$r^{\gamma}\left(B_0,0\right)\prod_{k=1}^{n} r\left(B_k,a_k\right),$$

where B_0, B_1,..., B_n $(n \geq 2)$ are pairwise disjoint domains in $\overline{\mathbb{C}}$, $a_0 = 0$, $|a_k| = 1$, $k = \overline{1,n}$ and $0 < \gamma \leq n$. Show that it attains its maximum at a configuration of domains B_k and points a_k possessing rotational n-symmetry. The following statements hold

Theorem 1. [3] *Let $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 12$, $\gamma \in (0,\gamma_n]$, $\gamma_n = n^{0,45}$. Then for any different points a_k of the unit circle $|w| = 1$ and any collection of mutually non-overlapping domains B_k, $a_k \in B_k \subset \overline{\mathbb{C}}$, $k = \overline{1,n}$, $a_0 = 0 \in B_0 \subset \overline{\mathbb{C}}$, we have the inequality*

$$r^{\gamma}\left(B_0,0\right)\prod_{k=1}^{n} r\left(B_k,a_k\right) \leq \left(\frac{4}{n}\right)^{n}\frac{\left(\frac{4\gamma}{n^2}\right)^{\frac{\gamma}{n}}}{\left(1-\frac{\gamma}{n^2}\right)^{n+\frac{\gamma}{n}}}\left(\frac{1-\frac{\sqrt{\gamma}}{n}}{1+\frac{\sqrt{\gamma}}{n}}\right)^{2\sqrt{\gamma}}, \tag{1}$$

where the equality is attained if a_k and B_k, $k = \overline{0,n}$, are, respectively, poles and circular domains of the quadratic differential

$$Q(w)dw^2 = -\frac{(n^2-\gamma)w^n+\gamma}{w^2(w^n-1)^2}\,dw^2.$$

Theorem 2. [4] *Let $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 4$, $\gamma \in (0,\gamma_n]$, $\gamma_4 = 4,17$, $\gamma_5 = 5,71$, $\gamma_6 = 7,5$, $\gamma_7 = 9,53$, $\gamma_8 = 11,81$, and $\gamma_n = 0,12\,n^2$ for $n \geq 9$. Then for any different points a_k of the unit circle $|w| = 1$ such that $0 < \alpha_k \leq 2/\sqrt{\gamma}$, $k = \overline{1,n}$, and any collection of mutually non-overlapping domains B_k, $a_k \in B_k \subset \overline{\mathbb{C}}$, $k = \overline{1,n}$, $a_0 = 0 \in B_0 \subset \overline{\mathbb{C}}$, the inequality* (1) *holds. Equality is attained in the same case as in Theorem 1.*

1. Dubinin V. Condenser capacities and symmetrization in geometric function theory. – Birkhäuser/ Springer, Basel, 2014, 344 P.
2. Bakhtin A., Bakhtina G., Zelinskii Yu.. Topological-algebraic structures and geometric methods in complex analysis. – Proceedings of the Institute of Mathematics of NAS of Ukraine, 2008. – 308 p. (in Russian).
3. Bakhtin A., Dvorak I., Denega I. A separating transformation in the problems of extremal decomposition of the complex plane // Dopov. Nac. akad. nauk Ukr. – 2015. – No 12. – P. 7–12 (in Russian).
4. Bakhtin A. K., Vygivska L. V., Denega I. V. Inequalities for the internal radii of non-overlapping domains // Journal of Mathematical Sciences. – 2017. – **220**, No 5. – P. 584–590.

Approximation of functions in weighted Lipschitz class by the product means

Uğur Değer
Mersin University, Mersin, Turkey
udeger@mersin.edu.tr

In the spaces such as the continuous functions or measurable functions, the determination of the degree of approximation by the various methods of their Fourier series of functions belonging to Lipschitz class is one of the important problems in the approximation theory. Aim of this study is to give the degree of approximation of the functions into this class by the matrix product means of their Fourier series in the weighted Lipchitz class.

On Fourier quasicrystals

S. Favorov
Karazin's Kharkiv National University, Kharkiv, Ukraine
sfavorov@gmail.com

Let a measure $\mu = \sum_{\lambda\in\Lambda} a_\lambda \delta_\lambda$ be a tempered distribution on $\mathbf{R}^d$ and their Fourier transform $\hat{\mu} = \sum_{\gamma\in\Gamma} b_\gamma \delta_\gamma$ be slowly increasing measure on $\mathbf{R}^d$ with countable Λ, Γ such that $\inf_{\lambda\in\Lambda} |a_\lambda|>0$. We prove that the discreteness of the set of differences $\Lambda-\Lambda$ implies that the Λ is a finite union of translates of a single full-rank lattice L. Note that here we need not the discreteness of spectra Γ of the measure.

Also, we get a corresponding result for pair of measures $\mu_1,\ \mu_2$ and the difference $\Lambda_1 - \Lambda_2$ of their supports.

Next, let $\mu = \sum_{\lambda\in\Lambda} a_\lambda \delta_\lambda$ be a measure with uniformly discrete support Λ such that $\inf_{\lambda\in\Lambda} |a_\lambda| > 0$, and its the Fourier transform $\hat{\mu}$ be a measure with countable support and variation $|\hat{\mu}|(B(0,r) = O(r^d)$ as $r \to \infty$. Then Λ is a finite union of translates of several disjoint full-rank lattices (maybe noncommensurable).

The arguments are based on a local analog of Wiener's Theorem on absolutely convergent trigonometric series and theory of almost periodic functions.

Some probles in the theory of $\mathcal{PT}$-symmetric operators

I. M. Grod, A. I. Grod
Lesya Ukrainka Eastern European National University, Lutsk, Ukraine
bogdan.antonyuk78@gmail.com

The development of $\mathcal{PT}$-symmetric quantum mechanics (PTQM) attracts a lot of interests during the past decade. The PTQM is based on the idea that the Hermiticity condition, which is stated as an axiom of quantum mechanics, may be replaced by a certain less mathematical but more physical condition of symmetry without losing any of the essential physical features of quantum mechanics. One of typical examples of Hamiltonians of PTQM are non-selfadjoint differential operators $H = -\frac{d^2}{dx^2} + V(x)$ in $L_2(\mathbb{R})$ which possess the property of $\mathcal{PT}$-symmetry: $H\mathcal{PT} = \mathcal{PT}H$, where the space reflection operator $\mathcal{P}$ and the complex conjugation operator $\mathcal{T}$ are defined as $(\mathcal{P}f)(x) = f(-x)$ and $(\mathcal{T}f)(x) = \overline{f(x)}$ in $L_2(\mathbb{R})$.

The concept of $\mathcal{PT}$-symmetry can be easily generalized to the case of an arbitrary Hilbert space $\mathfrak{H}$ by interpreting $\mathcal{P}$ as a unitary involution in $\mathfrak{H}$ and considering $\mathcal{T}$ as a conjugation operator.

The aim of the report is the description of general properties of $\mathcal{PT}$-symmetric operators acting in $\mathfrak{H}$ (spectral properties, possibility of interpretation by self-adjoint operators in Krein spaces, etc). As an example, we consider in detail an important model case where $\mathcal{PT}$-symmetric operators are presented by matrices of the second order. In that case, the complete description of $\mathcal{C}$ symmetries for $\mathcal{PT}$-symmetric operators is obtained (the concept of $\mathcal{C}$ symmetry is a key notion of PTQM).

Definition. H is called the *$\mathcal{PT}$-symmetric* if there are exist such operators $\mathcal{P}$ and $\mathcal{T}$ that

$$H\mathcal{PT}f = \mathcal{PT}Hf, \quad \forall f \in \mathcal{H}.$$

Statement. The operator $\mathcal{C}$ $(\mathcal{C} \neq I)$ in $\mathbb{C}^2$ satisfies properties $\mathcal{C}^2 = I$ and $\mathcal{CPT} = \mathcal{PTC}$ if and only if there exist such numbers $\chi \in \mathbb{R}$ i $\xi \in [0, 2\pi)$, that

$$\mathcal{C} = e^{\chi i \sigma_1 \sigma_{3\xi}} \sigma_{3\xi}.$$

where operators σ_1, σ_2 and σ_3 are Pauli matrices and the operator $\sigma_{3\xi}$ is unitary involution:

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

$$\sigma_{3\xi} = \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n}{n!} \xi^n \sigma_1^n \right] \sigma_3 = e^{i\xi\sigma_1} \sigma_3.$$

Theorem. *The $\mathcal{PT}$-symmetric operator H in $\mathbb{C}^2$ has a property of the $\mathcal{C}$-symmetry if and only if it can be represented in form*

$$H = \gamma_1 \sigma_0 + \gamma_2 e^{\chi i \sigma_1 \sigma_{3\xi}} \sigma_{3\xi},$$

where γ_1, γ_2, χ are arbitrary real numbers, and ξ is arbitrary real number from $[0, 2\pi)$. In this case the corresponding operator $\mathcal{C}$ will have a form $\mathcal{C} = e^{\chi i \sigma_1 \sigma_{3\xi}} \sigma_{3\xi}$.

1. Günther U., Kuzhel S., $\mathcal{PT}$-symmetry, Cartan decompositions, Lie triple systems and Krein space related Clifford algebras // Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical. – 2010. – **43**, No 39. – P. 392002–392011.
2. Grod A., Kuzhel S., Sudilovskaya , On operators of transition in Krein spaces // Opuscula Mathematica. – 2011. – **31**, No 1. – P. 49–59.

A lower bound for areas of images of discs

Bogdan Klishchuk, Ruslan Salimov
Institute of Mathematics of NAS of Ukraine, Kyiv, Ukraine
kban1988@gmail.com, ruslan623@yandex.ru

Let Γ be a family of curves γ in thee complex plane $\mathbb{C}$. The Borel function $\varrho : \mathbb{C} \to [0, \infty]$ is called *admissible* for Γ, abbr. $\varrho \in \operatorname{adm}\Gamma$, if

$$\int\limits_{\gamma} \varrho(z)\,|dz| \ \geqslant\ 1$$

for all $\gamma \in \Gamma$.

Let $p \in (1, \infty)$. The *p–modulus* of Γ is the quantity

$$\mathcal{M}_p(\Gamma) \ =\ \inf_{\varrho \in \operatorname{adm}\Gamma} \int\limits_{\mathbb{C}} \varrho^p(z)\,dx\,dy\,.$$

Let D be a domain in the complex plane $\mathbb{C}$ and $Q : D \to [0, \infty]$ be a measurable function.

A homeomorphism $f : D \to \mathbb{C}$ is called a *Q-homeomorphism with respect to p-modulus* if

$$\mathcal{M}_p(f\Gamma) \ \leqslant\ \int\limits_{D} Q(z)\,\varrho^p(z)\,dx\,dy$$

for every family Γ of curves in D and every admissible function $\varrho \in \operatorname{adm}\Gamma$.

Theorem. *Let D and D' be bounded domains in $\mathbb{C}$ and $f : D \to D'$ be a Q-homeomorphism with respect to p-modulus, $p > 2$, $Q \in L^1_{\rm loc}(D \setminus \{z_0\})$. Then for all $r \in (0, d_0)$, $d_0 = \operatorname{dist}(z_0, \partial D)$,*

$$|fB(z_0, r)| \geqslant \pi \left(\frac{p-2}{p-1}\right)^{\frac{2(p-1)}{p-2}} \left(\int\limits_0^r \frac{dt}{t^{\frac{1}{p-1}}\, q_{z_0}^{\frac{1}{p-1}}(t)}\right)^{\frac{2(p-1)}{p-2}},$$

where $B(z_0, r) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| \leqslant r\}$ and $q_{z_0}(r) = \frac{1}{2\pi\, r} \int\limits_{S(z_0,r)} Q(z)\,|dz|$ is the mean integral value of the function Q over the circle $S(z_0, r) = \{z \in \mathbb{C} :\ |z - z_0| = r\}$.

The Bojanov-Naidenov problem for the functions with non-symmetric restrictions on the oldest derivative

V.A. Kofanov
Oles Honchar Dnepropetrovsk National University, Dnipro, Ukraine
vladimir.kofanov@gmail.com

For given $r \in \mathbb{N}$, $p, \alpha, \beta, \mu^{\pm} > 0$, we solve the extremal problem

$$\int_a^b x_{\pm}^q(t)dt \to \sup, \quad q \geq p,$$

on the set of all functions $x \in L_{\infty}^r(\mathbb{R})$ and intervals $[a, b] \subset \mathbb{R}$ satisfying the inequalities

$$-\beta \leq x^{(r)}(t) \leq \alpha$$

for almost everywhere $t \in \mathbb{R}$ and both of conditions

$$L(x_{\pm})_p \leq L(\varphi_{\lambda,r}^{\alpha,\beta})_{\pm})_p,$$

and such that

$$\mu\left(\mathrm{supp}_{[a,b]} x_+\right) \leq \mu^+ \quad \text{or} \quad \mu\left(\mathrm{supp}_{[a,b]} x_-\right) \leq \mu^-,$$

where

$$L(x)_p := \sup\left\{\|x\|_{L_p[a,b]} : \ a, b \in \mathbb{R}, \ |x(t)| > 0, \ t \in (a, b)\right\},$$

$\mathrm{supp}_{[a,b]} x_{\pm} := \{t \in [a, b] : x_{\pm}(t) > 0\}$ and $\varphi_{\lambda,r}^{\alpha,\beta}$ is nonsymmetric $(2\pi/\lambda)$-periodic spline of Euler of order r.

In particular, we solve the same problem for intermediate derivatives $x_{\pm}^{(k)}$, $k = 1, ..., r-1$, with $q \geq 1$.

Approximation of analytic functions by many-dimensional continued fractions

Khrystyna Kuchminska, Levko Ventyk
Pidstryhach Institute for Applied Problems in Mechanics and Mathematics of NAS of Ukraine, Lviv, Ukraine
khkuchminska@gmail.com

A large number of analytic functions are known to have continued fraction representations. Frequently a given function can be represented by several different continued fractions, each with its own convergence behavior [1].

Expansions of analytic functions of many variables into many-dimensional continued fractions are based on correspondence of the sequences of the fraction approximants to formal multiple power series. In this connection we use the Viscovatoff-like methods to get some types of corresponding continued fractions, such as the many-dimensional C-continued fraction or the many-dimensional associated one [2]. We investigate the behavior of the two-dimensional regular C-continued fraction

$$\Phi_0(z_1,z_2)+\mathop{D}_{i=1}^{\infty}\frac{a_{i,i}z_1z_2}{\Phi_i(z_1,z_2)},\quad \Phi_i(z_1,z_2)=1+\mathop{D}_{j=1}^{\infty}\frac{a_{i+j,i}z_1}{1}+\mathop{D}_{j=1}^{\infty}\frac{a_{i,i+j}z_2}{1},$$

$$\Phi_0(z_1,z_2)=a_{0,0}+\mathop{D}_{i=1}^{\infty}\frac{a_{i,0}z_1}{1}+\mathop{D}_{i=1}^{\infty}\frac{a_{0,i}z_1}{1}$$

with approximants

$$f_n=\frac{P_n}{Q_n}=\Phi_0^{(n)}(z_1,z_2)+\mathop{D}_{i=1}^{n}\frac{a_{i,i}z_1z_2}{\Phi_i^{(n-i)}(z_1,z_2)},\quad n=1,2,\ldots,$$

$$\Phi_i^{(m)}(z_1,z_2)=1+\mathop{D}_{k=1}^{m-i}\frac{a_{i+k,i}z_1}{1}+\mathop{D}_{k=1}^{m-i}\frac{a_{i,i+k}z_2}{1},\Phi_0^{(n)}(z_1,z_2)=a_{0,0}+\mathop{D}_{k=1}^{n}\frac{a_{k,0}z_1}{1}+\mathop{D}_{k=1}^{n}\frac{a_{0,k}z_2}{1}.$$

Theorem. *Let $f(z_1,z_2)$ be an analytic function at the origin. If f_n is the nth approximant of the two-dimensional regular C-fraction approximated the function $f(z_1,z_2)$, then: (i) $\dfrac{P_n(z_1,0)}{Q_n(z_1,0)}$ is the $([n/2],[n/2]$ Padé approximant for the function $g(z_1)=f(z_1,0)$; (ii) $\dfrac{P_n(0,z_2)}{Q_n(0,z_2)}$ is the $([n/2],[n/2]$ Padé approximant for the function $h(z_2)=f(0,z_2)$; (iii) if the two-dimensional regular C-fraction is uniformly convergent in the neighborhood of the origin, then its values converge to values of the function $f(z_1,z_2)$.*

1. Jones W. B., Thron W. J.. Continued Fractions. Analytic Theory and Applications. – London: Addison–Wesley Publishing Company, 1980. – 428 p.
2. Kh. Yo. Kuchminska. Two-Dimensional continued fractions. – Lviv: Inst. Appl. Problem in Mech. Math. NAS of Ukraine, 2010. – 218 p. (in Ukrainian).

Nonlocal problem with integral condition for nonhomogeneous equation of second order

Grzegorz Kuduk
Faculty of Mathematics and Natural Sciences, University of Rzeszow,
Graduate of University of Rzeszow, Rzeszow, Poland
gkuduk@onet.eu

Let $\mathbb{H}(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R})$ be a class of entirie function, $K_{L,M}$ be a class of quasipolynomials in the form $f(t,x) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} Q_{ij}(t,x)e^{\alpha_i x+\beta_j t}$, where $Q_{ij}(t,x)$ are given polynomials, $L \subseteq \mathbb{C}$, $M \subseteq \mathbb{C}$ $\alpha_i \in L$, $\alpha_k \neq \alpha_l$, for $k \neq l$, $\beta_j \in M$, $\beta_k \neq \beta_l$, for $k \neq l$.

In the strip $\Omega = \{(t,x) \in \mathbb{R}^2 : t \in (0,T), x \in \mathbb{R}\}$ we consider the problem

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} - a\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\right]^2 U(t,x) = f(t,x), \tag{1}$$

$$\int_0^T U(t,x)dt = 0, \tag{2}$$

$$R\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\frac{\partial}{\partial t}U(t,x)\Big|_{t=0} + Q\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\frac{\partial}{\partial t}U(t,x)\Big|_{t=T} = 0, \tag{3}$$

where $T > 0$, $(0,T) \subset \mathbb{R}$, $U(t,x) : \Omega \to K_{\mathbb{C},M}$, $R\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)$, $Q\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)$ are differential polynomials, $a(\frac{\partial}{\partial x})$ is the differential expression with entire symbol $a(\lambda) \neq 0$.

Solution of the problem (1), (2), (3) according to the differential-symbol method [1, 2] is represented in the form

$$U(t,x) = f\left(\frac{\partial}{\partial \nu}, \frac{\partial}{\partial \lambda}\right)\left\{G(t,\nu,\lambda)e^{\lambda x}\right\}\Big|_{\lambda=\nu=0},$$

where $G(t,\nu,\lambda)$ is a solution of the equation

$$\left[\frac{d}{dt} - a(\lambda)\right]^2 G(t,\nu,\lambda) = e^{\nu t},$$

satisfies conditions

$$\int_0^T G(t,\nu,\lambda) = 0, \quad R(\lambda)\frac{d}{dt}G(t,\nu,\lambda)\Big|_{t=0} + Q(\lambda)\frac{d}{dt}G(t,\nu,\lambda)\Big|_{t=T} = 0.$$

where $Q(\lambda), R(\lambda)$ are certain functions.

1. Kalenyuk P. I., Nytrebych Z. M., Generalized Scheme of Separation of Variables. Differential-Symbol Method. Publishing House of Lviv Polytechnic Natyonaly University, 2002. – 292 p. (in Ukrainian).
2. Kalenyuk P. I., Nytrebych Z. M., Kohut I. V., Kuduk G., Problem for nonhomogeneous second order evolution equation with homogeneous integral conditions // Math. Methods and Phys. – Mech. Polia. – 2015. – **58**, No 1. – P. 7–19.

Homogenization of hydrodynamics problems

Gennadiy V. Sandrakov
Taras Shevchenko National University of Kyiv, Kyiv, Ukraine
gsandrako@gmail.com

Homogenization of hydrodynamics problems with applications to turbulent regimes of flows in fluids will be discussed. The regimes are arisen usually under a small viscosity (or equivalently under a high Reynolds number) and are associated with rapidly oscillating fluid dynamics. Moreover, in numerical modelling it is known that rapidly oscillation effects arise under computer simulations of solutions of Navier–Stokes equations with a vanishing viscosity. But reasons of the effects are not clear, since the effects may be turbulent regimes or the numerical simulations may be incorrect. Some theoretical results in the direction are presented here. The results are based on homogenization theory and are full for nonstationary linearized equations of hydrodynamics with periodic rapidly oscillating data and a vanishing viscosity. Some of the results hold for Navier–Stokes and Stokes equations.

Thus, initial boundary value problems for nonstationary linearized equations of hydrodynamics and Navier–Stokes equations with the vanishing viscosity and periodic data rapidly oscillating with respect to the spatial variables, when the oscillations are zero in mean, will be considered. The problems are stated in bounded domains that are three-dimensional, for example. The period of data oscillations is specified by a positive small parameter ε and a viscosity coefficient ν in equations of the problems can be also considered as a positive parameter. We present estimates of solutions of the problems, which are dependent on relations of certain powers of the parameters ε and ν. In general case, the presented estimates for velocity fields are actual whenever the viscosity coefficient ν is not too small in comparison with ε^2. If the condition is fulfilled, then the relevant solutions are small asymptotically in an energy norm and it characterizes a "smoothing" property for these solutions. In the case, when the viscosity coefficient has order ε^2, the suitable estimates are derived under assumption that a nonlinearity in equations of the problems is "small" sufficiently. If the condition is fulfilled, then an asymptotics for velocity fields can contain rapidly oscillating terms.

Thus, homogenized (limit) equations whose solutions determine approximations (leading terms of the asymptotics) of the solutions of the equations under consideration and estimate the accuracy of the approximations will be obtained. These approximations and estimates shed light on the following interesting property of the solutions of the equations. When the viscosity is not too small, the approximations contain no rapidly oscillating terms, and the equations under consideration asymptotically smooth the rapid oscillations of the data; thus, the equations are asymptotically parabolic. If the viscosity is very small, the approximations can contain rapidly oscillating terms with zero means, and the equations are asymptotically hyperbolic.

The homogenization of some cases of nonstationary linearized equations of hydrodynamics and Navier–Stokes equations with periodic rapidly oscillating "forces" were considered in [1],[2]. In particular, the results are applicable to some Kolmogorov flows.

1. Sandrakov G. V. The influence of viscosity on oscillations in some linearized problems of hydrodynamics // Izvestiya: Math. – 2007. – **71**, No 1. – P. 97–148.
2. Sandrakov G. V. On some properties of solutions of Navier-Stokes equations with oscillating data // J. Math. Sciences. – 2007 V. 143. P. 3377–3385.

To the interpretation of the Dyakonov-Shur instability mechanism in a ballistic field effect transistor

V. Savchuk[1], I. Anisimov[1], O. Sydoruk[2], S. Siaber[2]
[1]Taras Shevchenko National University of Kyiv, Kyiv, Ukraine
[2] Imperial College London, London, United Kingdom
v.savadrian@gmail.com

Developing effective methods of generation of terahertz radiation is one of the most pressing problems of applied physics [1]. The idea proposed by M.Dyakonov and M.Shur [2] is to use an instability of plasma waves propagating in the two-dimensional channel of a ballistic field effect transistor (FET). This instability is the result of the amplification of plasma waves due to reflections from the channel boundaries. However, the physical picture of the instability remains unclear. The goal of our work is to shed some light on the nature of this instability.

As shown in Ref. [2], the motion of a two-dimensional electron gas in the channel of a ballistic FET can be described by the equation of motion and the continuity equation (taking into account that $n = CU/e$, where C is the gate insulator capacitance per unit area):

$$\frac{\partial \upsilon}{\partial t} + \upsilon\frac{\partial \upsilon}{\partial x} = -\frac{e}{m}\frac{\partial U}{\partial x}, \quad \frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial (U\upsilon)}{\partial x} = 0. \tag{1}$$

Here $\upsilon(x,t)$ is the electron flow velocity, $U = U_{gc}(x,t) - U_t$, U_{gc} is the gate-to-channel voltage, U_t is the threshold voltage. Note that the channel length is much smaller than the mean free path of electrons due to their scattering on phonons and on crystal defects (but much longer than the mean free path due to electron-electron collisions). But electron-electron collisions move only to the electrons velocities exchange and doesn't perturb the motion of the beam itself. This allows us to write the equation of motion in the same form as used for electron beams in vacuum. As a result, we can study the waves in the channel of a ballistic FET as an analogue of the space charge waves (SChW).

The electron velocity and voltage can be presented as a sum of a large constant part and a small space- and time-varying part: $\upsilon = \upsilon_0 + \tilde{\upsilon}$, $U = U_0 + \tilde{U}$, where $\tilde{\upsilon} \ll \upsilon_0$, $\tilde{U} \ll U_0$. With this assumption, we can linearize equations (1) leading to the following wave equation:

$$(\upsilon_0\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial t})^2\tilde{\upsilon} = s^2\frac{\partial^2\tilde{\upsilon}}{\partial x^2}, \tag{2}$$

where $s = \sqrt{eU_0/m}$ is a constant that has the dimension of velocity. Substituting a solution in the form $\tilde{\upsilon} = \upsilon_m exp(i\varphi)$, $\varphi = \omega t - kx$ to (2) gives the dispersion law of SChW in the form:

$$k = \frac{\omega}{\upsilon_0 \pm s}, \tag{3}$$

Obviously, the upper sign corresponds to the fast SChW and the lower sign - to the slow SChW. The parameter s can be interpreted as the wave velocity in the beam frame of reference.

Figure 1 presents the dispersion curves for SChW in the channel of a ballistic FET for $\upsilon_0 < s$ (a) and $\upsilon_0 > s$ (b). Apparently this dispersion relation differs from usual SChW in the electron stream [3]. Now, the phase and group velocities of SChW coincide and differ from the velocity of electron stream υ_0. For $\upsilon_0 < s$ these velocities have opposite directions. The instantaneous energy density of the electron flow with the excited SChW can be presented in the form:

$$W(x,t) = \frac{1}{2}n(x,t)m\upsilon^2(x,t) = \frac{mC}{2e}U(x,t)\upsilon^2(x,t) \tag{4}$$

The instantaneous values of the velocity and voltage are $\tilde{\upsilon} = \upsilon_m \cos\varphi$ and $\tilde{U} = U_m \cos\varphi$, respectively (according to the method of complex amplitudes, the real part of the respective values is taken).

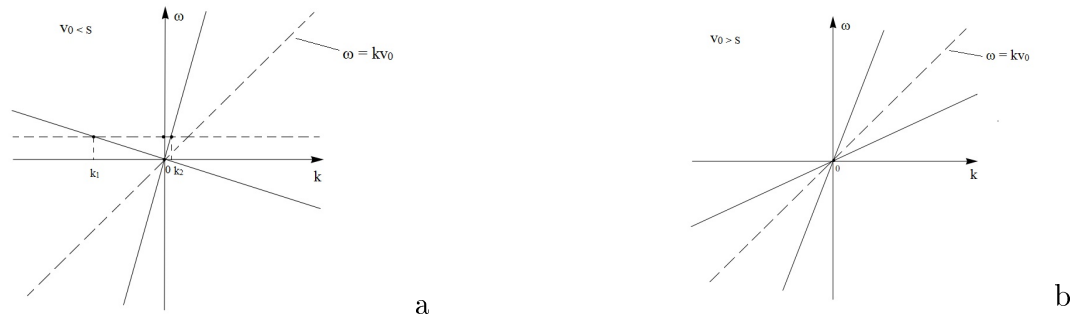

Рис. 1: Dispersion characteristics of space charge waves in the channel: a - $\upsilon_0 < s$, b - $\upsilon_0 > s$

Substituting these values into Eq. (4) and averaging over the time, one can obtain an expression for ΔW - energy density for the fast and slow SChW in the form

$$\Delta W_{1,2} = \frac{m^2 C s}{4e^2}(s \pm 2\upsilon_0)\upsilon_{m_{1,2}}^2 \tag{5}$$

Thus, for the fast SChW $\Delta W_1 > 0$, while for the slow SChW $\Delta W_2 < 0$ for $\upsilon_0 > s/2$. It means that this wave has negative energy.

Now, for the better description of behavior of SChW in the channel of a ballistic FET, let us consider the SChW propagation taking into account the electron scattering on phonons and on crystal defects. In the right part of the equation (1) we add the term $-\tilde{\upsilon}\nu$, ν where is the number of collisions per second, and $\tilde{\upsilon}$ is the small space- and time-varying part of electron velocity.

After linearization of equations (1) and substituting solution in the form of harmonic wave to (1), we can obtain the revised dispersion law of SChW:

$$k_{1,2} = k'_{1,2} + ik''_{1,2} = (2\omega - i\nu)/2(\upsilon_0 \mp s), \tag{6}$$

Note that the upper sign corresponds to the slow SChW and the lower sign - to the fast SChW.

Substituting expression (6) to a possible solution ($f(x,t) = exp(i\omega t - ikx)$) of equations (1), we can see that the fast SChW will be subside by the law $exp(-k''x)$. And the slow SChW will be grow by the law $exp(k''x)$ along the direction of x, when $\upsilon_0 < s$ and $\upsilon_g > 0$ or along the propagation direction of υ_g, when $\upsilon_0 > s$ and $\upsilon_g < 0$. In these both cases we have instability for slow SChW.

So, propagation of the slow SChW in the channel of a ballistic FET can explain the mechanism of Dyakonov-Shur instability.

1. Siaber S., Anisimov I., Sydoruk O. Amplification of terahertz plasmons by transverse dc current // Presented at IET Colloquium on Millimetre-wave and Terahertz Engineering & Technology 2016, London, March 2016.
2. Dyakonov M., Shur M. Shallow water analogy for a ballistic field effect transistor: new mechanism of plasma wave generation by dc current // Phys. Rev. Lett. – 1993. – **71**, No 15. – P. 2465–2468.
3. Anisimov I. O., Kotlyarov I. Y., Levitsky S. M., Opanasenko O. V., Palets D. B., Romanyuk L. I. Study of the plasma barrier transillumination for electromagnetic waves using electron beams. 2. Evolution of the space charge waves in a barrier. // Ukr. Phys. Journ. – 1996. – **41**, No 3. – P. 164–170 (in Ukrainian).

Best Approximation of the Cauchy–Szegö Kernel in the Mean on the Unit Circle

Viktor V. Savchuk
Institute of Mathematics of NAS of Ukraine, Kyiv, Ukraine
savchuk@imath.kiev.ua

Let $\mathbf{a} := \{a_k\}_{k=0}^{\infty}$ be a sequence of points in the unit disk $\mathbb{D} := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ among which there may be points of finite or ever infinite multiplicity. A system $\varphi := \{\varphi_j\}_{j=0}^{\infty}$ of functions φ_j of the form

$$\varphi_0(t) = \frac{\sqrt{1-|a_0|^2}}{1-\overline{a_0}t}, \quad \varphi_j(t) = \frac{\sqrt{1-|a_j|^2}}{1-\overline{a_j}t} B_j(t), \ j = 1, 2, \ldots,$$

where

$$B_j(t) := \prod_{k=0}^{j-1} \frac{-|a_k|}{a_k} \cdot \frac{t-a_k}{1-t\overline{a_k}}, \quad \frac{|a_k|}{a_k} = -1 \text{ for } a_k = 0,$$

is called a Takenaka–Malmquist system.

By TM we denote the set of all Takeneka–Malmquist systems.

It is known that for arbitrary $\varphi \in TM$ and $n \in \mathbb{N}$,

$$\frac{1}{1-\overline{z}t} - \sum_{j=0}^{n-1} \overline{\varphi_j(z)}\varphi_j(t) = \frac{\overline{B_n(z)}B_n(t)}{1-\overline{z}t}, \quad (z,t) \in \overline{\mathbb{D}}^2 \setminus \mathbb{T}^2, \tag{1}$$

where $\mathbb{T} := \{t \in \mathbb{C} : |t| = 1\}$.

It follows from (1) that

$$\min_{\lambda_{j,n}(z)} \int_{\mathbb{T}} \left| \frac{1}{1-\overline{z}t} - \sum_{j=0}^{n-1} \lambda_{j,n}(z)\varphi_j(t) \right|^2 d\sigma(t) =$$

$$= \int_{\mathbb{T}} \left| \frac{1}{1-\overline{z}t} - \sum_{j=0}^{n-1} \overline{\varphi_j(z)}\varphi_j(t) \right|^2 d\sigma(t) = \frac{|B_n(z)|^2}{1-|z|^2}, \quad z \in \mathbb{D},$$

where σ is the normalized Lebesgue measure on the circle $\mathbb{T}$.

We compute the values

$$E_n\left(\frac{1}{1-\overline{z}\cdot}\ ;\varphi\right) := \min_{\lambda_{j,n}(z)} \int_{\mathbb{T}} \left| \frac{1}{1-\overline{z}t} - \sum_{j=0}^{n-1} \lambda_{j,n}(z)\varphi_j(t) \right| d\sigma(t), \tag{2}$$

which is called the best approximations in the mean on the unit circle $\mathbb{T}$ for the Cauchy–Szegö kernel $1/(1-z\bar{t})$ by quasipolynomials with respect to the Takenaka–Malmquist system φ.

Theorem. *Let $\varphi \in TM$ and let $z \in \mathbb{D}$. Then, for every $n \in \mathbb{N}$,*

$$E_n\left(\frac{1}{1-\overline{z}\cdot}\ ;\varphi\right) = |B_n(z)| \frac{1-|z|^2}{1-|zB_n(z)|^2} \int_{\mathbb{T}} \frac{\left|1-\overline{zB_n(z)}tB_n(t)\right|}{|1-\overline{z}t|^2} d\sigma(t).$$

The minimum in (2) is attained for the coefficients

$$\lambda_{j,n}^*(z) = \frac{\overline{\varphi_j(z)}}{1-|zB_n(z)|^2} \left(1 - z\frac{1-a_j\overline{z}}{z-a_j}\left|\frac{B_n(z)}{B_j(z)}\right|^2\right), \ j = 0, 1, \ldots, n-1.$$

Estimates for the means of the Taylor series for certain classes of holomorphic functions

Viktor V. Savchuk[1], **Maryna V. Savchuk**[2]
[1]Institute of Mathematics of NAS of Ukraine, Kyiv, Ukraine
[2]Ukrainian State Employment Service Training Institute (USESTI), Kyiv, Ukraine
savchuk@imath.kiev.ua, savchuk_m@ukr.net

Let B^1 be the class of functions f holomorphic in the unit disk $\mathbb{D} := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ such that $\sup_{z\in\mathbb{D}} |f'(z)| \le 1$, $\widehat{f}_j := f^{(j)}(0)/(j!)$ and let

$$r_n(f)(z) := \sum_{j=n}^{\infty} \widehat{f}_j z^j, \ \sigma_n(f)(z) := f(z) - \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} r_{j+1}(f)(z), \ n \in \mathbb{N},$$

be the n-th remainder of Taylor series and Fejer means of f respectively.

It follows from results of E. Landau (1913), H. Bohr (1917), G.N. Watson (1930), S.B. Stechkin (1953), L. Brutman (1982) and V.V. Savchuk (2011) that for any functions $f \in B^1$,

$$|r_n(f)(z)| \le \frac{\ln n}{\pi n} + \frac{2.0663}{n} \text{ and } \limsup_{n\to\infty} \ n|f(z) - \sigma_n(f)(z)| \le 1 \quad \forall\, z \in \overline{\mathbb{D}}, \ n \in \mathbb{N},$$

and there exist functions $f_1, f_2 \in B^1$ such that

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{n|r_n(f_1)(1)|}{\ln n} = \frac{1}{\pi} \text{ and } \limsup_{n\to\infty} \ n|f_2(z) - \sigma_n(f_2)(z)| = |z| \ \forall\, z \in \overline{\mathbb{D}}.$$

On the other hand, it is not difficult to show that for arbitrary function $f \in B^1$,

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{n|r_n(f)(z)|}{\ln n} = 0 < \liminf_{n\to\infty} \ n|f(z) - \sigma_n(f)(z)| \quad \forall\, z \in \overline{\mathbb{D}}.$$

More precisely we have

Theorem. *For arbitrary function $f \in B^1$, one has*

$$\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} j^2 |r_{j+1}(f)(z)|^2 \le 4|z|^2 \quad \forall\, z \in \overline{\mathbb{D}}, \ n \in \mathbb{N},$$

and

$$\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} j^2 \left|f(z) - \sigma_j(f)(z)\right|^2 \le |z|^2 \quad \forall\, z \in \overline{\mathbb{D}}, \ n \in \mathbb{N}. \tag{1}$$

The inequality (1) *is best possible and is attained when $f(z) = e^{i\theta} z, \ \theta \in \mathbb{R}$.*

It follows from Theorem that for arbitrary $f \in B^1$,

$$\liminf_{n\to\infty} \ n|r_n(f)(z)| \le 2 \quad \forall\, z \in \overline{\mathbb{D}}.$$

On the other hand, Temlyakov showed (1979) that

$$\sup\left\{\liminf_{n\to\infty} nE_n(f) : f \in B^1\right\} = 1,$$

where $E_n(f)$ is the best approximation of f by algebraic polynomials of degree $\le n$ in the norm $\|\cdot\| = \max_{z\in\overline{\mathbb{D}}} |\cdot(z)|$.

So, we have

$$1 = \sup\left\{\lim_{n\to\infty} n\|f - \sigma_n(f)\| : f \in B^1\right\} \le \sup\left\{\liminf_{n\to\infty} n\|r_n(f)\| : f \in B^1\right\} \le 2.$$

Approximations of generalized Poisson integrals by Fourier sums

[1]**A. S. Serdyuk**, [2]**T. A. Stepaniuk**
[1]Institute of Mathematics of NAS of Ukraine, Kyiv, Ukraine
[2]Graz University of Technology, Graz, Austria
[1]*sanatolii@ukr.net*, [2]*tania_stepaniuk@ukr.net*

Denote by $C^{\alpha,r}_{\beta,p}$, $\alpha>0$, $r>0$, $\beta\in\mathbb{R}$, $1\le p\le\infty$, the set of all 2π–periodic functions, representable for all $x\in\mathbb{R}$ as convolutions of the form (see, e.g., [1])

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}P_{\alpha,r,\beta}(x-t)\varphi(t)dt,\ a_0\in\mathbb{R},\quad ||\varphi||_p\le 1\ \varphi\perp 1,$$

with generalized Poisson kernels of the form

$$P_{\alpha,r,\beta}(t)=\sum_{k=1}^{\infty}e^{-\alpha k^r}\cos\big(kt-\frac{\beta\pi}{2}\big),\quad \alpha>0,\quad r>0,\quad \beta\in\mathbb{R}.$$

Functions f of such form are called generalized Poisson integrals of the functions φ.

We consider the approximative characteristics of the form

$$\mathcal{E}_n(C^{\alpha,r}_{\beta,p})_s=\sup_{f\in C^{\alpha,r}_{\beta,p}}\|f(\cdot)-S_{n-1}(f;\cdot)\|_s,\ r>0,\ \alpha>0,\ \beta\in\mathbb{R},\ 1\le p,s\le\infty,$$

where $S_{n-1}(f;\cdot)$ are the partial Fourier sums of order $n-1$ for a function f.

We solve the problem about finding asymptotically unimprovable estimates of quantities $\mathcal{E}_n(C^{\alpha,r}_{\beta,p})_\infty$, $1<p<\infty$, and $\mathcal{E}_n(C^{\alpha,r}_{\beta,1})_s$, $1<s<\infty$, for $r\in(0,1)$.

For arbitrary fixed $\alpha>0$, $r\in(0,1)$ and $1\le p\le\infty$ we denote by $n_0=n_0(\alpha,r,p)$ the smallest integer n such that

$$\frac{1}{\alpha r}\frac{1}{n^r}+\frac{\alpha r\chi(p)}{n^{1-r}}\le\begin{cases}\frac{1}{14}, & p=1,\\ \frac{1}{(3\pi)^3}\cdot\frac{p-1}{p}, & 1<p<\infty,\\ \frac{1}{(3\pi)^3}, & p=\infty,\end{cases}$$

where $\chi(p)=p$ for $1\le p<\infty$ and $\chi(p)=1$ for $p=\infty$.

With the notations introduced above, the following statements take place.

Theorem 1. *Let $0<r<1$, $1<p<\infty$, $\alpha>0$ and $\beta\in\mathbb{R}$. Then for $n\ge n_0(\alpha,r,p)$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1$, the following estimate is true*

$$\mathcal{E}_n(C^{\alpha,r}_{\beta,p})_\infty=e^{-\alpha n^r}n^{\frac{1-r}{p}}\Big(\frac{\|\cos t\|_{p'}}{\pi^{1+\frac{1}{p'}}(\alpha r)^{\frac{1}{p}}}F^{\frac{1}{p'}}\Big(\frac{1}{2},\frac{3-p'}{2};\frac{3}{2};1\Big)+\gamma^{(1)}_{n,p}\Big(\Big(1+\frac{(\alpha r)^{\frac{p'-1}{p}}}{p'-1}\Big)\frac{1}{n^{\frac{1-r}{p}}}+\frac{(p)^{\frac{1}{p'}}}{(\alpha r)^{1+\frac{1}{p}}}\frac{1}{n^r}\Big)\Big),$$

where $F(a,b;c;z)$ is the Gaussian hypergeometric function and the quantity $\gamma^{(1)}_{n,p}=\gamma^{(1)}_{n,p}(\alpha,r,\beta)$ is such that $|\gamma^{(1)}_{n,p}|\le(14\pi)^2$.

Theorem 2. *Let $0<r<1$, $1<s<\infty$, $\alpha>0$ and $\beta\in\mathbb{R}$. Then for $n\ge n_0(\alpha,r,s')$, $\frac{1}{s}+\frac{1}{s'}=1$, the following estimate is true*

$$\mathcal{E}_n(C^{\alpha,r}_{\beta,1})_s=e^{-\alpha n^r}n^{\frac{1-r}{s'}}\Big(\frac{\|\cos t\|_s}{\pi^{1+\frac{1}{s}}(\alpha r)^{\frac{1}{s'}}}F^{\frac{1}{s}}\Big(\frac{1}{2},\frac{3-s}{2};\frac{3}{2};1\Big)+\gamma^{(2)}_{n,s}\Big(\Big(1+\frac{(\alpha r)^{\frac{s-1}{s'}}}{s-1}\Big)\frac{1}{n^{\frac{1-r}{s'}}}+\frac{(s')^{\frac{1}{s}}}{(\alpha r)^{1+\frac{1}{s'}}}\frac{1}{n^r}\Big)\Big),$$

where the quantity $\gamma^{(2)}_{n,s}=\gamma^{(2)}_{n,s}(\alpha,r,\beta)$ is such that $|\gamma^{(2)}_{n,s}|\le(14\pi)^2$.

1. Stepanets A. I. Methods of approximation theory. – Leiden–Boston: VSP, 2005. – 919 p.

On boundary behavior of Orlicz–Sobolev classes in terms of prime ends

Evgeny Sevost'yanov
Zhytomyr Ivan Franko State University, Zhytomyr, Ukraine
esevostyanov2009@mail.ru

In accordance with a definition, a chain of cross-cuts $\{\sigma_m\}$ determines a *chain of domains* $d_m \subset D$ such that $\partial d_m \cap D \subset \sigma_m$ and $d_1 \supset d_2 \supset \ldots \supset d_m \supset \ldots$. Two chains of cross-cuts $\{\sigma_m\}$ and $\{\sigma'_k\}$ are said to be equivalent if for every $m = 1, 2, \ldots$ the domain d_m contains all domains d'_k except finitely many of them, and for every $k = 1, 2, \ldots$ the domain d'_k also contains all domains d_m except finitely many. An *end* of a domain D is an equivalence class of chains of cross-cuts of D. We say that an end K is a *prime end* if K contains a chain of cross-cuts $\{\sigma_m\}$, such that $\lim\limits_{m\to\infty} M(\Gamma(C, \sigma_m, D)) = 0$ for some continuum C in D, where M is the modulus of the family $\Gamma(C, \sigma_m, D)$. We say that the boundary of a domain D in $\mathbb{R}^n$ is *locally quasiconformal* if every point $x_0 \in \partial D$ has a neighborhood U that admit a conformal mapping φ onto the unit ball $\mathbb{B}^n \subset \mathbb{R}^n$ such that $\varphi(\partial D \cap U)$ is the intersection of $\mathbb{B}^n$ and a coordinate hyperplane. We say that a bounded domain D in $\mathbb{R}^n$ is *regular* if D can be mapped quasiconformally onto a domain with a locally quasiconformal boundary. If $\overline{D}_P$ is the completion of a regular domain D by its prime ends and g_0 is a quasiconformal mapping of a domain D_0 with locally quasiconformal boundary onto D, then this mapping naturally determines the metric $\rho_0(p_1, p_2) = \left|\widetilde{g_0}^{-1}(p_1) - \widetilde{g_0}^{-1}(p_2)\right|$, where $\widetilde{g_0}$ is the extension of g_0 onto $\overline{D_0}$. Let $\varphi : [0, \infty) \to [0, \infty)$ be a nondecreasing function, $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $f(x) = (f_1(x), \ldots, f_n(x))$, $|\nabla f(x)| = \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right)^2}$. Now we write $f \in W^{1,\varphi}_{loc}(D)$, if $f_i \in W^{1,1}_{loc}$ for each $i = 1, \ldots, n$, and $\int\limits_G \varphi\left(|\nabla f(x)|\right) dm(x) < \infty$ for every domain $G \subset D$ with a compact closure $\overline{G} \subset D$. Let D be a domain in $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, and $f : D \to \mathbb{R}^n$ be a continuous mapping. A mapping $f : D \to \mathbb{R}^n$ is said to be *discrete* if the preimage $f^{-1}(y)$ of every point $y \in \mathbb{R}^n$ consists of isolated points, and *open* if the image of every open set $U \subset D$ is open in $\mathbb{R}^n$. A mapping f is closed if the image of every closed set $U \subset D$ is closed in $f(D)$. Set $l\left(f'(x)\right) := \min\limits_{|h|=1} |f'(x)h|$, $J(x, f) := \det f'(x)$, $K_{I,\alpha}(x, f) = \frac{|J(x,f)|}{l(f'(x))^{\alpha}}$ if $J(x, f) \neq 0$, $K_{I,\alpha}(x, f) = 1$ if $f'(x) = 0$ and $K_{I,\alpha}(x, f) = \infty$ at the rest points. The following results hold.

Theorem 1. *Let $n \geqslant 2$, $\alpha > 1$, let D be a regular domain in $\mathbb{R}^n$, and let D' be a bounded domain with locally quasiconformal boundary, which is strongly accessible with respect to α-modulus. Assume that $f : D \to D'$ is open, discrete and closed, $D' = f(D)$ and $W^{1,\varphi}_{loc}(D)$. Then f has a continuous extension $f : \overline{D}_P \to \overline{D'}_P$ such that $f(\overline{D}_P) = \overline{D'}_P$, whenever φ satisfies the condition $\int\limits_1^{\infty}\left(\frac{t}{\varphi(t)}\right)^{\frac{1}{n-2}} dt < \infty$ and, besides that there exists Lebesgue measurable function $Q : \mathbb{R}^n \to [0, \infty]$, $Q(x) \equiv 0$ for $x \notin D$, $0 < Q(x) < \infty$ for $x \in D$, such that $K_{I,\alpha}(x, f) \leqslant Q(x)$ for a.a. $x \in D$ and*

$$\int\limits_{\varepsilon}^{\varepsilon_0} \frac{dt}{t^{\frac{n-1}{\alpha-1}} q_{x_0}^{\frac{1}{\alpha-1}}(t)} < \infty\,, \qquad \int\limits_{0}^{\varepsilon_0} \frac{dt}{t^{\frac{n-1}{\alpha-1}} q_{x_0}^{\frac{1}{\alpha-1}}(t)} = \infty\,, \tag{1}$$

where $q_{x_0}(r) := \frac{1}{\omega_{n-1} r^{n-1}} \int\limits_{|x-x_0|=r} Q(x)\, d\mathcal{H}^{n-1}$.

Theorem 2. *The statement of the Theorem 1 is true, if instead of the conditions* (1) *we require that $Q \in FMO(x_0)$ for every $x_0 \in \partial D$.*

The best M-term trigonometric approximations of multivariate classes of functions with bounded generalized derivative

K. V. Shvai
Institute of Mathematics of NAS of Ukraine, Kyiv, Ukraine
kate.shvai@gmail.com

Let us consider the space $L_q(\pi_d)$, $1 \le q < \infty$, of 2π-periodic by each variable functions f, with the finite norm

$$\|f\|_{L_q(\pi_d)} = \|f\|_q = \left((2\pi)^{-d} \int\limits_{\pi_d} |f(x)|^q dx\right)^{\frac{1}{q}}, \ 1 \le q < \infty,$$

where $x = (x_1, \ldots, x_d) \in \mathbb{R}^d$, $d \ge 1$, and $\pi_d = \prod\limits_{j=1}^{d} [-\pi, \pi]$.

Investigated here is a behavior for the best M-term trigonometric approximations of classes $L^{\psi}_{\beta,1}$, $\psi = (\psi_1, \ldots, \psi_d)$, $\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_d)$, of periodic multivariate functions (see, e.g., [1]). In the case $d = 1$, the classes $L^{\psi}_{\beta,1}$ were proposed by A. I. Stepanets [2, p. 132].

Definition. *The best M-term trigonometric approximation of a functional class $F \subset L_q$, $1 \le q < \infty$, is the quantity*

$$e_M(F)_q = \sup_{f \in F} \inf_{k^j, c_j} \left\| f(\cdot) - \sum_{j=1}^{M} c_j e^{i\left(k^j, \cdot\right)} \right\|_q,$$

where $\{k^j\}_{j=1}^{M}$ is a system of vectors $k^j = \left(k_1^j, ..., k_d^j\right)$ with integer coordinates, and c_j, $j = \overline{1, M}$, are arbitrary complex numbers.

Denote by D a set of sequences φ satisfying the following conditions:

1. φ are positive and nonincreasing;
2. $\exists K > 0$ such that $\forall l \in \mathbb{N}$ $\varphi(l)/\varphi(2l) \le K$.

Theorem. *Let $2 \le q < \infty$, $\psi_j \in D$, $\beta_j \in \mathbb{R}$, $j = \overline{1, d}$, and, besides, there exists $\varepsilon > 0$ such that $\psi_j(l)\, l^{1+\varepsilon}$ are nonincreasing. Then for all M and n that satisfy conditions $M \asymp 2^n n^{d-1}$, we have the estimate*

$$\Phi(n) M^{\frac{1}{2}} \ll e_M\left(L^{\psi}_{\beta,1}\right)_q \ll \Psi(n) M^{\frac{1}{2}},$$

where $\Phi(n) = \min\limits_{(s,1)=n} \prod\limits_{j=1}^{d} \psi_j(2^{s_j})$, $\Psi(n) = \max\limits_{(s,1)=n} \prod\limits_{j=1}^{d} \psi_j(2^{s_j})$, $(s, 1) = s_1 + s_2 + \ldots s_d$.

1. Romanyuk A. S. Approximation of classes of periodic functions of several variables // Ukr. Mat. Zh. – 1992. – **44**, No 5. – P. 662–672 (in Russian).
2. Stepanets A. I. Methods of approximation theory. – Leiden–Boston: VSP, 2005. – 919 p.

Direct and inverse approximation theorems of 2π-periodic functions by Taylor-Abel-Poisson means

Andrii Shydlich
Institute of Mathematics of NAS of Ukraine, Kyiv, Ukraine
shidlich@gmail.com

Let $L_p = L_p(\mathbb{T})$, $1 \le p \le \infty$, be the space of all functions f, given on the torus $\mathbb{T} = [0, 2\pi]$ with the usual norm $\|f\|_p$. For $f \in L_1$, $\varrho \in [0, 1)$ and $r \in \mathbb{N}$, we set

$$A_{\varrho,r}(f)(t) := \sum_{k\in\mathbb{Z}} \lambda_{|k|,r}(\varrho)\widehat{f}_k e^{ikt},$$

where $\widehat{f}_k$ are Fourier coefficients of f, $\lambda_{k,r}(\varrho) \equiv 1$, when $0 \le k \le r-1$ and

$$\lambda_{k,r}(\varrho) = \sum_{j=0}^{r-1} \binom{k}{j} (1-\varrho)^j \varrho^{k-j}, \quad \text{when } k = r, r+1, \ldots$$

If for $f \in L_1$ and $n \in \mathbb{N}$, there exists the function $g \in L_1$ such that $\widehat{g}_k = 0$, when $|k| < n$ and $\widehat{g}_k = \widehat{f}_k |k|!/(|k|-n)!$, when $|k| \ge n$, $k \in \mathbb{Z}$, then we say that for the function f, there exists the radial derivative g of order n, for which we use the notation $f^{[n]}$. Let also

$$K_n(\delta, f)_p := \inf\{\|f-h\|_p + \delta^n \|h^{[n]}\|_p : h^{[n]} \in L_p\}, \ \delta > 0,$$

denote K–functional of $f \in L_p$, generated by the nth radial derivative.

Theorem. *Assume that $f \in L_p$, $1 < p \le \infty$, $n, r \in \mathbb{N}$, $n \le r$ and $\omega(t)$ is an increasing continuous on $[0, 1]$ function such that $\omega(0) = 0$ and $\int_0^\delta \frac{\omega(t)}{t} dt + \delta^n \int_\delta^1 \frac{\omega(t)}{t^{n+1}} dt = O(\omega(\delta))$, $\delta > 0$. Then*

$$\|f - A_{\varrho,r}(f)\|_p = O\left((1-\varrho)^{r-n}\omega(1-\varrho)\right), \quad \varrho \to 1-,$$

iff there exists the derivative $f^{[r-n]} \in L_p$ and

$$K_n(\delta, f^{[r-n]})_p = O(\omega(\delta)), \quad \delta \to 0+.$$

This is a joint work with Jürgen Prestin (Institute of Mathematics, University of Lübeck, Germany) and Viktor Savchuk (Institute of Mathematics of NAS of Ukraine). It was partially supported by the FP7-People-2011-IRSES project number 295164 (EUMLS: EUUkrainian Mathematicians for Life Sciences).

On the "Interference" of Contour and Weight Function for Orthogonal Polynomials Along a Contour

D. Simsek[1,3], **M. Imaskizi**[1], **B. Oğul**[1], **F. G. Abdullayev**[1,2]
[1]Kyrgyz-Turkish Manas University, Kyrgyzstan,
[2]Mersin University, Turkey,
[3]Selçuk University, Turkey
fahreddin.abdullayev@manas.edu.kg; dagistan.simsek@manas.edu.kg

Let $L \subset \mathbb{C}$ be a closed rectifiable Jordan curve and let $h(z)$ be a non-negative, summable on L and non-zero except possible on a set of measure zero function. The systems of polynomials $\{K_n(z)\}$, $K_n(z) = a_n z^n + ...$, $\deg K_n = n$, $n = 0, 1, 2, ...$, satisfying the given condition

$$\int_L h(z) K_n(z) \overline{K_m(z)} \, |dz| = \begin{cases} 1, & n = m, \\ 0, & n \neq m, \end{cases}$$

are called orthonormal polynomials for the pair (L, h). These polynomials are determined uniquely if the coefficient $a_n > 0$.

In this paper, we continue the investigation begun in [1]–[4] (also references therein), order of growth of the modulus of orthogonal polynomials in the weighted space, where the contour and the weight functions have some singularities on the finite points on the contour.

We obtain estimations for modulus of these polynomials, when the "algebraic zero" and "algebraic pole" conditions are fulfilled.

1. Abdullayev F. G. On the some properties on orthogonal polynomials over the regions of complex plane. I // Ukr. Math. J. – 2000. – **52**, No 12. – P. 1807–1817.
2. Abdullayev F. G. On the some properties on orthogonal polynomials over the regions of complex plane. II // Ukr. Math. J. – 2001. – **53**, No 1. – P. 1–14.
3. Abdullayev F. G. On the interference of the weight boundary contour for orthogonal polynomials over the region // J. of Comp. Anal. and Appl. – 2004. – **6**, No 1. – P. 31–42.
4. Abdullayev F. G., Abdullayev G. A. On the Sharp Inequalities for Orthonormal Polynomials Along a Contour // Complex Analysis and Operator Theory. – 2017. – No 1, DOI: 10.1007/s11785-017-0640-1.

About the best polynomial approximation in L_2

S. B. Vakarchuk
Alfred Nobel University, Dnipro
sbvakarchuk@ukr.net

The given scientific message is by continuation of researches of the author [1]–[3]. The module of a continuity

$$\widehat{\omega}(f,t)_p = \sup\{\|(4/\pi^2)\sum_{\nu\in\mathbb{Z}} f(x+(2\nu+1)h)/(2\nu+1)^2 - f(x)\|_p : 0 \leqslant h \leqslant t\} \ (t \geqslant 0)$$

was considered by K. V. Runovskiy and H.-J. Schmeisser in the space of 2π-periodic functions of $L_p(1 \leqslant p \leqslant \infty)$. Let's use the given characteristic of smoothness for the decision of the number of extreme tasks of the approximation theory of functions in the space L_2. Proceeding from the offered A. I. Stepanets classification of 2π-periodic functions, by symbol $L^{\psi}_{\beta,2}$ we shall designate a class of functions f in L_2, for each of which their (ψ,β)-derivatives f^{ψ}_{β} belong L_2. Let $\mathfrak{M}$ be the class of continuous functions on the set $[1,\infty)$, which are positive, convex downwards and aspire to 0 at $x \to \infty$. The sequences $\{\psi(j)\}_{j\in\mathbb{N}}$, which participate in the definition of (ψ,β)-derivatives, are the narrowing of functions ψ from $\mathfrak{M}$ on the set $\mathbb{N}$; thus $L^{\psi}_{\beta,2} \subset L_2$. Let $E_{n-1}(f)$ be the best approximation of function $f \in L_2$ by subset of trigonometrical polynomials, which order does not exceed $n-1$.

Theorem. *Let function $\psi \in \mathfrak{M}$ is differentiable on the set $(1,\infty)$; $\tau \in (0,\pi/n]$; $n \in \mathbb{N}$; ξ is non-negative differentiable function almost everywhere on $(0,\tau)$, which is not equivalent to zero and such that $\sup\{a(\psi,x) : 1 \leqslant x < \infty\} \leqslant 2$, where $a(\psi,x) = \psi(x)/(x|\psi'(x)|)$. If at some p, which satisfies to the condition $\sup\{a(\psi,x) : 1 \leqslant x < \infty\} \leqslant p \leqslant 2$, for almost all $t \in (0,\tau)$ and anyone $x \in (1,\infty)$ the inequality $(p/a(\psi,x)-1)\xi(t) - t\xi'(t) \geqslant 0$ is fair, the equality takes place*

$$\sup_{\substack{f\in L^{\psi}_{\beta,2}\\ f\not\equiv const}} \frac{nE_{n-1}(f)}{\psi(n)\big\{\int_0^{\tau}\widehat{\omega}^p(f^{\psi}_{\beta},t)\xi(t)dt\big\}^{1/p}} = \frac{\pi}{2\big\{\int_0^{\tau} t^p\xi(t)dt\big\}^{1/p}}.$$

Let, for example, $\psi_r(x) = x^{-r}$, where $r \in \mathbb{R}_+\backslash\{0\}$ and $1 \leqslant x < \infty$, $\beta \in \mathbb{R}$. Then $f^{\psi}_{\beta} = f^{(r)}_{\beta}$ is the Weyl – Nady derivative and $a(\psi_r,x) = 1/r$ for $x \in [1,\infty)$. Let $\xi(t) = t^m$, where $0 \leqslant m < \infty$. If $(1+m)/2 \leqslant r < \infty$ and $(1+m)/r \leqslant p \leqslant 2$, we obtain from the theorem

$$\sup_{\substack{f\in L^{\psi_r}_{\beta,2}\\ f\not\equiv const}} \frac{n^{r+1}E_{n-1}(f)}{\big\{\int_0^{\tau}\widehat{\omega}^p(f^{(r)}_{\beta},t)t^m dt\big\}^{1/p}} = \frac{\pi(p+m+1)^{1/p}}{2\tau^{1+(m+1)/p}},$$

where $0 < \tau \leqslant \pi/n$.

1. Vakarchuk S. B. Jackson-type inequalities with generalized modulus of continuity and exact values of the n-widths of the classes of (ψ,β)-differential functions in L_2. I. // Ukr. Mat. Zh. – 2016. – **68**, No 6. – P. 723–745.
2. Vakarchuk S. B. Jackson-type inequalities with generalized modulus of continuity and exact values of the n-widths of the classes of (ψ,β)-differential functions in L_2. II.// Ukr. Mat. Zh. – 2016. – **68**, No 8. – P. 1021–1036.
3. Vakarchuk S. B. Jackson-type inequalities with generalized modulus of continuity and exact values of the n-widths of the classes of (ψ,β)-differential functions in L_2. III.// Ukr. Mat. Zh. – 2016. – **68**, No 10. – P. 1299–1319.

Some properties of generalized convex sets

Yurii Zelinskii, Bogdan Klishchuk
Institute of Mathematics of NAS of Ukraine, Kyiv, Ukraine
yuzelinski@gmail.com, kban1988@gmail.com

Definition 1. We say that the set $E \subset \mathbb{R}^n$ is m-convex with respect to the point $x \in \mathbb{R}^n \backslash E$, if exists a m-dimensional plane L, such that $x \in L$ and $L \cap E = \varnothing$.

Definition 2. The open set $G \subset \mathbb{R}^n$ is called weakly m-convex if it is m-convex with respect to each point $x \in \partial G$ that belongs to the boundary of the set G. Any set $E \subset \mathbb{R}^n$ is weakly m-convex if it can be approximated from outside by the family of open weakly m-convex sets.

Proposition. *If E_1 is a weakly k-convex set and E_2 is a weakly m-convex set, $k \leqslant m$, then the set $E = E_1 \cap E_2$ will be weakly k-convex.*

Let $G(n, m)$ be Grassmann manifold of m-dimensional planes in [4]. The conjugate set E^* to the set E is called a subset of a set of m-dimensional planes in $G(n, m)$ that don't intersect the set E.

Theorem. *If K is a weakly m-convex compact set and the set K^* is connected then for the section of K by every $(n-m)$-dimensional plane L the set $L \backslash K \cap L$ will be connected.*

1. Zelinskii Yu. B. Convexity. Selected topics // Proc. of Institute of Mathematics NASU. – Kiev, 2012. – **92**. – 280 p. (in Russian).
2. Zelinskii Yu. B., Momot I. V. About (n, m)-convex sets // Ukr. Mat. Zh. – 2001. – **53**, No 3. – P. 422–427 (in Russian).
3. Zelinskii Yu. B., Gretsky A. S., Momot I. V. Some results on generalized convex sets, Classical analysis // Proceedings of 10-th intern. sympos. Poland, 1999. – Warsaw, 2001. – P. 113–124.
4. Rohlin V. A., Fuks D. B. Basic Topology course. – Moscow: Nauka, 1977. – 488 p. (in Russian).

Деякі класи голоморфних в крузі функцій

Б. П. Антонюк
Східноєвропейський національний університет імені Лесі Українки, м. Луцьк
bogdan.antonyuk78@gmail.com

Розглянемо множину $\mathscr{H}$ функцій, голоморфних в крузі $\mathbb{D} := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ [1]. Нехай $\lambda : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ зростаюча k разів диференційована ($k \in \mathbb{N}$) функція дійсного аргументу, що задовольняє умову: $\lambda^{(i)}(t) \neq 0$ при $t > 0$, $i = \overline{1,k}$. Означимо клас голоморфних функцій $\mathscr{L}_\lambda^k$ наступним чином:

$$\mathscr{L}_\lambda^k = \left\{ f \in \mathscr{H} : |f|_{\mathscr{L}_\lambda^k} := \sup_{z \in \mathbb{D}} \frac{|f^{(k)}(z)|}{|\lambda^(k)(1-|z|)|} < \infty \right\}.$$

Для неперервної зростаючої функції $\lambda : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ такої, що $\lambda(0) = 0$ введемо наступні класи голоморфних функцій:

$$\mathrm{Lip}_\lambda(\mathbb{D}) = \left\{ f \in \mathscr{H} : \quad |f|_{\mathrm{Lip}_\lambda(\mathbb{D})} := \sup_{z_1, z_2 \in \mathbb{D}} \frac{|f(z_1) - f(z_2)|}{\lambda(|z_1 - z_2|)} < \infty \right\},$$

$$\mathscr{B}_\lambda^k = \left\{ f \in \mathscr{H} : \quad |f|_{\mathscr{B}_\lambda^k} := \sup_{z \in \mathbb{D}} \frac{(1-|z|)^k}{\lambda(1-|z|)} \cdot |f^{(k)}(z)| < \infty \right\}.$$

У випадку, якщо

$$\liminf_{t \to 0+} \left| \lambda^{(k)}(t) \right| > 0$$

та, відповідно,

$$\liminf_{t \to 0+} \frac{\lambda(t)}{t^k} > 0,$$

то класи $\mathscr{L}_\lambda^k$ і $\mathscr{B}_\lambda^k$ є не тривіальними, тобто складаються не лише з алгебраїчних многочленів степеня нижче k. Відмітимо, що означені класи голоморфних функцій розглядалися в роботі [2].

Аналогічно означимо наступні класи голоморфних функцій:

$$\mathscr{Z}_\lambda = \left\{ f \in \mathscr{H} : \quad |f|_{\mathscr{Z}_\lambda} := \sup_{z_1, z_2 \in \mathbb{D}} \frac{|f(z_1) - 2f(\frac{z_1+z_2}{2}) + f(z_2)|}{\lambda(|z_1 - z_2|)} < \infty \right\};$$

$$\mathscr{M}_\lambda^k = \left\{ f \in \mathscr{H} : \quad |f|_{\mathscr{M}_\lambda^k} := \sup_{z \in \mathbb{D}} \frac{|f^{(k)}(z)|(1-|z|)}{\lambda^{(k-1)}(1-|z|)} < \infty \right\}.$$

Розглядаються умови, які необхідно накласти на λ, щоб отримати вкладення або рівність для двох груп класів:

$$1) \ \mathscr{L}_\lambda^k, \ \mathrm{Lip}_\lambda(\mathbb{D}), \ \mathscr{B}_\lambda^k$$

$$2) \ \mathscr{M}_\lambda^k, \ \mathscr{Z}_\lambda, \ \mathscr{B}_\lambda^k.$$

1. Голузин Г. М. Геометрическая теория функций комплексного переменного (2-е изд.). – Москва: Наука, 1966. – 628 с.
2. Піддубний О. М., Савчук В. В. Мажоранти в теоремі типу Гарді-Літтлвуда для похідних вищих порядків аналітичних функцій // Збірник праць Ін-ту математики НАН України. – 2013. – **10**, № 1. – С. 184–198.

ПРО МОДУЛІ НЕПЕРЕРВНОСТІ ДРОБОВОГО ПОРЯДКУ, ПОРОДЖЕНІ ПІВГРУПОЮ ОПЕРАТОРІВ

С. І. Безкрила[1], О. Н. Нестеренко[2], А. В. Чайковський[2]
[1]Національний педагогічний університет імені М.П. Драгоманова, м. Київ
[2]Київський національний університет ім. Т.Г. Шевченка, м. Київ
sveti1988@gmail.com, NesterenkoON@ukr.net

Нехай X – лінійний простір, $\{T_h : h \geq 0\}$ – однопараметрична сім'я лінійних операторів $T_h : X \to X$, $h \geq 0$, яка утворює півгрупу, тобто $T_0 = I$ – одиничний оператор і $T_{h_1+h_2} = T_{h_1}T_{h_2}$ для довільних $h_1 \geq 0$ і $h_2 \geq 0$. Нехай також існує лінійна множина $Y \subset X$, на якій введено норму $\|\cdot\|$, причому для всіх $f \in X$ і $h \geq 0$ справедливе включення $(T_h - I) f \in Y$ і $\|T_h f - f\| \to 0$, $h \to 0$. Припустимо також, що для кожного $h \geq 0$ звуження оператора T_h на простір Y, яке ми позначимо $\tilde{T}_h$, є неперервним оператором і його норма $\left\|\tilde{T}_h\right\| \leq 1$.

Якщо $X = Y$ – банахів простір, то за наведених припущень півгрупа $\{T_h : h \geq 0\}$ називається стискуючою півгрупою класу (C_0). При цьому для числа $\alpha > 0$ функція

$$\omega_\alpha (f, t) := \sup_{h \in [0,t]} \|(I - T_h)^\alpha f\|, t \geq 0, \tag{1}$$

де $(I - T_h)^\alpha f := \sum\limits_{j=0}^{\infty} C_\alpha^j (-1) T_h^j f$ і $C_\alpha^0 := 1, C_\alpha^j := \frac{\alpha(\alpha-1)\cdot\ldots\cdot(\alpha-j+1)}{j!}, j \geq 1$, називається модулем неперервності елемента $f \in Y$ порядку $\alpha > 0$, породженим півгрупою $\{T_h : h \geq 0\}$.

За припущень першого абзацу, якщо $f \in X$, то елемент $g := (I - T_h) f \in Y$; при цьому для $\alpha > 1$ має місце рівність $(I - T_h)^\alpha g = (I - T_h)^{\alpha-1} (I - T_h) g$. Оскільки$\|T_h\| \leq 1$ і ряд $\sum\limits_{j=0}^{\infty} C_\alpha^j$ збігається абсолютно при $\alpha > 0$, то при $\alpha \geq 1$ і $f \in X$ елемент $(I - T_h)^\alpha f \in Y$ коректно визначений. Тому формула (1) визначає модуль неперервності порядку $\alpha \geq 1$ елемента $f \in X$, породжений півгрупою $\{T_h : h \geq 0\}$, і за припущень першого абзацу (коли, взагалі кажучи, $X \neq Y$).

Легко довести, що модулі неперервності $\omega = \omega_\alpha (f, \cdot)$ задовольняють умови: 1) $\omega (0) = 0$; 2) функція ω є неперервною на $[0, +\infty)$; 3) функція ω є неспадною на $[0, +\infty)$.

Теорема. *Нехай виконується одна з умов:* 1) $X = Y$ *– банахів простір,* $\{T_h : h \geq 0\}$ *– стискуюча півгрупа класу* (C_0), $\alpha \geq 3$*;* 2) *справедливі припущення, зроблені в першому абзаці даної роботи,* $\alpha \geq 4$. *Тоді для довільного числа* $\beta > \alpha - \frac{1}{2}$ *існує функція* $\omega : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$*, не тотожно рівна нулю, що задовольняє умови* 1)–3)*, така, що функція* $(0, +\infty) \in \delta \mapsto \omega (\delta) / \delta^\beta$ *є не зростаючою на* $(0, +\infty)$ *і при цьому ні для якого елемента* $f \in X$ *не виконується рівність*

$$\lim_{\delta \to 0+} \omega_\alpha (f, \delta) / \omega (\delta) = 1.$$

Ця теорема узагальнює результати робіт [3] (в якій $\alpha \in \mathbb{N}$, $\alpha \geq 2$, $\beta > \alpha - 1$), [2] і [1] (в яких розглядався випадок, коли X – простір рівномірно неперервних на осі функцій, T_h – оператор зсуву на h, $\alpha = 3$ та $\alpha = 2$ відповідно).

1. Конягин С. В. О вторых модулях непрерывности // Труды Матем. ин-та им. В.А. Стеклова. – 2010. – **269**. – С. 150–152.
2. Безкрила С. І., Нестеренко О. Н., Чайковський А. В. Про треті модулі неперервності // Укр. мат. журн. – 2014.– **66**, № 10. – С. 1420–1424.
3. Bezkryla S. I., Nesterenko O. N., Chaikovs'kyi A. V. On high orders moduli of continuity generated by semigroups of operators // Jaen J. Approx. — 2016 — **8**, No 2. — P. 183–190.

Про параболічні області збіжності гіллястих ланцюгових дробів спеціального вигляду

Д. І. Боднар[1], І. Б. Біланик[2]
[1]Тернопільський національний економічний університет, м. Тернопіль
[2]Тернопільський національний педагогічний університет
імені Володимира Гнатюка, м. Тернопіль
bodnar4755@ukr.net, i.bilanyk@ukr.net

Розглянемо гіллястий ланцюговий дріб (ГЛД) спеціального вигляду

$$\left(1+\mathop{\mathrm{D}}_{k=1}^{\infty}\sum_{i_k=1}^{i_{k-1}}\frac{a_{i(k)}}{1}\right)^{-1}=\left(1+\sum_{i_1=1}^{N}\frac{a_{i(1)}}{1+\sum\limits_{i_2=1}^{i_1}\frac{a_{i(2)}}{1+\ddots}}\right)^{-1}, \tag{1}$$

де $a_{i(k)}$ – комплексні числа, $i(k)\in\mathcal{I}$,

$$\mathcal{I}=\{i(k)=i_1i_2\ldots i_k\ :1\le i_k\le i_{k-1}\le\ldots\le i_0;\ k\ge 1;\ i_0=N\}.$$

Нехай

$$\mathcal{I}^{(m+1)}=\{i(n)=i_1i_2\ldots i_n\ :m+1\le i_n\le i_{n-1}\le\ldots\le i_0;\ n\ge 1;\ i_0=N\},m=\overline{1,N-1}.$$

Використовуючи багатовимірний аналог критерія Зейделя для ГЛД спеціального вигляду, техніку областей елементів та областей значень, теорему Стілтєса-Віталі, встановлено достатню ознаку збіжності ГЛД (1).

Теорема. *Нехай елементи дробу* (1) *належать параболічним областям* $\mathcal{P}_{i(k)}$, *тобто* $a_{i(k)}\in\mathcal{P}_{i(k)}, i(k)\in\mathcal{I}$, *де*

$$\mathcal{P}_{i(k)}(\gamma)=\mathcal{P}_{i_k}(\gamma)=\left\{z\in\mathbb{C}:|z|-Re\left(ze^{-2i\gamma}\right)<\frac{1-\varepsilon}{2i_{k-1}}cos^2\gamma\right\},$$

$a_{i(k)}\in\mathbb{C}$, ε – *довільне мале дійсне число* $(0<\varepsilon<1)$

Тоді:

1) існують скінченні границі парних і непарних підхідних дробів ГЛД (1);

2) ГЛД (1) *збігається якщо* $\sum\limits_{k=1}^{\infty}b_{m[k]}=\infty$, $\sum\limits_{k=1}^{\infty}b_{i(n)m[k]}=\infty$, *для кожного* m, $1\le m\le N$, *і кожного,* $i(n)$, $i(n)\in\mathcal{I}^{(m+1)}$, *де числа* $b_{i(k)}$ *однозначно визначаються із співвідношення* $b_{i(0)}=b_0=1$, $\left|a_{i(k)}\right|=\left(b_{i(k-1)}b_{i(k)}\right)^{-1}, i(k)\in\mathcal{I}$, а також $m[k]=\underbrace{mm...m}_{k}$;

3) областю значень цього дробу є круг

$$\mathcal{K}(\gamma)=\left\{z\in\mathbb{C}:\left|z-\frac{e^{-i\gamma}}{\cos\gamma}\right|\le\frac{1}{\cos\gamma}\right\}.$$

Наближення класів інтегралів Пуассона повторними операторами

В. І. Бодра, А. В. Стьопкін, Є. Ю. Сипчук
Київський національний університет технологій та дизайну, м. Київ
Донбаський державний педагогічний університет, м. Слов'янськ
bodrayaviktoriya@gmail.com

Позначимо через $C^q_{\beta,\infty}$, $q \in (0;1)$, $\beta \in \mathbb{R}$, клас неперервних 2π–періодичних функцій $f(x)$, які можна подати у вигляді згортки

$$f(x) = A_0 + \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} \varphi(x+t)P^q_\beta(t)\ dt,$$

де $P^q_\beta(t) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} q^k \cos(kt + \frac{\beta\pi}{2})$ – ядро Пуассона, а для функції $\varphi(x)$ виконана умова [1]

$$\text{esssup}|\varphi(x)| \leq 1.$$

Задача наближення класів інтегралів Пуассона лінійними операторами має багату історію, пов'язану з іменами С. М. Нікольського, С. Б. Стєчкіна, О. І. Степанця, А. С. Сердюка, В. І. Рукасова, С. О. Чайченка та інших.

Нехай $S_n(f;x)$ – суми Фур'є функції $f \in L$. Нехай, далі $\bar{p} = \{p_1, p_2, p_3, p_4\}$ – набір довільних натуральних чисел таких, що $\sum\limits_{k=1}^{4} p_k = n+3$. Функції $f \in L$ поставимо у відповідність послідовність тригонометрических поліномів

$$\sigma^{(4)}_{n,\bar{p}}(f;x) = \frac{1}{p_1}\sum_{k_1=n-p_1}^{n-1}\frac{1}{p_2}\sum_{k_2=k_1-p_2+1}^{k_1}\frac{1}{p_3}\sum_{k_3=k_2-p_3+1}^{k_2}\frac{1}{p_4}\sum_{k_4=k_3-p_4+1}^{k_3} S_{k_4}(f;x), \tag{1}$$

які будемо називати 4-повторними сумами Фейєра.

Нами вивчена асимптотична поведінка верхніх граней відхилень повторних сум Фейєра $\sigma^{(4)}_{n,\bar{p}}(f;x)$ на класах $C^q_{\beta,\infty}$ для $\beta = 1$, $q \in (0;1/4)$.

Теорема. *Нехай $q \in (0;1/4)$ Тоді для $n \to \infty$ має місце асимптотична формула*

$$\mathcal{E}(C^q_{1,\infty}, \sigma^{(4)}_{n,\bar{p}})_C := \sup_{f\in C^q_{1,\infty}} ||f - \sigma^{(4)}_{n,\bar{p}}(f)||_C = \frac{q[4+3q^2-q^4]}{\pi\prod_{i=1}^4 p_i(1-q^2)^4} + O(1)\frac{\sum_{i=1}^4 q^{p_i}}{\prod_{i=1}^4 p_i},$$

де $O(1)$ – величина, рівномірно обмежена відносно n та q.

1. Степанец А. И. Приближение аналитических непрерывных функций // Мат. сборник. – 2001. – **192**, № 1. – С. 113–138.

Середні поперечники класів функцій в $L_2(\mathbb{R})$

С. Б. Вакарчук, М. Б. Вакарчук
Університет імені Альфреда Нобеля, м. Дніпро
Дніпропетровський національний університет імені Олеся Гончара, м. Дніпро
sbvakarchuk@ukr.net, vacarchuk@yandex.ru

Нехай $L_2(\mathbb{R})$, $\mathbb{R} = \{x : -\infty < x < \infty\}$, є простір всіх вимірних функцій f, заданих на $\mathbb{R}$, квадрат модуля яких інтегрований за Лебегом на будь-якому скінченому проміжку, а норма визначається формулою $\|f\| = \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx \right\}^{1/2} < \infty$. Для довільної функції $f \in L_2(\mathbb{R})$ модуль неперервності m-го порядку визначають як

$$\omega_m(f,t) = \sup\{\|\Delta_h^m(f)\| : |h| \leqslant t\},\ t > 0,\ m \in \mathbb{N},$$

де скінчена різниця m-го порядку

$$\Delta_h^m(f,x) = \sum_{j=0}^{m} (-1)^{m-j} \binom{m}{j} f(x+jh)$$

означена майже всюди на $\mathbb{R}$. Під $L_2^r(\mathbb{R})$, $r \in \mathbb{N}$, розуміємо клас функцій $f \in L_2(\mathbb{R})$, у яких похідні $(r-1)$-го порядку $f^{(r-1)}$ $(f^{(0)} \equiv f)$ локально абсолютно неперервні, а похідні r-го порядку $f^{(r)}$ належать простору $L_2(\mathbb{R})$. Нехай $\mathbb{B}_{\sigma,2}$, $0 < \sigma < \infty$, є звуженням на $\mathbb{R}$ множини всіх цілих функцій експоненційного типу σ, що належать $L_2(\mathbb{R})$. Величина $A_\sigma(f) = \inf\{\|f-g\| : g \in \mathbb{B}_{\sigma,2}\}$ є найкращим наближенням функції $f \in L_2(\mathbb{R})$ елементами множини $\mathbb{B}_{\sigma,2}$; $A(\mathfrak{M}) = \sup\{A_\sigma(f) : f \in \mathfrak{M}\}$, де множина $\mathfrak{M} \subset L_2(\mathbb{R})$. Нехай $\Phi(t)$, $0 \leqslant t < \infty$, є неперервною зростаючою функцією (мажорантою), для якої $\Phi(0) = 0$; $W^r(\omega_m, \Phi)$ є клас функцій $f \in L_2^r(\mathbb{R})$, для похідних r-го порядку яких виконується умова $\omega_m(f^{(r)}, t) \leqslant \Phi(t)$, $0 < t$. Через $\overline{b}_\nu(\cdot)$, $\overline{d}_\nu(\cdot)$, $\overline{\delta}_\nu(\cdot)$, $0 < \nu < \infty$, позначимо середні бернштейнівський, колмогорівський та лінійний ν-поперечники. Має місце наступна теорема.

Теорема. *Нехай $\nu \in (0,\infty)$; $m, r \in \mathbb{N}$; мажоранта Φ задовольняє умову*

$$\inf\{\Phi(t)/\sin^m(\nu\pi t/2) : 0 < t \leqslant 1/\nu\} = \overline{\lim}\{\Phi(t)/\sin^m(\nu\pi t/2) : t \to 0+\}. \tag{1}$$

Тоді виконуються рівності

$$\overline{\Pi}_\nu(W^r(\omega_m,\Phi); L_2(\mathbb{R})) = A_{\nu\pi}(W^r(\omega_m,\Phi)) =$$

$$= 2^{-m}(\nu\pi)^{-r}\overline{\lim}\{\Phi(t)/\sin^m(\nu\pi t/2) : t \to 0+\}, \tag{2}$$

де $\overline{\Pi}_\nu(\cdot)$ – будь-який з середніх ν-поперечників: $\overline{b}_\nu(\cdot)$, $\overline{d}_\nu(\cdot)$ або $\overline{\delta}_\nu(\cdot)$.

Якщо, наприклад, $\Phi_*(t) = t^m$, то умова (1) виконується, а (2) приймає вигляд

$$\overline{\Pi}_\nu(W^r(\omega_m,\Phi_*); L_2(\mathbb{R})) = A_{\nu\pi}(W^r(\omega_m,\Phi_*)) = (\nu\pi)^{-r-m}.$$

Наведену теорему можна розглядати, як певне розвинення одного результату Ю. І. Григоряна [1] на випадок наближення функцій в $L_2(\mathbb{R})$.

1. Григорян Ю. И. Поперечники некоторых множеств в функциональных пространствах // Успехи матем. наук. – 1975. – **30**, № 3. – С. 161–162.

Теореми існування багатовимірних узагальнених моментних зображень

Г. М. Веселовська[1], А. П. Голуб[2]
[1,2] Інститут математики НАН України, м. Київ
[1]*anaweseka@gmail.com*, [2]*apholub@gmail.com*

Поняття узагальнених моментних зображень, запропоноване В. К. Дзядиком у 1981-му році [1], у роботі [2] було поширене на випадок d-вимірних числових послідовностей ($d \geq 2$).

Означення. Узагальненим моментним зображенням d-вимірної числової послідовності $\{s_{\mathbf{k}}\}_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}_+^d}$ на добутку лінійних просторів $\mathcal{X} \times \mathcal{Y}$ називається сукупність рівностей

$$s_{\mathbf{k}+\mathbf{j}} = \langle x_{\mathbf{k}}, y_{\mathbf{j}} \rangle, \quad \mathbf{k}, \mathbf{j} \in \mathbb{Z}_+^d, \tag{1}$$

де $\{x_{\mathbf{k}}\}_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}_+^d} \subset \mathcal{X}$, $\{y_{\mathbf{j}}\}_{\mathbf{j}\in\mathbb{Z}_+^d} \subset \mathcal{Y}$, а $\langle \cdot, \cdot \rangle$ – білінійна форма на $\mathcal{X} \times \mathcal{Y}$.

Встановлено деякі теореми існування зображення вигляду (1).

Як і в одновимірному випадку, у випадку більших розмірностей задача про узагальнені моментні зображення може бути сформульована в термінах лінійних операторів. Тоді зображення вигляду (1) буде еквівалентним зображенню

$$s_{\mathbf{k}} = \langle A_1^{k_1} A_2^{k_2} ... A_d^{k_d} x_{\mathbf{0}}, y_{\mathbf{0}} \rangle, \quad \mathbf{k} \in \mathbb{Z}_+^d,$$

де $A_j : \mathcal{X} \to \mathcal{X}$, $j = \overline{1, d}$, – лінійні оператори, що комутують між собою.

Якщо простори $\mathcal{X}$, $\mathcal{Y}$ – банахові, білінійна форма $\langle \cdot, \cdot \rangle$ – роздільнонеперервна, а оператори A_j, $j = \overline{1, d}$, – обмежені, то ряд

$$\sum_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}_+^d} s_{\mathbf{k}} \mathbf{z}^{\mathbf{k}} = \sum_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}_+^d} s_{\mathbf{k}} z_1^{k_1} z_2^{k_2} ... z_d^{k_d}$$

буде збіжним в околі початку координат до аналітичної функції f від d змінних вигляду

$$f(\mathbf{z}) = \langle \mathcal{R}_{z_1}(A_1) \mathcal{R}_{z_2}(A_2) ... \mathcal{R}_{z_d}(A_d) x_0, y_0 \rangle.$$

Отримано наступний результат.

Теорема. *Для довільної функції f, аналітичної в полікрузі $K_{\mathbf{R}} = K_{R_1} \times K_{R_2} \times ... \times K_{R_d}$, $0 < R_j < \infty$, $j = \overline{1, d}$, і довільного нескінченновимірного сепарабельного гільбертового простору $\mathcal{H}$ існують елементи $x_0, y_0 \in \mathcal{H}$ та лінійні обмежені оператори $A_j : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$, що комутують між собою, норми яких $\|A_j\| < \frac{1}{R_j}$, $j = \overline{1, d}$, і такі, що $\forall \mathbf{z} \in K_{\mathbf{R}}$*

$$f(\mathbf{z}) = \langle \mathcal{R}_{z_1}(A_1) \mathcal{R}_{z_2}(A_2) ... \mathcal{R}_{z_d}(A_d) x_0, y_0 \rangle.$$

Цей результат поширено також на клас цілих функцій, при цьому оператори $A_j : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$, $j = \overline{1, d}$, матимуть нульові спектральні радіуси.

1. Дзядик В. К. Про узагальнення проблеми моментів // Доп. АН УРСР. – 1981. – № 6. – С. 8–12.
2. Голуб А. П., Чернецька Л. О. Багатовимірні узагальнені моментні зображення та апроксимації Паде для функцій багатьох змінних // Укр. мат. журн. – 2014. – **66**, № 9. – С. 1166–1174.

Нерівності типу Бернштейна–Нікольського для тригонометричних поліномів з довільним вибором гармонік

Г. М. Власик
Інститут математики НАН України, м. Київ
annawlasik@gmail.com

Нехай $L_q, 1 \le q \le \infty$, – простір вимірних 2π–періодичних функцій f зі стандартною нормою. Для функції $f \in L_1$ розглянемо її ряд Фур'є

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} \hat{f}(k)e^{ikx},$$

де $\hat{f}(k) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-ikx}dx$ – коефіцієнти Фур'є функції f. Скрізь нижче будемо вважати, що для $f \in L_1$ виконується умова $\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = 0$.

Далі, нехай $\psi(\tau) \ne 0, \tau \in \mathbb{N}$, – довільна функція натурального аргументу, β – довільне фіксоване дійсне число. Якщо ряд

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} \frac{\hat{f}(k)}{\psi(|k|)} e^{i(kx+\beta\frac{\pi}{2}\operatorname{sign}k)}$$

є рядом Фур'є деякої сумовної функції, то наслідуючи О. І. Степанця [1, с. 25], її назвемо (ψ,β)–похідною функції f і позначимо f^{ψ}_{β}. Зауважимо, що якщо $\psi(|k|) = |k|^{-r},\ r > 0$, $k \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}$, то (ψ,β)–похідна функції f співпадає з її (r,β)–похідною (позначення f^{r}_{β}) в сенсі Вейля–Надя.

Для ψ – додатних і незростаючих та $\beta \in \mathbb{R}$ покладемо

$$\mathcal{T}_m(\psi,\beta,q,p) = \inf_{K_m} \sup_{t\in T(K_m)} \frac{\|t^{\psi}_{\beta}\|_q}{\|t\|_p}, \quad 1 \le p,q \le \infty,$$

де $T(K_m) = \left\{t : t(x) = \sum\limits_{j\in K_m} c_j e^{ijx}\right\}$, а $K_m = \{j_1, ..., j_m\}$ – довільний набір із m різних цілих чисел.

Позначимо через Ψ множину додатних і незростаючих послідовностей $\psi(\tau)$, $\tau \in \mathbb{N}$, таких, що $\frac{\psi(\tau)}{\psi(2\tau)} \le C$, де C – деяка абсолютна стала.

Справедливе твердження.

Теорема. *Нехай $1 < p < \infty$, $\psi(\tau)$, $\tau \in \mathbb{N}$, – додатна і незростаюча послідовність, $\beta \in \mathbb{R}$. Тоді має місце співвідношення*

$$\mathcal{T}_m(\psi,\beta,\infty,p) \ll \psi^{-1}(m)m^{1/p^*}.$$

Якщо ж $\psi(\tau) \in \Psi$, $\tau \in \mathbb{N}$, і, крім того, існує таке $\varepsilon > 0$, що послідовність $\psi(\tau)\tau^{\varepsilon}$ не зростає, то

$$\mathcal{T}_m(\psi,\beta,\infty,p) \asymp \psi^{-1}(m)m^{1/p^*},$$

де $p^* = \max\{2,p\}$.

1. Степанец А. И. Классификация и приближения периодических функцій. – Киев: Наукова думка, 1987. – 268 с.

Наближення класів періодичних функцій високої гладкості поліномами спеціального виду

В. А. Войтович
Інститут математики НАН України, м. Київ
viktorvjtovich@gmail.com

Через $C^{\psi}_{\beta}H_{\omega}$ позначимо множину 2π–періодичних функцій

$$C^{\psi}_{\beta}H_{\omega} = \left\{ f(x) = \frac{a_0}{2} + \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} \varphi(x+t)\Psi(t)dt, \quad a_0 \in \mathbb{R}, \quad \omega(\varphi,t) \le \omega(t), \quad \varphi \perp 1 \right\},$$

де $\Psi(t) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \psi(k)\cos\left(kt + \frac{\beta_k \pi}{2}\right)$, $\psi(k), \beta_k \in \mathbb{R}$ – довільні послідовності дійсних чисел, $\omega(\varphi;t)$ – модуль неперервності функції φ в просторі C, а $\omega(t)$ – фіксований модуль неперервності.

Через $\mathcal{D}_0$ позначимо множину послідовностей $\psi(k) > 0$, $k \in \mathbb{N}$, для яких виконується умова $\lim\limits_{k\to\infty} \frac{\psi(k+1)}{\psi(k)} = 0$.

Нехай f – неперервна 2π–періодична функція. Розглянемо рівномірне розбиття відрізка $[-\pi,\pi]$ системою точок $x_i = \frac{2\pi i}{N}$, де $i = 0,1,\ldots,N-1$, де N – довільне натуральне число.

Через $T^N_{n-1}(f;x)$ позначимо тригонометричний поліном порядку не вище $n-1$ який, серед усіх тригонометричних поліномів $T_{n-1}(x)$ порядку не вище $n-1$, мінімізує суму $\sum\limits_{i=1}^{N} |f(x_i) - T_{n-1}(x_i)|^2$ при $N \ge 2n-1$.

Розглядається задача про відшукання асимптотичних рівностей для величин

$$\mathcal{E}(C^{\psi}_{\beta}H_{\omega}; T^N_{n-1}; x) = \sup_{f \in C^{\psi}_{\beta,s}} |f(x) - T^N_{n-1}(f;x)|,$$

коли $\psi \in \mathcal{D}_0$, $\beta \in \mathbb{R}$.

Теорема. *Нехай $\psi \in \mathcal{D}_0$, $\beta_k \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}$, $n, N \in \mathbb{N}$, $N > 2n-1$ і $\omega(t)$ – довільний модуль неперервності. Тоді для довільного $x \in \mathbb{R}$ при $n \to \infty$ виконуються рівності*

$$\mathcal{E}(C^{\psi}_{\beta}H_{\omega}; T^N_{n-1}; x) = \frac{2\theta_{\omega}}{\pi}\psi(n)\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \omega\left(\frac{2t}{n}\right)\sin t dt + O(1)\omega\left(\frac{1}{n}\right)\sum_{k=n+1}^{\infty}\psi(k),$$

де $O(1)$ – величина рівномірно обмежена відносно всіх розглядуваних параметрів.

Умови збіжності рядів Фабера всередині області

М. В. Гаєвський[1], **Н. М. Задерей**[2]
[1]Кіровоградський державний педагогічний університет
імені Володимира Винниченка, м. Кропивницький
[2]Національний технічний університет України "КПІ імені Ігоря Сікорського" , м. Київ
mgaevskij@gmail.com

Нехай G – однозв'язна область в комплексній площині $\mathbb{C}$, межею якої є замкнена жорданова крива Γ. Внаслідок теореми Рімана існує єдине відображення $w = \Phi(z)$, що конформно та однолистно відображає зовнішність області G на зовнішність одиничного круга $\mathbb{D} = \{w \in \mathbb{C} : |w| < 1\}$ при умовах $\Phi(\infty) = \infty, \Phi'(z) = \gamma > 0$. Обернене до $w = \Phi(z)$ відображення позначимо $z = \Psi(w)$, а многочлени Фабера для області Ω будемо позначати через $F_\nu(z)$, $\nu = 0, 1, 2, \ldots$ [1].

Для області G систему поліномів Фабера можна означити як коефіцієнти розкладу у ряд Лорана в околі точки $w = \infty$ функції $K(z, w) = \frac{\Psi'(w)}{\Psi(w)-z} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{F_n(z)}{w^{k+1}},\ z \in G$.

Нехай, далі, $H_\infty(G)$ – множина аналітичних в області G функцій f з нормою $\|f\|_\infty = \sup_{z\in G} |f(z)|$, через $L_\infty(\Gamma)$ та $L(\Gamma)$ позначимо простори відповідно істотно обмежених та сумовних на Γ функцій із нормами $\|f\|_{L_\infty(\Gamma)} = \operatorname{ess\,sup}_{z\in\Gamma} |f(z)|$ та $\|f\|_{L(\Gamma)} = \frac{1}{|\Gamma|} \int_\Gamma |f(z)||dz|$, де $|\Gamma|$ – довжина кривої Γ.

Коефіцієнти Фабера функції $f \in H_\infty(G)$ обчислюються за формулами

$$a_\nu(f) = a_\nu = \frac{1}{2\pi i} \int_{|w|=1} \frac{f(\Psi(w))}{w^{n+1}} dw = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f(\zeta)\Phi'(\zeta)}{\Phi^{n+1}(\zeta)} d\zeta,$$

де $\Phi'(z)$ має майже скрізь на Γ кутові граничні значення, які утворюють функцію, інтегровну на Γ, а ряд $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu F_\nu(z)$ є рядом Фабера функції $f \in H_\infty(G)$.

На множині функцій $f \in H_\infty(D)$ задамо оператор Фабера T_G, що діє за правилом

$$T_G(f)(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathbb{T}} f(w) \frac{\Psi'(w)}{\Psi(w) - z} dw,\ z \in G,\ \mathbb{T} = \{w \in \mathbb{C} : |w| = 1\}.$$

Область G називають областю Фабера [2], якщо для норми оператора виконується співвідношення: $\|T_G\| = \sup\limits_{f\in H_\infty(D),\ \|f\|_\infty \le 1} \|T_G(f)(z)\| < \infty$.

Розглянемо в області G інтеграл типу Коші $Kf(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta, z \in G$ із щільністю $f \in L_\infty(\Gamma)$. Справедливе наступне твердження, що доповнює теорему 1 (див. [1, с. 108]):

Теорема. *Якщо G – фаберова область, що обмежена спрямлюваною жордановою кривою Γ, $f \in L_\infty(\Gamma)$ та $K(z, w) = \frac{\Psi'(w)}{\Psi(w)-z} \in L(\mathbb{T})$ для $z \in G$, а також для довільного $n \in \mathbb{N}$ $\sum_{k=1}^{n} a_k = o(n)$, де $a_k = \frac{1}{2\pi i} \int_{|w|=1} \frac{f(\Psi(w))}{w^{k+1}} dw$, тоді функцію $Kf(z)$ можна розкласти в ряд Фабера, що рівномірно збіжний в області G.*

1. Суетин П. К. Ряды по многочленам Фабера. – Москва: Наука, 1984. – 336 с.
2. Савчук В. В. Області Фабера і задача О. І. Степанця // Теорія наближення та суміжні питання: Праці Ін-ту математики НАН України. – 2002. – **35**. – С. 151-163.

Неявне лінійне різницеве рівняння 1-го порядку: від цілих p-адичних чисел до індуктивних границь просторів Фреше

Сергій Гефтер, Анна Гончарук, Олексій Півень
Харківський національний університет імені В. Н. Каразіна, м. Харків
gefter@karazin.ua

Нехай A – неперервний лінійний оператор, що діє у топологічному векторному просторі. Вивчається наступне неявне лінійне неоднорідне різницеве рівнянння

$$Ax_{n+1} + g_n = x_n, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Розглядається декілька ситуацій, коли це рівняння має єдиний розв'язок вигляду

$$x_n = \sum_{k=0}^{\infty} A^k g_{n+k}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

ЗАДАЧА НАЙКРАЩОЇ У РОЗУМІННІ ЗВАЖЕНОЇ ХАУСДОРФОВОЇ ВІДСТАНІ РІВНОМІРНОЇ АПРОКСИМАЦІЇ У МНОЖИНІ НЕПЕРЕРВНИХ ВІДОБРАЖЕНЬ З КОМПАКТНИМИ ОПУКЛИМИ ОБРАЗАМИ

В. О. Гнатюк, У. В. Гудима
Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка,
м. Кам'янець-Подільський
g-ul@yandex.ru

Нехай S – компакт, X – лінійний над полем комплексних (дійсних) чисел нормований простір, $K_0(X)$ – сукупність непорожніх опуклих компактів простору X,

$$H(A,B) = \max\left\{\max_{x\in A}\min_{y\in B}\|x-y\|, \max_{y\in B}\min_{x\in A}\|x-y\|\right\}$$

– хаусдорфова відстань між множинами A, B із $K_0(X)$, $C(S,K_0(X))$– множина неперервних на S відносно метрики Хаусдорфа на $K_0(X)$ багатозначних відображень S в $K_0(X)$, ω – додатна неперервна на S функція (вагова функція).

Задачею найкращої у розумінні зваженої хаусдорфової відстані рівномірної апроксимації відображення $a \in C(S,K_o(X))$ множиною $V \subset C(S,K_0(X))$ будемо називати задачу відшукання величини

$$\alpha^*_\omega(a,V) = \inf_{g\in V}\max_{s\in S}(\omega(s)H(g(s),a(s))). \tag{1}$$

Якщо існує елемент $g^* \in V$ такий, що

$$\alpha^*_\omega(a,V) = \max_{s\in S}(\omega(s)H(g^*(s),a(s))),$$

то його будемо називати екстремальним елементом для величини (1).

У роботі встановлено необхідні, достатні умови і критерії екстремальності елемента для величини (1). Отримано низку допоміжних результатів, які також становлять самостійний інтерес. Зокрема, доведено таке твердження.

Теорема. *Нехай $g^* \in V$ і V є Γ^*–множиною відносно точки g^* (зокрема зірковою відносно g^* або опуклою множиною). Для того щоб елемент g^* був екстремальним елементом для величини* (1), *необхідно і достатньо, щоб для кожного $g \in V$ існували елементи $s_g \in S$, $f_g \in B^*$, для яких виконуються умови*

$$\max_{s\in S}(\omega(s)H(g^*(s),a(s))) = \omega(s_g)H(g^*(s_g),a(s_g)) =$$

$$= \omega(s_g)\max_{f\in B^*}\left|\max_{x\in g^*(s_g)}\mathrm{Re}f(x) - \max_{y\in a(s_g)}\mathrm{Re}f(y)\right| =$$

$$= \omega(s_g)\left|\max_{x\in g^*(s_g)}\mathrm{Re}f_g(x) - \max_{y\in a(s_g)}\mathrm{Re}f_g(y)\right|,$$

$$\mathrm{sign}\left(\max_{x\in g^*(s_g)}\mathrm{Re}f_g(x) - \max_{y\in a(s_g)}\mathrm{Re}f_g(y)\right)\left(\max_{x\in g(s_g)}\mathrm{Re}f_g(x) - \max_{y\in g^*(s_g)}\mathrm{Re}f_g(y)\right) \geq 0,$$

де $B^* = \{f : f \in X^*, \|f\| \leq 1\}$.

Наближення функцій з класів $W^r_\beta H^\alpha$ інтегралами Вейєрштрасса

У. З. Грабова, І. В. Кальчук, Т. А. Степанюк
Національний університет водного господарства та природокористування, м. Рівне
Східноєвропейський національний університет імені Лесі Українки, м. Луцьк
grabova_u@ukr.net

Нехай L – простір 2π-періодичних сумовних на періоді функцій, в якому норма задається за допомогою рівності $\|f\|_L = \int\limits_{-\pi}^{\pi} |f(t)|dt$; C – простір 2π-періодичних неперервних функцій з нормою $\|f\|_C = \max\limits_t |f(t)|$. Розглядається клас $W^r_\beta H^\alpha$, $r > 0$, $\beta \in \mathbb{R}$, – (r,β)–диференційовних функцій f в розумінні Вейля–Надя, таких, що їх (r,β)–похідні f^r_β задовольняють умову Ліпшиця порядку α, тобто

$$|f^r_\beta(x+h) - f^r_\beta(x)| \le |h|^\alpha, \quad 0 < \alpha \le 1, \ 0 \le h \le 2\pi, \ x \in \mathbb{R}.$$

Нехай $f \in L$. Величину $W_\delta(f;x) := \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t+x)\Big\{\frac{1}{2} + \sum\limits_{k=1}^{\infty} e^{-\frac{k^2}{\delta}} \cos kt\Big\}dt$, $\delta > 0$ називають інтегралом Вейєрштрасса функції f (див., наприклад, [1]).

Дана робота присвячена вивченню асимптотичної поведінки при $\delta \to \infty$ величини

$$\mathcal{E}(W^r_\beta H^\alpha; W_\delta)_C = \sup_{f \in W^r_\beta H^\alpha} \|f(x) - W_\delta(f;x)\|_C.$$

Згідно з О. І. Степанцем [2, с. 198] задачу про відшукання асимптотичних рівностей для даної величини називатимемо задачею Колмогорова–Нікольського для методу Вейєрштрасса на класі $W^r_\beta H^\alpha$ в рівномірній метриці.

Теорема. Нехай $r > 0$, $0 \le \alpha < 1$, $r + \alpha \le 2$ і $\beta \in \mathbb{R}$. Тоді при $\delta \to \infty$ має місце співвідношення

$$\mathcal{E}(W^r_\beta H^\alpha; W_\delta)_C = \frac{\gamma(\alpha)}{\delta^{\frac{r+\alpha}{2}}} A(\alpha,\tau) + O\left(\frac{1}{\delta^{\frac{1+r}{2}}} + \frac{1}{\delta}\right),$$

$$2^{\alpha-1} \le \gamma(\alpha) \le 1,$$

де величина $A(\alpha,\tau)$ означена співвідношенням

$$A(\alpha,\tau) = A(\alpha,\beta,\tau) := \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} |t|^\alpha \left| \int\limits_0^\infty \tau(u)\cos\Big(ut + \frac{\beta\pi}{2}\Big)du \right| dt$$

і для неї справедлива оцінка

$$A(\alpha,\tau) = \begin{cases} O(1), & r+\alpha < 2, \\ O(\ln\delta), & r+\alpha = 2. \end{cases}$$

1. Кальчук І. В., Харкевич Ю. І. Наближення (ψ,β)-диференційовних функцій інтегралами Вейєрштрасса // Укр. мат. журн. – 2007. – **59**, № 7. – С. 953–978.
2. Степанец А. И. Методы теории приближений: В 2 ч. – Киев: Ин–т математики НАН Украины, 2002. – Ч.1. – 427 с. (Труды Ин–та математики НАН Украины; Т. 40).

Задача найкращого рівномірного відновлення функціональної залежності, заданої неточно, множиною неперервних однозначних відображень з додатковим обмеженням, що задається системою замкнених куль

У.В. Гудима

Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка,
м. Кам'янець-Подільський
g-ul@yandex.ru

Нехай S – компакт, X – лінійний над полем комплексних (дійсних) чисел нормований простір, X^* – простір, спряжений з X, $C(S,X)$ – лінійний над полем дійсних чисел простір однозначних відображень g компакта S в X, неперервних на S, з нормою $\|g\| = \max\limits_{s\in S}\|g(s)\|$, $K(X)$ – сукупність всіх непорожніх компактів простору X, $C(S,K(X))$ – множина неперервних на S відносно метрики Хаусдорфа на $K(X)$ багатозначних відображень S в $K(X)$, ω– додатна неперервна на S функція (вагова функція),$V \subseteq C(S,X)$, $u \in C(S,X)$, $r \in C(S,R)$, $r(s) > 0$, $s \in S$, $D = \{g : g \in C(S,X), \|g(s) - u(s)\| \le r(s), s \in S\}$, існує елемент $g_0 \in V$, для якого $\|g_0(s) - u(s)\| < r(s)$ для всіх $s \in S$.

Задачею найкращого у розумінні зваженої хаусдорфової відстані рівномірного відновлення функціональної залежності, заданої неточно за допомогою відображення $a \in C(S,K(X))$, елементами g множини V, які задовольняють додатковому обмеженню $g \in D$, будемо називати задачу відшукання величини

$$\alpha^*_\omega(a, V\cap D) = \inf_{g\in V\cap D}\max_{s\in S}\Big(\omega(s)\max_{y\in a(s)}\|g(s) - a(s)\|\Big). \tag{1}$$

Якщо існує елемент $g^* \in V\bigcap D$ такий, що

$$\alpha^*_\omega(a, V\cap D) = \max_{s\in S}\Big(\omega(s)\max_{y\in a(s)}\|g^*(s) - a(s)\|\Big),$$

то його будемо називати екстремальним елементом для величини (1).

Встановлено необхідні, достатні умови і критерії екстремальності елемента для величини (1); отримані результати конкретизовано на випадок, коли V є чебишовським підпростором; узагальнено на випадок задачі відшукання величини (1) теорему Чебишова про альтернанс. Зокрема, доведено таке твердження.

Теорема. *Нехай V є опуклою множиною. Для того щоб елемент $g^* \in V\bigcap D$ був екстремальним елементом для величини* (1), *необхідно і достатньо, щоб для кожного елемента $g \in V$ існували елементи $s_g \in S$, $y_g \in a(s_g)$, $f_g \in E(B^*)$, для яких виконуються умови*

$$\max_{s\in S}\Big(\omega(s)\max_{y\in a(s)}\|g^*(s) - y\|\Big) = \omega(s_g) f_g(g^*(s_g) - y_g),$$

$$\mathrm{Re} f_g(g(s_g) - g^*(s_g)) \ge 0,$$

або існували елементи $s'_g \in S$, $f'_g \in E(B^*)$ такі, що

$$\|g^*(s'_g) - u(s'_g)\| = f'_g(g^*(s'_g) - u(s'_g)) = r(s'_g),$$

$$\mathrm{Re} f'_g(g(s'_g) - g^*(s'_g)) \ge 0,$$

де $B^* = \{f : f \in X^*, \|f\| \le 1\}$, $E(B^*)$ – множина крайніх точок B^*.

Про оптимальне відновлення n-лінійних функціоналів за линійною інформацією

М. С. Гунько, О. О. Руденко

Дніпропетровський національний університет імені Олеся Гончара, м. Дніпро

mgunko@yandex.ua, aa-rudenko@yandex.ua

Будемо вивчати задачу оптимізації наближеного обчислення n-лінійних функціоналів у наступній постановці. Нехай X – лінійний нормований простір над полем $\mathbb{C}$ комплексних чисел, $M_1, ..., M_n \subset X$ центрально-симметричні множини. Припустимо, що на декартовому добутку лінійних оболонок $\mathrm{span}(M_j)$ множин M_j задано n-лінійний функціонал

$$\Omega : \prod_{j=1}^{n} \mathrm{span}(M_j) \to \mathbb{C}$$

і для кожного $j = 1, ..., n$ на множині $\mathrm{span}(M_j)$ задано набір $T_j = (T_{j,1}, ..., T_{j,m_j})$ лінійних неперервних функціоналів $T_{j,l} : \mathrm{span}(M_j) \to \mathbb{C}, j = 1, ..., n, l = 1, ..., m_j$. Вектори $T_j(x_j) = (T_{j,1}(x_j), ..., T_{j,m_j}(x_j)),\ x_j \in M_j,\ j = 1, ..., n$ будемо називати лінійною інформацією про x_1, x_2,..., x_n типу $(m_1, ..., m_n)$ (або $(m_1, ..., m_n)$-інформацією). Довільну числову функцію F від $m_1+...+m_n$ змінних будемо називати методом відновлення функціонала Ω за інформацією $T_1(x_1), ..., T_n(x_n)$. Покладемо

$$R_{m_1,...,m_n}(W^{g_1}, ..., W^{g_n}) = \inf_{T_1,...,T_n} \inf_{F} \sup_{x_1 \in W^{g^1}, ..., x_n \in W^{g^n}} |\Omega(x_1, ..., x_n) - F(T_1(x_1), ..., T_n(x_n))|.$$

Величина $R_{m_1,...,m_n}(W^{g_1}, ..., W^{g_n})$ – це похибка оптимального методу відновлення функціонала Ω на класах $W^{g_1}, ..., W^{g_n}$ за оптимальною $(m_1, ..., m_n)$-інформацією.

Один з основних результатів роботи міститься в наступній теоремі.

Теорема 1. *Нехай задано n-лінійний функціонал Ω, $Q = 1, 2, ..., n$, $N{=}N(V_u, Q){-}1{\in}\mathbb{N}$, $u \in \mathbb{N}$. Нехай також $p_j \geq 1$ та $\sum\limits_{j=1}^{n} \frac{1}{p_j} = 1$, тоді*

$$R_{m_1,...,m_n}(W^{g^1}_{p_1}, ..., W^{g^n}_{p_n}) = \max_{(q_j(1),q_j(2),...,q_j(n)) \notin V_u} \frac{|f(e_{q_j(1)}, e_{q_j(2)}, ..., e_{q_j(n)})|}{\prod\limits_{s=1}^{n} |g^s_{q_j(s)}|^{1/p_s}} =$$

$$= \frac{|f(e_{q_{u+1}(1)}, e_{q_{u+1}(2)}, ..., e_{q_{u+1}(n)})|}{\prod\limits_{s=1}^{n} |g^s_{q_{u+1}(s)}|^{1/p_s}}.$$

При цьому інформація про елементи $x_j \in W^{g^j}_{p_j}$, $j = 1, ..., n$ виду

$$\widetilde{T}_j(x_j) = ((x_j, e_{q_1(j)}), ..., (x_j, e_{q_u(j)})) = (\hat{x}_{j,q_1(j)}, ..., \hat{x}_{j,q_u(j)})$$

і метод

$$\widetilde{F}(\hat{x}_{1,q_1(1)}, ..., \hat{x}_{1,q_u(1)}, ..., \hat{x}_{n,q_1(n)} ..., \hat{x}_{n,q_u(n)}) = \sum_{k=1}^{u} |f(e_{q_k(1)}, e_{q_k(2)}, ..., e_{q_k(n)})|\ \hat{x}_{q_k(1)} ... \hat{x}_{q_k(n)}$$

її використання будуть оптимальними.

Автори дякують В. Ф. Бабенку за постановку задач, безпосередню участь в отриманні результатів та постійну підтримку.

1. Бабенко В. Ф. О приближенном вычислении скалярных произведений // Укр. мат. журн. – 1988. – **40**, № 1. – С. 15–21.

Задача про тінь для сім'ї куль сталого радіуса

Хайджаа Дакхіл
Київський національний університет імені Т. Г. Шевченка, м. Київ
moonm5385@gmail.com

Розглянемо в тривимірному евклідовому просторі $\mathbb{R}^3$ задачу про тінь для куль однакового радіуса.

Задача. Яке мінімальне число попарно неперетинних замкнутих (відкритих) куль однакового радіуса в тривимірному евклідовому просторі $\mathbb{R}^3$ необхідно й достатньо, щоб довільна пряма, що проходить через фіксовану точку простору, перетинала хоча б одну з цих куль?

Теорема 1. *Довільний набір із трьох попарно неперетинних відкритих куль однакового радіуса в просторі $\mathbb{R}^3$ утворює слабко 1-опуклу множину.*

Теорема 2. *Довільний набір із трьох попарно неперетинних відкритих куль однакового радіуса в просторі $\mathbb{R}^3$ утворює 1-опуклу множину.*

Теорема 3. *Чотири попарно неперетинні замкнуті (відкриті) кулі однакового радіуса в просторі $\mathbb{R}^3$ необхідно і достатньо для створення тіні в фіксованій точці.*

Теорема 4. *Для того, щоб точка в тривимірному евклідовому просторі належала 1-півопуклій оболонці сім'ї відкритих (замкнутих) куль однакового радіуса достатньо восьми куль.*

Питання мінімальності знайденої кількості куль залишається відкритим.

1. Зелинский Ю. Б., Выговская И. Ю., Стефанчук М. В. Обобщенно выпуклые множества и задача о тени // Укр. мат. журн. – 2015. – **67**, № 12. – С. 1659–1666.
2. Зелинский Ю. Б., Стефанчук М. В. Узагальнення задачі про тінь // Укр. мат. журн. – 2016. – **68**, № 6. – С. 657–662.
3. Зелинский Ю. Б. Обобщенно выпуклые оболочки множеств и задача о тени // Укр. мат. вісник. – 2015. – **12**, № 2. – С. 278–289.
4. Зелинский Ю. Б., Дакхил Х. К. Задача о тени для шаров фиксированного радиуса // Укр. мат. вісник. – 2016. – **13**, № 4. – С. 599–603.

Про приєднаний багатовимірний дріб з нерівнозначними змінними

Роман Дмитришин
Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника, м. Івано-Франківськ
dmytryshynr@hotmail.com

Розглядається приєднаний багатовимірний дріб з нерівнозначними змінними

$$1+\sum_{i_1=1}^{N}\frac{a_{i(1)}z_{i_1}}{1+b_{i(1)}z_{i_1}}+\sum_{i_2=1}^{i_1}\frac{(-1)^{\delta_{i_1,i_2}}a_{i(2)}z_{i_1}z_{i_2}}{1+b_{i(2)}z_{i_2}}+\sum_{i_3=1}^{i_1}\frac{(-1)^{\delta_{i_2,i_3}}a_{i(3)}z_{i_2}z_{i_3}}{1+b_{i(3)}z_{i_3}}+\ldots, \tag{1}$$

де $a_{i(k)}$, $b_{i(k)}$, $i(k)\in\mathcal{I}_k$, $k\geq 1$, – комплексні числа,

$$\mathcal{I}_k=\{i(k):\ i(k)=i_1,i_2,\ldots,i_k,\ 1\leq i_p\leq i_{p-1},\ 1\leq p\leq k,\ i_0=N\},$$

$a_{i(k)}\neq 0$ для всіх $i(k)\in\mathcal{I}_k$, $k\geq 1$, $\delta_{i,j}$ – символ Кронекера, $\mathbf{z}=(z_1,z_2,\ldots,z_N)\in\mathbb{C}^N$.

Доведено існування єдиного формального кратного степеневого ряду

$$L(\mathbf{z})=\sum_{|m(N)|\geq 0}c_{m(N)}\mathbf{z}^{m(N)}, \tag{2}$$

де $c_{m(N)}$, $m(N)\in\mathcal{M}^N$, – комплексні числа,

$$\mathcal{M}^N=\{m(N):\ m(N)=m_1,m_2,\ldots,m_N,\ m_p\in\mathbb{Z}_+,\ 1\leq p\leq N\},$$

$|m(N)|=m_1+m_2+\cdots+m_N$, $0(N)=0,0,\ldots,0$, $c_{0(N)}=1$, $\mathbf{z}^{m(N)}=z_1^{m_1}z_2^{m_2}\cdot\ldots\cdot z_N^{m_N}$, $\mathbf{z}\in\mathbb{C}^N$, відповідного приєднаному багатовимірному дробу з нерівнозначними змінними (1) і встановлено, що порядок відповідності його n-го підхідного дробу рівний $2n+1$. Побудовано алгоритм розвинення заданого ряду (2) у відповідний дріб (1) і встановлено необхідні та достатні умови існування такого алгоритму. Крім того, досліджено зв'язок між приєднаним багатовимірним дробом з нерівнозначними змінними (1) і багатовимірним J-дробом з нерівнозначними змінними

$$\sum_{i_1=1}^{N}\frac{a_{i(1)}}{b_{i(1)}+\xi_{i_1}}+\sum_{i_2=1}^{i_1}\frac{(-1)^{\delta_{i_1,i_2}}a_{i(2)}}{b_{i(2)}+\xi_{i_2}}+\sum_{i_3=1}^{i_2}\frac{(-1)^{\delta_{i_2,i_3}}a_{i(3)}}{b_{i(3)}+\xi_{i_3}}+\ldots, \tag{3}$$

де $a_{i(k)}$, $b_{i(k)}$, $i(k)\in\mathcal{I}_k$, $k\geq 1$, – комплексні числа, причому $a_{i(k)}\neq 0$, $i(k)\in\mathcal{I}_k$, $k\geq 1$, $\boldsymbol{\xi}=(\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_N)\in\mathbb{C}^N$, і, як результат, доведено відповідність дробу (3) до формального кратного степеневого ряду

$$L^*(\boldsymbol{\xi})=\sum_{|m(N)|\geq 0}\frac{c_{m(N)}}{\boldsymbol{\xi}^{m(N)}},$$

де $c_{m(N)}\in\mathbb{C}$, $m(N)\in\mathcal{M}^N$, $\boldsymbol{\xi}\in\mathbb{C}^N$. Досліджено збіжність приєднаного багатовимірного дробу з нерівнозначними змінними (1) та багатовимірного J-дробу з нерівнозначними змінними (3) в деяких областях простору $\mathbb{C}^N$.

Нерівність Лебега для ψ–диференційовних функцій з класів Харді

П. В. Задерей[1], В. І. Бодра[1], В. В. Бовсуновська[2]

[1]Київський національний університет технологій та дизайну, м. Київ

[2] Національний технічний університет України "КПІ імені Ігоря Сікорського" , м. Київ

Bodrayaviktoriya@gmail.com

Позначимо $\mathbb{D}^2 = \{z = (z_1, z_2) : z_i \in \mathbb{C}, |z_i| < 1, i = 1, 2\}$, $\mathbb{T}^2 = \{z = (z_1, z_2) : z_i \in \mathbb{C}, |z_i| = 1, i = 1, 2\}$. Нехай $f(z) = f(z_1, z_2)$ – голоморфна в $\mathbb{D}^2$ функція, задана однорідним розкладом в ряд Тейлора виду

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \sum_{l_1+l_2=k} z_1^{l_1} z_2^{l_2}, \quad S_n(f; z) = \sum_{k=0}^{n} c_k \sum_{l_1+l_2=k} z_1^{l_1} z_2^{l_2},$$

яка належить класу Харді $H^1(\mathbb{D}^2)$, тобто

$$||f||_1 = \sup_{0 \le r < 1} \frac{1}{4\pi^2} \int\limits_{T^2} |f(re^{it_1}, re^{it_2})| dt_1 dt_2 < \infty.$$

Нехай також $\psi = \psi(k)$, $\psi(0) = 1$, $\psi(k) \neq 0$ $\forall k \in \mathbb{N}$, – довільна послідовність комплексних чисел. Якщо ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_k}{\psi(k)} \sum_{l_1+l_2=k} z_1^{l_1} z_2^{l_2}$$

є рядом Тейлора деякої функції $g \in H^1(\mathbb{D}^2)$, то наслідуючи О. І. Степанця, будемо називати її ψ–похідною функції f і позначати $g = f^{\psi}(\cdot, \cdot)$, а множину таких функцій $f(z)$ позначимо $H^{\psi}_{\Delta}(\mathbb{D}^2)$.

Теорема. *Якщо*

$$\lim_{k\to\infty} \psi(k) = 0, \sum_{k=1}^{\infty} k|\Delta^2\psi(k)| < \infty, \Delta^2\psi(k) = \psi(k-1) - 2\psi(k) + \psi(k+1), \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|\psi(k)|}{k} < \infty,$$

то $\forall f \in H^{\psi}_{\Delta}(\mathbb{D}^2)$ *справедлива нерівність*

$$||f(z) - S_n(f; z)||_C \le \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{|\psi(n+k)|}{k} \mathcal{K}'_k(\psi) + \sum_{k=2n+1}^{\infty} \frac{|\psi(k)|}{k} \mathcal{K}''_k(\psi) \right) E_n(f^{\psi})_C,$$

де $E_n(f^{\psi})_C$ – *найкраще наближення функції* f^{ψ} *многочленами виду* $\sum\limits_{k=0}^{n} \alpha_k \sum\limits_{l_1+l_2=k} z_1^{l_1} z_2^{l_2}$, а $\mathcal{K}'_k(\psi)$ і $\mathcal{K}''_k(\psi)$ – *деякі константи.*

Наближення аналітичних функцій з класів Харді граничні функції яких є інтегралами Пуассона

П. В. Задерей[1], М. А. Веремій[1], М. В. Гаєвський[2]

[1]Київський національний університет технологій та дизайну, м. Київ

[2]Кіровоградський державний педагогічний університет імені Володимира Винниченка, м. Кропивницький

zadereypv@ukr.net, koliaveremii@gmail.com, mgaevskij@gmail.com

Нехай $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$, а $\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$. Через $\mathbb{A}(\mathbb{D})$ будемо позначати множину регулярних в $\mathbb{D}$ функцій $f(z)$ з рядом Тейлора-Маклорена $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k, z \in \mathbb{D}$, $c_k = \frac{f^{(k)}(0)}{k!}$, $S_n(f; z) = \sum_{k=0}^{n} c_k z^k$.

Позначимо через $L(\mathbb{T}), L_\infty(\mathbb{T}), C(\mathbb{T})$ простори, відповідно, сумовних, суттєво обмежених та неперервних функцій f, визначених на $\mathbb{T}$, з нормами $\|f\|_{L(\mathbb{T})} = \int_0^{2\pi} |f(e^{it})|dt$, $\|f\|_\infty$:=ess $\sup_{t\in[0,2\pi)}|f(t)|$, $\|f\|_C := \max_{t\in[0;2\pi)} |f(e^{it})|$.

Якщо $X(\mathbb{T})$ – один з просторів $L(\mathbb{T}), L_\infty(\mathbb{T}), C(\mathbb{T})$, то $X(\mathbb{T})_+ := \{f \in X(\mathbb{T}) : c_{-k} = 0, k = 1, 2, ...\}$. За теоремою Голубєва-Привалова [1, С. 202] простори $X(\mathbb{T})_+$ є просторами граничних значень аналітичних в $\mathbb{D}$ функцій f, що зображаються інтегралами Коші

$$\mathcal{K}\varphi(z) := f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathbb{T}} \frac{\varphi(w)dw}{w - z}, z \in \mathbb{D}, \varphi \in X(\mathbb{T})_+$$

.

Через $L^q_\infty(\mathbb{T})_+, 0 \le q < 1$ позначимо клас функцій, що зображаються у вигляді згортки $f(e^{it}) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(e^{i\theta}) P_q(t-\theta)d\theta$, де $P_q(t) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} q^k \cos kt$ – ядро Пуассона, $\|\varphi(e^{i\theta})\|_{L_\infty(\mathbb{T})} \le 1$. Покладемо $C^q_\infty(\mathbb{T})_+ = L^q_\infty(\mathbb{T})_+ \cap C(\mathbb{T}), 0 \le q < 1$. Через H_p позначають множину функцій $f \in \mathcal{A}(\mathbb{D})$ у яких скінчена норма $\|f\|_{H_p} := \sup_{0<\rho<1} \left(\int_0^{2\pi} |f(\rho e^{it})|^p dt\right)^{\frac{1}{p}} < \infty, 1 \le p < \infty$. Тоді, покладемо $H^q_\infty := \{\mathcal{K}f(z) : z \in \mathbb{D}, \ \ \varphi \in C^q_\infty(\mathbb{T})_+\}$. Тому класи $C^q_\infty(\mathbb{T})_+$ складаються з функцій, які є звуженням на $\mathbb{T}$ функцій з класів H^q_∞.

В роботі досліджується наступна величина

$$\sup_{f\in H^q_\infty} \sup_{z\in\mathbb{D}} |f(z) - S_n(f; z)| = \sup_{f\in C^q_\infty(\mathbb{T})_+} \|f - S_n(f)\|_{C(\mathbb{T})}.$$

Отримані результати є аналогом теореми С. Б. Стєчкіна [2] для дійснозначних рядів Фур'є, а також продовженням досліджень О.І. Степанця та В. В. Савчука (див. напр. [3], глава 10)

1. Привалов И. И. Граничные свойства аналитических функций. – М.–Л.: Гостехиздат, 1950. – 336 с.
2. Стечкин С. Б. Оценка остатка ряда Фурье для дифференцируемых функций // Тр. Мат. ин-та АН СССР. – 1980. – **145**. – С. 126–151.
3. Степанец А. И. Методы теории приближений: В 2 ч. – Киев: Ин–т математики НАН Украины, 2002. – Ч.2. – 468 с. (Труды Ин–та математики НАН Украины; Т. 40).

Про побудову узагальнено опуклої оболонки

Юрій Зелінський
Інститут математики НАН України, м. Київ
yuzelinski@gmail.com

Аксіоматичний підхід до визначення опуклості (говорять, що сім'я множин складається з опуклих множин, якщо перетин довільної їх кількості належить цій сім'ї) дозволяє назвати опуклими ряд екзотичних класів множин, які не асоціюються із звичним поняттям опуклості, наприклад, множина всіх множин чи сім'я всіх замкнутих підмножин деякого топологічного простору. Ми розглянемо ряд задач, розв'язання яких вимагає застосування різних узагальнень поняття опуклості.

Означення 1. Скажемо, що множина $E \subset \mathbb{R}^n$ m-опукла відносно точки $x \in \mathbb{R}^n \backslash E$, якщо знайдеться m-вимірна площина L, така що $x \in L$ і $L \cap E = \varnothing$. Скажемо, що множина $E \subset \mathbb{R}^n$ m-опукла, якщо вона опукла відносно кожної точки $x \in \mathbb{R}^n \backslash E$.

Задача (про тінь). Яке мінімальне число попарно неперетинних замкнутих куль з центрами на сфері S^{n-1} в евклідовому просторі $\mathbb{R}^n$ і радіуса меншого від радіуса сфери достатньо, щоб довільна пряма, що проходить через центр сфери, перетинала хоча б одну з цих куль? Іншими словами: коли центр сфери буде належати 1-опуклій оболонці об'єднання куль?

Розв'язок задачі про тінь індукував ряд близьких задач, про які піде мова в доповіді.

1. Зелинский Ю. Б., Выговская И. Ю., Стефанчук М. В. Обобщенно выпуклые множества и задача о тени // Укр. мат. журн. – 2015. – **67**, № 12. – С. 1659–1666.
2. Зелінський Ю. Б., Стефанчук М. В. Узагальнення задачі про тінь // Укр. мат. журн. – 2016. – **68**, № 6. – С. 657–662.
3. Zelinskii Yu. B. Generalized Convex Envelopes of Sets and the Problem of Shadow // Journal of Mathematical Sciences. – 2015. – **211**, No 5. – P. 710–717.

Про одну комбінаторну тотожність для чисел Каталана та Нараяна

О. А. Кадубовський

Донбаський державний педагогічний університет, м. Слов'янськ

kadubovs@ukr.net

Добре відомо (напр. [1], [2]), що числа Каталана C_n («Catalan numbers») та Нараяна $N(n;k)$ («Narayana numbers») зустрічаються в багатьох комбінаторних задачах та знаходять застосування в різних галузях математики.

Нагадаємо, що числа C_n для невід'ємних цілих n визначаються рівністю

$$C_n = \frac{1}{n+1} C_{2n}^n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n},$$

а числа $N(n;k)$ для натуральних n і $1 \le k \le n$ – за допомогою рівності

$$N(n;k) = \frac{1}{n} C_n^k C_n^{k-1} = \frac{1}{n} \binom{n}{k} \binom{n}{k-1}.$$

Не важко перевірити, що має місце рівність

$$N(n;k) = N(n;n-k+1)$$

та добре відомо (напр. [1, Ex. 6.36(a)]), що для зазначених чисел справджується тотожність

$$\sum_{k=1}^{n} N(n;k) = C_n.$$

З урахуванням результатів робіт [2] і [3], має місце наступне твердження

Теорема. *Для натуральних n має місце тотожність*

$$C_n = \frac{1}{n+1} C_{2n}^n =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \left(\sum_{j|(n;k)} \phi(j) \cdot \frac{n-k+j}{j} \cdot N\left(\frac{n}{j}; \frac{n-k+j}{j}\right) + \right.$$

$$\left. + \sum_{j|(n;k-1)} \phi(j) \cdot \frac{k-1+j}{j} \cdot N\left(\frac{n}{j}; \frac{k-1+j}{j}\right) \right) - \sum_{\substack{1 \le i \le n \\ i|n}} \phi\left(\frac{n}{i}\right) \cdot (i+1) \cdot C_i,$$

де: $\phi(q)$ – функція Ейлера (кількість натуральних чисел, менших за q та взаємно простих із ним); $(a;b)$ – найбільший спільний дільник натуральних a і b; підсумовування в першому доданку із суми з правої частини ведеться за всіма дільниками j найбільшого спільного дільника $(n;k)$ чисел n і k, в другому доданку із суми – за всіма дільниками j найбільшого спільного дільника $(n;k-1)$ чисел n і $k-1$, а підсумовування в третьому доданку – за всіма дільниками i числа n.

1. Stanley R. P., Enumerative Combinatorics. Vol. 2, Cambridge University Press, 1999. – 595 p.
2. Callan D., Smiley L. Noncrossing partitions under reflection and rotation, preprint, https://arxiv.org/pdf/math/0510447v3, 2005.
3. Кадубовский А.А. О числе топологически неэквивалентных функций с одной вырожденной критической точкой типа седло на двумерной сфере, II // Труды международного геометрического центра. – 2015. – **8**, № 1. – С. 46–61.

Про деякі властивості локальних модулів гладкості конформних гомеоморфізмів

О. В. Карупу
Національний авіаційний університет, м. Київ
karupu@ukr.net

Нехай у комплексній площині задано однозв'язну область, обмежену спрямлюваною гладкою жордановою кривою. Келлог в 1912 році довів широко відому теорему про те, що якщо кут між дотичною до кривої і додатною дійсною віссю як функція довжини дуги на кривій належить класу Гельдера, то класу Гельдера з тим же показником належить і похідна функції, що реалізує гомеоморфізм замкнутого одиничного круга на замикання даної області, конформний у відкритому одиничному крузі. Згодом було отримано багато різних узагальнень цього результату.

В доповіді розглянуто оцінки для локальних модулів гладкості довільного порядку для функцій, що реалізовують конформні відображення однозв'язних областей.

Нехай G_1 – однозв'язна область в комплексній площині, обмежена гладкою спрямлюваною жордановою кривою Γ_1, що містить точку $z_0 \in \Gamma_1$, а G_2 – однозв'язна область в комплексній площині, обмежена гладкою спрямлюваною жордановою кривою Γ_2, що містить точку $w_0 \in \Gamma_2$. Нехай $w = f(z)$– гомеоморфізм замикання $\overline{G_1}$ області G_1 на замикання $\overline{G_2}$ області G_2, конформний в G_1, причому $w_0 = f(z_0)$. Нехай $\tau_1 = \tau_1(s_1)$ – кут між дотичною до Γ_1 та додатною дійсною віссю, $s_1 = s_1(z)$ – довжина дуги на кривій Γ_1, а $\tau_2 = \tau_2(s_2)$ – кут між дотичною до Γ_2 та додатною дійсною віссю, $s_2 = s_2(w)$ – довжина дуги на кривій Γ_2.

Нехай локальний модуль гладкості $\omega_{k,s_1^0}\left(\tau_1^{(m)}(s_1), \delta\right)$ порядку k похідної порядку $m \in \mathbb{N}$ $(m < k)$ функції $\tau_1 = \tau_1(s_1)$ в точці $s_1^0 = s_1(z_0)$ і локальний модуль гладкості $\omega_{k,s_2^0}\left(\tau_2^{(m)}(s_2), \delta\right)$ порядку k похідної порядку $m \in \mathbb{N}$ $(m < k)$ функції $\tau_2 = \tau_2(s_2)$ в точці $s_2^0 = s_2(w_0)$ задовольняють умові Гельдера з показником α $(0 < \alpha < m)$. Тоді локальний модуль гладкості $\omega_{k,z_0}\left(f^{(m+1)}(z), \delta\right)$ порядку k похідної $f^{(m+1)}(z)$ функції $f(z)$ в точці $z_0 = z(s_1^0)$ задовольняє умові Гельдера з тим же показником α.

Крайова задача для інтегрального рівняння типу Фредгольма з керуванням

Н. О. Козлова[1], В. А. Ферук[2]

[1]Київський національний університет імені Т. Г. Шевченка, м. Київ

[2]Інститут математики НАН України, м. Київ

[1]*nkozlovaa@gmail.com*, [2]*feruk.viktor@gmail.com*

Різноманітним задачам оптимального керування для функціонально-диференціальних та інтегро-диференціальних рівнянь та їх систем присвячено багато публікацій. Одним із напрямків дослідження таких задач є підхід, який ґрунтується на залученні апарату теорії псевдообернених операторів [1–5].

Розглянемо у гільбертовому просторі $L_2[a,b]$ лінійну крайову задачу для інтегрального рівняння з керуванням

$$x(t) - \int_a^b K(t,s)x(s)ds = f(t) + \int_a^b K_1(t,s)x(s)dsu, \tag{1}$$

$$Sx(\cdot) = \alpha + Jx(\cdot)u. \tag{2}$$

Тут $K(t,s)$, $K_1(t,s)$ – ядра, сумовні з квадратом в області $[a,b]\times[a,b]$, $f \in L_2[a,b]$, $x \in L_2[a,b]$, $u \in \mathbb{R}$, $S = col\left(S_1,\ S_2,\ \ldots,\ S_p\right) : L_2[a,b] \to \mathbb{R}^p$ і $J = col\left(J_1,\ J_2,\ \ldots,\ J_p\right) : L_2[a,b] \to \mathbb{R}^p$ – обмежені лінійні векторні функціонали, $S_i, J_i : L_2[a,b] \to \mathbb{R}$, $\alpha = col\left(\alpha_1,\ \alpha_2,\ \ldots,\ \alpha_p\right) \in \mathbb{R}^p$. Ядра $K(t,s)$, $K_1(t,s)$, функція f, функціонали S, J та вектор α – відомі, а керування u та функцію x – потрібно визначити.

Будемо вважати, що породжуюча задача без керування, отримана з (1),(2) при $u = 0$, не має розв'язку при деяких неоднорідностях f та α.

Встановлено необхідні та достатні умови на керування $u \in \mathbb{R}$, при яких задача (1),(2) стає розв'язною, а також знайдено загальний вигляд її розв'язку.

1. Boichuk A. A., Samoilenko A. M. Generalized inverse operators and Fredholm boundary-value problems (2nd edition). – Berlin; Boston: De Gruyter, 2016. – 298 p.
2. Козлова Н. О., Ферук В. А. Інтегральні рівняння Фредгольма з керуванням // Буковинський мат. журн. – 2016. – **4**, № 1-2. – С. 82-86.
3. Козлова Н. О., Ферук В. А. Нетерові крайові задачі з керуванням для інтегральних рівнянь // XVII Міжнародна наукова конференція ім. акад. Михайла Кравчука (Київ, 19-20 травня 2016 року): Матеріали конф. Т. 1. Диференціальні та інтегральні рівняння, їх застосування. – Київ: НТУУ "КПІ" . – 2016. – С. 143–146.
4. Панасенко Є. В., Покутний О. О. Керованість крайових задач для рівнянь Ляпунова в просторі Гільберта // Вісник Запорізького університету, математичне моделювання і прикладна механіка. – 2015. – № 3. – С. 213–220.
5. Шегда Л. М. Застосування до теорії керування нетерової крайової задачі // Прикарпатський вісник НТШ. Число. – 2013. – № 1(21). – С. 42–46.

Асимптотика розв'язків диференціальних рівнянь другого порядку з правильно та швидко змінними нелінійностями

Н. П. Колун
Одеський національний університет імені І.І. Мечникова, м. Одеса
nataliiakolun@ukr.net

Розглядається диференціальне рівняння

$$y'' = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i p_i(t) \varphi_i(y), \tag{1}$$

де $\alpha_i \in \{-1, 1\}$ $(i = \overline{1,m})$, $p_i : [a, \omega[\longrightarrow]0, +\infty[$ $(i = \overline{1,m})$ – неперервні функції, $-\infty < a < \omega \leq +\infty$, $\varphi_i : \Delta_{Y_0} \to]0, +\infty[$ $(i = \overline{1,m})$, де Y_0 дорівнює або нулю, або $\pm\infty$, Δ_{Y_0} – деякий однобічний окіл Y_0, такі, що при $i = \overline{1,l}$ кожна з них є неперервною і правильно змінною при $y \to Y_0$ функцією порядка σ_i, а при $i = \overline{l+1,m}$ – двічі неперервно диференційованою функцією, що задовольняє умовам

$$\varphi_i'(y) \neq 0 \quad \text{при} \quad y \in \Delta_{Y_0}, \lim_{\substack{y \to Y_0 \\ y \in \Delta_{Y_0}}} \varphi_i(y) = \begin{cases} \text{або} & 0, \\ \text{або} & +\infty, \end{cases} \qquad \lim_{\substack{y \to Y_0 \\ y \in \Delta_{Y_0}}} \frac{\varphi_i(y)\varphi_i''(y)}{\varphi_i'^2(y)} = 1. \tag{2}$$

У працях В. М. Євтухова і А. М. Клопота були отримані умови існування та асимптотика $P_\omega(Y_0, \lambda_0)$- розв'язків, коли всі функції φ_i – правильно змінні при $y \to Y_0$ (див., наприклад, [1]).

Розв'язок y диференціального рівняння (1) називається $P_\omega(Y_0, \lambda_0)$-розв'язком, де $-\infty \leq \lambda_0 \leq +\infty$, якщо він визначений на проміжку $[t_0, \omega[\subset [a, \omega[$ і задовольняє наступним умовам

$$\lim_{t \uparrow \omega} y(t) = Y_0, \quad \lim_{t \uparrow \omega} y'(t) = \begin{cases} \text{або} & 0, \\ \text{або} & \pm\infty, \end{cases} \quad \lim_{t \uparrow \omega} \frac{y'^2(t)}{y''(t)y(t)} = \lambda_0.$$

В силу умов (2) функції φ_i $(i = \overline{l+1,m})$ є швидко змінними при $y \to Y_0$, тобто права частина містить як правильно, так і швидко змінні нелінійності при $y \to Y_0$.

Отримані необхідні та достатні умови існування у рівняння (1) при $\lambda_0 \in \mathbb{R} \setminus \{0; 1\}$ таких $P_\omega(Y_0, \lambda_0)$-розв'язків, для яких при деякому $s \in \{1, ..., l\}$

$$\lim_{t \uparrow \omega} \frac{p_i(t)\varphi_i(y(t))}{p_s(t)\varphi_s(y(t))} = 0 \text{ при } i \in \{1, ..., m\} \setminus \{s\},$$

а також асимптотичні при $t \uparrow \omega$ представлення для таких розв'язків та їх похідних першого порядку.

1. Евтухов В. М., Клопот А. М. Асимптотическое поведение решений обыкновенных дифференциальных уравнений n-го порядка с правильно меняющимися нелинейностями // Дифференц. уравнения. – 2014. – **50**, № 5. – С. 584–600.

Нерівності типу Джексона-Стєчкіна у гільбертовому просторі

С. В. Конарева

Дніпропетровський національний університет імені Олеся Гончара, м. Дніпро

konareva@mmf.dnulive.dp.ua

Нехай H – комплексний гільбертовий простір, у якому задано розклад одиниці $E(s)$, що, в свою чергу, породжує групу унітарних операторів $U_t x = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{ist} dE(s)x, \ \ (t \in \mathbb{R})$.

Розглядається задача апроксимації елементів гільбертового простору підпросторами виду $W_\sigma = \left\{ \int\limits_{|t|<\sigma} dE(s)g \quad : \quad g \in H \right\}, \ \ \sigma > 0$. Нехай $\varphi : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ – неперервна функція така, що $\psi(t) = |\varphi(e^{it})|^2 \in \Phi$ (Φ – множина неперервних, невід'ємних, 2π-періодичних функцій ψ, що мають ніде не щільну множину нулів і таких, що $\Phi(0) = 0$). Визначимо узагальнену різницю елемента $x \in H$ з кроком t покладаючи $\Delta_t^\varphi x = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \varphi\left(e^{its}\right) dE(s)x$.

Розглянемо також вагову функцію $V(t)$, тобто невід'ємну, інтегровну на $[0;1]$ функцію, відмінну від нуля на множині повної міри. Введемо нові характеристики елементів $x \in H$ гільбертового простору – узагальнені модулі неперервності

$$\omega_\varphi(x; L_{p,V}([0,\delta])) = \left(\frac{1}{\delta} \int\limits_0^\delta \|\Delta_t^\varphi x\|^p \, V\left(\frac{t}{\delta}\right) dt \right)^{1/p}.$$

Для апроксимації будемо використовувати лінійні методи наближення вигляду $\Lambda x = \int\limits_{|t|<\sigma} \lambda(t) dE(t)x$, де $\lambda(t)$ – неперервна на $(-\sigma, \sigma)$, обмежена, комплекснозначна функція, що тотожньо дорівнює одиниці на $(-\epsilon, \epsilon)$, $0 < \epsilon < \sigma$.

Позначимо $\mathcal{H}(V, \delta, \sigma) = \inf\limits_{|t|\le\sigma} \int\limits_0^1 \psi(\delta t s) V(s) ds, \quad \mathcal{G}(V, \delta, \sigma) = \inf\limits_{|t|\ge\sigma} \int\limits_0^1 \psi(\delta t s) V(s) ds.$

Теорема. *Для довільного елемента $x \in H$ такого, що $x \neq U_t x$ при деякому t, має місце нерівність*

$$\|x - \Lambda x\|^2 \le \max\left\{ \frac{|1-\lambda(t)|^2}{\mathcal{H}(V;\delta;\sigma)}, \frac{1}{\mathcal{G}(V,\delta,\sigma)} \right\} \omega_\varphi(x; L_{2,V}([0,\delta]))^2.$$

Зокрема, для найкращого наближення елемента $x \in H$ підпростором W_σ маємо

$$E_\sigma(x)^2 = \left\| x - \int\limits_{|t|<\sigma} dE(t)x \right\|^2 \le \frac{1}{\mathcal{G}(V,\delta,\sigma)} \omega_\varphi(x; L_{2,V}([0,\delta]))^2.$$

Якщо розклад одиниці такий, що $E([t, t+\varepsilon]) \neq 0$ для будь-яких $t \in \mathbb{R}$ і $\varepsilon > 0$, то нерівності є точними.

Наслідок. *За умов попередньої теореми при $2 \le p \le \infty$ справедлива нерівність*

$$E_\sigma(x) \le \frac{1}{\mathcal{G}(V,\delta,\sigma)^{\frac{1}{2}}} \omega_\varphi(x; L_{p,V}([0,\delta])).$$

Наведені результати отримано спільно з професором В. Ф. Бабенко.

Крайова задача на полярній осі для рівнянь параболічного типу з операторами Лежандра, Фур'є, Бесселя

І. М. Конет, Т. М. Пилипюк
Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка,
м. Кам'янець-Подільський
konet51@ukr.net, t-myh@i.ua

Розглянемо задачу про структуру обмеженого на множині $D = \{(t,r) : t > 0 : r \in I = (0;R_1)\cup(R_1;R_2)\cup(R_2;+\infty) \equiv I_1\cup I_2\cup I_3\}$ розв'язку диференціальних рівнянь параболічного типу 2-го порядку

$$\begin{aligned} &\frac{\partial u_1}{\partial t} - a_1^2\Lambda_{(\mu)}[u_1] + \gamma_1^2 u_1 = f_1(t,r),\ r \in I_1,\\ &\frac{\partial u_2}{\partial t} - a_2^2 F[u_2] + \gamma_2^2 u_2 = f_2(t,r),\ r \in I_2,\\ &\frac{\partial u_3}{\partial t} - a_3^2 B_{(\nu,\alpha)}[u_3] + \gamma_3^2 u_3 = f_3(t,r),\ r \in I_3 \end{aligned} \tag{1}$$

з початковими умовами

$$\begin{aligned} &u_1(t,r)|_{t=0} = g_1(r),\ r \in I_1,\\ &u_2(t,r)|_{t=0} = g_2(r),\ r \in I_2,\\ &u_3(t,r)|_{t=0} = g_3(r),\ r \in I_3, \end{aligned} \tag{2}$$

крайовими умовами

$$u_1(t,r)|_{r=0} < +\infty, \quad u_3(t,r)|_{r=+\infty} < +\infty \tag{3}$$

та умовами спряження

$$\left(L_{j1}^k[u_k(t,r)] - L_{j2}^k[u_{k+1}(t,r)]\right)\Big|_{r=R_k} = \omega_{jk}(t);\ j,k = 1,2, \tag{4}$$

де

$\Lambda_{(\mu)} = \dfrac{\partial^2}{\partial r^2} + cthr\dfrac{\partial}{\partial r} + \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\mu_1^2}{1-chr} + \dfrac{\mu_2^2}{1+chr}\right)$ – узагальнений диференціальний оператор Лежандра [1],

$F = \dfrac{\partial^2}{\partial r^2}$ – диференціальний оператор Фур'є [2],

$B_{\nu,\alpha} = \dfrac{\partial^2}{\partial r^2} + \dfrac{2\alpha+1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r} - \dfrac{\nu^2-\alpha^2}{r^2}$ – диференціальний оператор Бесселя [1],

$L_{jm}^k = \left(\alpha_{jm}^k + \delta_{jm}^k\dfrac{\partial}{\partial t}\right)\dfrac{\partial}{\partial r} + \beta_{jm}^k + \gamma_{jm}^k\dfrac{\partial}{\partial t};\ j,m,k = 1,2.$

Інтегральне зображення єдиного точного аналітичного розв'язку мішаної параболічної задачі спряження (1)–(4) побудовано методом гібридного інтегрального перетворення типу Лежандра-Фур'є-Бесселя зі спектральним параметром [2].

1. Конет І. М., Пилипюк Т. М. Параболічні крайові задачі в кусково-однорідних середовищах. – Кам'янець-Подільський: Абетка–Світ, 2016. – 244 с.
2. Пилипюк Т. М. Гібридне інтегральне перетворення Лежандра-Фур'є-Бессля на полярній осі із спектральним параметром в умовах спряження // Крайові задачі для диференціальних рівнянь: зб. наук. пр. – Чернівці: Прут, 2012. – **21**. – С. 100-112.

Оцінки ентропійних чисел та ε–ентропії класів періодичних функцій багатьох змінних

А. Ф. Конограй
Інститут математики НАН України, м. Київ
Konogray@i.ua

Нами досліджуються апроксимативні характеристики класів $B^{\Omega}_{p,\theta}$ [1], періодичних функцій багатьох змінних, які є узагальненням відомих класів Бєсова. Нижче будемо вважати, що $\Omega(t) = \omega(t_1 \cdot \ldots \cdot t_d)$, де $\omega(\tau)$ – задана функція (однієї змінної) типу мішаного модуля неперервності порядку l, яка задовольняє так звані умови (S) і (S_l) Барі–Стєчкіна [2].

Нехай $\mathcal{X}$ банаховий простір і $B_{\mathcal{X}}(y,r)$ – куля $\mathcal{X}$ радіуса r з центром в точці y:

$$B_{\mathcal{X}}(y,r) = \{x \in \mathcal{X} : \ \|x-y\| \le r\}.$$

Для компактної множини $\mathcal{A}$ та $\varepsilon > 0$ одержано точні за порядком оцінки ентропійних чисел $\varepsilon_k(\mathcal{A},\mathcal{X})$, які визначаються наступним чином (див., наприклад, [3]):

$$\varepsilon_k(\mathcal{A},\mathcal{X}) = \inf\{\varepsilon : \ \exists y^1,\ldots,y^{2^k} \in \mathcal{X} : \ \mathcal{A} \subseteq \bigcup_{j=1}^{2^k} B_{\mathcal{X}}(y^j,\varepsilon)\}.$$

Теорема. *Нехай* $1 \le q < \infty$, $2 \le p \le \infty$, $2 \le \theta \le \infty$ *і* $\Omega(t) = \omega(t_1 \cdot \ldots \cdot t_d)$, *де* $\omega(\tau)$ *задовольняє умову* (S) *з деяким* $\alpha > 1$, *а також умову* (S_l), $l \ge 2$. *Тоді для будь-яких* $M, n \in \mathbb{N}$ *таких, що* $M \asymp 2^n n^{d-1}$, *має місце співвідношення*

$$\varepsilon_M(B^{\Omega}_{p,\theta}, L_q) \asymp \omega(2^{-n}) n^{(d-1)(\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta})}.$$

Зауваження. При $\omega(\tau) = \tau^r$ і відповідних обмеженнях на параметр r, результати теореми (для класів $B^r_{p,\theta}, 2 \le \theta < \infty$ та $B^r_{p,\infty} = H^r_p$) отримано в [4] та [5] відповідно.

1. Yongsheng S., Heping W. Representation and approximation of multivariate periodic functions with bounded mixed moduli of smoothness // Тр. мат. ин-та им. В. А. Стеклова. – 1997. – **219**. – С. 356–377.
2. Бари Н. К., Стечкин С. Б. Наилучшие приближения и дифференциальные свойства двух сопряженных функций // Тр. Моск. мат. о-ва. – 1956. – **5**. – С. 483–522.
3. Höllig K. Diameters of classes of smooth functions // Quantitative approximation. N.Y.: Acad. Press., 1980. – P. 163–176.
4. Романюк А. С. Оценки энтропийных чисел и ε–энтропии классов Никольского–Бесова периодических функций многих переменных // Збірник праць Ін-ту математики НАН України. – 2014. – **11**, № 3. – С. 196–213.
5. Темляков В. Н. Оценки асимптотических характеристик классов функций с ограниченной смешанной производной или разностью // Тр. Мат. ин-та АН СССР. – 1989. – **189**. – С. 138–168.

Наближення функцій в теорії обмежених інваріантних многовидів динамічних систем

Г. М. Кулик

Національний технічний університет України "КПІ імені Ігоря Сікорського" , м. Київ

ganna_1953@ukr.net

Розглядається система диференціальних рівнянь вигляду

$$dx/_{dt} = f(x), dy/_{dt} = A(x)y \tag{1}$$

де $x \in \mathbb{R}^m, y \in \mathbb{R}^n$, дійсна вектор-функція $f(x)$ визначена, неперервна і обмежена на $\mathbb{R}^m$, матриця $A(x)$ - $n \times n$-вимірна, елементами якої є дійсні скалярні функції визначені, неперервні і обмежені на $\mathbb{R}^m$. Додатково припускається, що задача Коші $dx/_{dt} = f(x)$, $x|_{t=0} = x_0$ при кожному фіксованому значенні $x_0 \in \mathbb{R}^m$ має єдиний розв'язок $x(t; x_0)$. Для цього досить припускати, що локальний модуль неперервності $\omega(\sigma; f)$ функції $f(x)$ задовольняє умові $\int_{+0} \frac{d\sigma}{\omega(\sigma;f)} = \infty$. В силу обмеженості функції $f(x)$ кожний розв'язок $x(t; x_0)$ буде визначений на всій осі $R = (-\infty, +\infty)$.

Припускається, що система (1) має функцію Гріна задачі про обмежені інваріантні многовиди $G_0(\tau, x) = \begin{cases} \Omega_\tau^0(x) C(x(\tau; x)) \ , & \tau \le 0, \\ \Omega_\tau^0(x) [C(x(\tau; x)) - I_n] \ , & \tau > 0 \end{cases}$, яка задовольняє нерівності $\|G_0(\tau, x)\| \le K \exp\{-\gamma |\tau|\} \quad \forall x \in \mathbb{R}^m \ , \tau \in R$ з деякими додатними постійними K, γ. Виникає питання: чи буде існувати функція Гріна при достатньо малих змінах функції $f(x)$ в системі (1)?

Пропонується розглядати обмежену неперервну симетричну матрицю вигляду $S(x) = \int_{-\infty}^{0} G_0(\tau, x) \cdot [G_0(\tau, x)]^T d\tau - \int_0^{+\infty} G_0(\tau, x) \cdot [G_0(\tau, x)]^T d\tau$. При цьому суперпозиція $S(x(t; x_0))$ є неперервно диференційовною по змінній $t \in R$. Прийнято позначати $\dot{S}(x_0) = dS(x(t; x_0))/_{dt}\Big|_{t=0}$. Похідна квадратичної форми $\langle S(x) z, z \rangle$ вздовж розв'язків системи спряженої до (1) $dx/_{dt} = f(x), dz/_{dt} = -A^T(x) z$ буде додатно визначеною $\left\langle \left[\dot{S}(x) - S(x) A^T(x) - A(x) S(x) \right] z, z \right\rangle \ge 0,5 \|z\|^2$. Якщо в записаній нерівності матриця $S(x)$ була би неперервно диференційовною по кожній із змінних x_i , $i = \overline{1, m}$, то $\dot{S}(x) = \sum_{i=1}^m f_i(x) \cdot \partial S(x)/_{\partial x_i}$ і записана вище нерівність суттєво не зміниться при малих змінах функції $f(x)$, що і означатиме існування функції Гріна. В зв'язку з цим виникає задача можливості наближення неперервної функції $S(x)$ функціями неперервно диференційовними $S_k(x)$ з одночасним наближенням їх похідних $\dot{S}_k(x)$,$\dot{S}(x)$.

1. Степанец А. И. Методы теории приближений: В 2 ч. – Киев: Ин–т математики НАН Украины, 2002. – Ч.1. – 427 с., Ч.2. – 468 с. (Труды Ин–та математики НАН Украины; Т. 40).
2. Кулик В. Л., Кулик А. Н., Степаненко Н. В. Дополнение слабо регулярных линейных расширений динамических систем до регулярных // Математический журнал, Алматы. – 2011. – **11**, № 1(39). – С. 74–86.

Абстрактний інтерполяційний дріб типу Тіле

Володимир Макаров, Ігор Демків
Інститут математики НАН України, м. Київ
Національний університет "Львівська політехніка" , Львів
ihor.demkiv@gmail.com

Узагальненнями дробів Тіле займалося багато авторів. Ці узагальнення умовно можна розділити на два класи. До першого класу відносяться роботи, присвячені узагальненню дробів Тіле на випадок функцій багатьох змінних, переважно двох. До другого класу відносяться роботи, присвячені узагальненню дробів Тіле на випадок векторнозначних та матричнозначних функцій від однієї змінної. Крім того, є окремі результати, присвячені побудові матричнозначних інтерполянтів від двох змінних. Проте всі дробові інтерполянти, запропоновані у відомих нам роботах, на відміну від класичного дробу Тіле, мають суттєвий недолік: при заміні останнього інтерполяційного вузла на довільний елемент з відповідної множини визначення, інтерполянт не перетворюється у звичайну (векторнозначну, матричнозначну) функцію, що інтерполюється.

Метою даної роботи є узагальнення дробів Тіле на випадок інтерполяції нелінійних операторів, що діють з лінійного топологічного простору X у алгебру Y з одиницею і яке позбавлене вказаного недоліку. Звідси, як частковий випадок, одержується інтерполяційний дріб типу Тіле для функцій довільної кількості змінних без геометричних обмежень на розташування інтерполяційних вузлів.

Одержано узагальнений дріб Тіле, який у "двоповерховому" випадку має вигляд

$$T_2(u) = F(u_0) + l_1(u-u_0)[I + l_2(u-u_1)]^{-1},$$

де $l_1,\ l_2-$ лінійні, $F-$ нелінійний оператори, що діють з лінійного топологічного простору X у алгебру Y з одиницею I, елементи $u, u_0, u_1 \in X$.

Для оператора F відомі його значення $F(u_{i-1,i}(\xi_i)), \xi_i \in [0,1],\ i = 1,2$ на континуальних вузлах $u_{i-1,i}(\xi_i) = u_{i-1} + g_{\xi_i}(u_i - u_{i-1}),\ \ \xi_i \in [0,1],\ i = 1,2.$

Тут g_z- лінійний, диференційований за z оператор, що діє з X в X, і має властивості $\mathrm{g}_0 = \mathrm{E},\ \ \mathrm{g}_1 = 0,\ \ \mathrm{g}_\tau \mathrm{g}_\xi = \mathrm{g}_{\max(\tau,\xi)},\ \ \tau, \xi \in [0,1]$, де $E : X \to X$ тотожний оператор.

Лінійні оператори $l_1,\ l_2$ задаються формулами

$$l_1(u-u_0) = -\int\limits_0^1 F_1{}'(u_0 + g_{\tau_1}(u_1-u_0))dg_{\tau_1}(u-u_0), \quad F_1(u) = F(u),$$

$$l_2(u-u_1) = -\int\limits_0^1 F_2{}'(u_1 + g_{\tau_2}(u_2-u_1))dg_{\tau_2}(u-u_1),$$

$$F_2(u) = l_1(u-u_0)\left[F(u) - F(u_0)\right]^{-1}$$

і визначають на множині двічі диференційованих за Гато операторів, для яких існують вказані інтеграли, розділені різниці першого порядку. Вказаний "двоповерховий" дріб є абстрактним інтерполяційним двохповерховим дробом типу Тіле з континуальним інтерполяційним вузлом $u_{1,2}(\xi_2)$ і звичайним інтерполяційним вузлом u_0, тобто

$$T_2(u_{1,2}(\xi_2)) = F(u_{1,2}(\xi_2)),\ \ \forall \xi_2 \in [0,1], \quad T_2(u_0)) = F(u_0)).$$

1. Makarov V. L., Demkiv I. I. Abstract interpolation Thiele type fraction // https://arxiv.org/ftp/arxiv/papers/1511/1511.06877.pdf, 2015, P.1-10.

Асплундові простори та проміжні диференційовні функції

В. К. Маслюченко, В. С. Мельник
Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича, м. Чернівці
vmaslyuchenko@ukr.net, windchange7@gmail.com

Відомою є теорема Гана–Д'єдонне-Катетова-Тонґа [1, с. 105], яка твердить, що в класі T_1-просторів нормальність простору X еквівалентна такій властивості: для кожної пари (g, h) напівнеперервних відповідно зверху і знизу функцій $g, h : X \to \mathbb{R}$, таких, що $g(x) \leq h(x)$ на X існує неперервна функція $f : X \to \mathbb{R}$, для якої $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ на X. Ця теорема має багато аналогів і застосовується в теорії наближень (див. [2] і вказану там літературу).

В останні роки з'явилися нові аналоги вказаної теореми [3-5], зокрема, ті з них, що стосуються існування проміжних C^∞-функцій на проміжках числової прямої [4], на замкнених паралелепіпедах в $\mathbb{R}^n$ чи на сепарабельних гільбертових просторах [5]. Тут ми подамо результат про існування проміжної диференційовної за Фреше функції на нормованих просторах.

Нагадаємо [6, с. 27], що дійсний банаховий простір X називається асплундовим, якщо для довільного його сепарабельного підпростору L і спряжений з ним простір L^* сепарабельний. Зокрема, асплундовим буде і сепарабельний дійсний банаховий простір X з сепарабельним спряженим X^*. Має місце такий результат [6, с. 59].

Теорема 1. *Для сепарабельного дійсного банахового простору X наступні умови рівносильні:*
(i) спряжений простір X^* сепарабельний (тобто X – асплундовий простір);
(ii) на X існує диференційовна за Фреше при $x \neq 0$ норма, яка еквівалентна до вихідної норми простору X.

Основою нашої побудови є.

Лема 1. *Нехай X – дійсний нормований простір з диференційовною за Фреше при $x \neq 0$ нормою $p(x) = ||x||$, $\varphi(t) = e^{\frac{1}{t^2-1}}$ при $|t| < 1$ і $\varphi(t) = 0$ при $|t| \geq 1$, $I = \int\limits_{-1}^{1} \varphi(t)dt$, $\psi(t) = \int\limits_{-\infty}^{t} \varphi(s)ds$, $0 < r < R$, $\gamma(t) = 2\frac{t-r}{R-r} - 1$, $g(t) = 1 - \psi(\gamma(t))$, $x_0 \in X$, $f(x) = g(p(x - x_0))$ на X і $M = \frac{2}{eI}$. Тоді $f : X \to [0, 1]$ – це диференційовна за Фреше функція, для якої $f(x) = 1$ при $||x - x_0|| < r$ і $f(x) = 0$ при $||x - x_0|| \geq R$.*

З неї виводиться

Лема 2. *Нехай X – сепарабельний асплундовий простір і G – відкрита непорожня і обмежена множина в X. Тоді існує диференційовна за Фреше функція $f : X \to [0, 1]$, така, що $\mathrm{supp} f = G$.*

Тут $\mathrm{supp} f = \{x \in X : f(x) \neq 0\}$ – носій функції f.

Основним технічним інструментом нашої побудови виступає

Теорема 2. *Нехай X – сепарабельний асплундовий простір і $(U_j)_{j\in J}$ – його відкрите покриття, що складається з обмежених множин U_j. Тоді існує локально скінченне розбиття одиниці $(\varphi_i)_{i\in I}$ на X, яке підпорядковане покриттю $(U_j)_{j\in J}$ і складається з диференційовних за Фреше функцій $\varphi_i : X \to [0, 1]$.*

З теореми 2 випливає

Теорема 3. *Нехай X – сепарабельний асплундовий простір, $g : X \to \mathbb{R}$ – напівнеперервна зверху, а $h : X \to \mathbb{R}$ – напівнеперервна знизу функції, для яких $g(x) < h(x)$ на X.*

Тоді існує така диференційовна за Фреше функція $f : X \to \mathbb{R}$, що $g(x) < f(x) < h(x)$ на X.

1. Энгелькинг Р. Общая топология. – Москва: Мир, 1986. – 752 с.
2. Маслюченко В. К., Мельник В. С. Про рівномірне відхилення від простору неперервних функцій // Збірник праць Ін-ту математики НАН України, 2014. – **11**, № 1. – С. 158–166.
3. Маслюченко В. К., Петей С. П. Поточкові границі неперервних монотонних функцій та функцій обмеженої варіації // Бук. мат. журн. – 2015. – **3**, № 2. – С. 64–71.
4. Маслюченко В. К., Маслюченко О. В., Мельник В. С. Існування проміжних кусково лінійних та нескінченно диференційовних функцій // Бук. мат. журн. – 2016. – **4**, № 3-4. – С.93–100.
5. Маслюченко В. К., Мельник В. С. Про побудову проміжних диференційовних функцій // Всеукраїнська наукова конференція "Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу" (Ворохта 22–25 лютого 2017 р.): Тези доповідей. – Івано-Франківськ: ДВНЗ "Прикарпатський нац. ун-т ім. В. Стефаника", 2017. – 140 с.
6. Deville R., Godefroy G., Zizler V. Smoothness and Renormings in Banach Spaces. – Longman Scientific & Technical, 1993. – 359 p.

Одностайно ледь неперервні функції та узагальнення однієї теореми Серпінського

В. К. Маслюченко, О. І. Філіпчук

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича, м. Чернівці

v.maslyuchenko@chnu.edu.ua, o.filipchuk@chnu.edu.ua

В. Серпінський [1] виявив, що нарізно неперервні функції $f, g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ будуть рівними, якщо вони збігаються на деякій всюди щільній в $\mathbb{R}^2$ множині. Відомі численні узагальнення даної теореми (див. [2,3] і вказану там літературу). У праці [4] було анонсовано теорему про сталість нарізно неперервної функції і зауважено, що з неї безпосередньо випливає певне узагальнення теореми Серпінського. Розвиваючи знайдений авторами спосіб доведення теореми про сталість, можна отримати нове узагальнення, з якого випливають усі попередні.

Основним моментом є введення поняття одностайної ледь неперервності двох відображень, що розвиває поняття одностайної квазінеперервності, запропоноване С. Кемпістим у [5]. Відображення f і g, які діють між топологічними просторами X і Y, називаються *одностайно ледь неперервними*, якщо для довільних околів V і W точок $f(x)$ і $g(x)$ у просторі Y існує така відкрита непорожня множина U в X, що $f(U) \subseteq V$ і $g(U) \subseteq W$. Крім того, істотною у нашому узагальненні є властивість слабкої горизонтальної квазінеперервності [6], яку мають не тільки нарізно неперервні функції, а і їх аналоги – KC-функції і K_hC-функції.

Теорема. *Нехай X – берівський простір, Y – топологічний простір, який у кожній точці має не більш, ніж зліченну локальну псевдобазу, Z – урисоновий простір, $f, g : X \times Y \to Z$ – слабко горизонтально квазінеперервні відображення, які неперервні відносно другої змінної і такі, що для кожного $y \in Y$ відображення $f_y = f(\cdot, y)$ та $g_y = g(\cdot, y)$ одностайно ледь неперервні, E – всюди щільна підмножина добутку $X \times Y$ і $f|_E = g|_E$. Тоді $f = g$.*

Нагадаємо, що простір Z називається *урисоновим*, якщо для довільних його різних точок z_1 і z_2 існують замкнені околи W_1 і W_2, такі, що $W_1 \cap W_2 = \emptyset$.

1. Sierpiński W. Sur une propriété de fonctions de deux variables réelles, continues par rapport à chacune de variables // Publ. Math. Univ. Belgrade. – 1932. – **1**. – P. 125–128.
2. Piotrowski Z., Wingler E. Y. On Sierpiński's theorem on the determination of separately continuous functions // Q&A in General Topology. – 1997. – **15**. – P. 15–19.
3. Михайлюк В. В. Топологія нарізної неперервності та одне узагальнення теореми Серпінського // Мат. студії. – 2000. – **14**, № 2. –С. 193–196.
4. Маслюченко В. К., Філіпчук О. І. Розриви нарізно неперервних відображень з не більш, ніж зліченною множиною значень // Міжнародна наукова конференція "Диференціально-функціональні рівняння та їх застосування", присвячена 80-річчю від дня народження проф. М. П. Ленюка, 28-30 жовтня 2016 р., Чернівці: матеріали конференції. — Чернівці, 2016. — С. 168–169.
5. Kempisty S. Sur les fonctions quasi-continues // Fund. Math. – 1932. – **19**. – P. 184–197
6. Нестеренко В. В. Слабка горизонтальна квазінеперервність // Мат. вісн. НТШ. – 2008. – **5**. – С. 177–182.

Екстремальна задача Помпея–Ландау–Саса для обмежених голоморфних функцій в бікрузі

І. Ю. Меремеля
Академія рекреаційних технологій і права, м. Луцьк
irameremelya@gmail.com

Нехай $\mathbb{D}^2 := \mathbb{D} \times \mathbb{D} = \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 : |z_1| < 1, |z_2| < 1\}$ – одиничний бікруг, $\mathbb{T}^2 := \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 : |z_1| = |z_2| = 1\}$ – кістяк бікруга $\mathbb{D}^2$, $B(\mathbb{D}^2)$ – клас функцій f, голоморфних в бікрузі $\mathbb{D}^2$, для яких $\sup_{(z_1,z_2)\in\mathbb{D}^2} |f(z_1, z_2)| \le 1$ і нехай

$$\widehat{f}_{k,l} := \frac{1}{k!\ l!} \frac{\partial^{k+l} f}{\partial z_1^k \partial z_2^l}(0,0)$$

– коефіцієнти Тейлора функції f.

Екстремальною задачею Помпея–Ландау–Саса для бікруга називатимемо екстремальну задачу про обчислення точного значення величини

$$\sup\left\{\left|\sum_{(k,l)\in\gamma} \mu_{k,l}\widehat{f}_{k,l}\right| : f \in X\right\},$$

де $\{\mu_{k,l}\}$ – двократна комплексна послідовність, γ – деяка скінченна підмножина $\mathbb{Z}_+^2$, а X – деякий підклас $B(\mathbb{D}^2)$, а також задачу про знаходження екстремальних елементів, на яких досягається ця точна верхня межа.

Знайдено розв'язок задачі Помпея–Ландау–Саса у випадку, коли $\gamma = \{(0,0), (0,1), (1,0), (1,1)\}$ і $\mu_{k,l} = 2\rho_1^{1-l}\rho_2^{1-k}$, $\mu_{1,1} = 1$.

Теорема. *Нехай $\rho_1, \rho_2 \in \mathbb{C}$ і $|\rho_1| + |\rho_2| < 1$. Тоді*

$$\max\left\{\left|2(\rho_1\rho_2\widehat{f}_{0,0} + \rho_1\widehat{f}_{1,0} + \rho_2\widehat{f}_{0,1}) + \widehat{f}_{1,1}\right| : f \in B(\mathbb{D}^2)\right\} =$$

$$= |\rho_1|^2 + |\rho_2|^2 + 1.$$

Максимум досягається для функції

$$f_{\rho_1,\rho_2}(z_1, z_2) := \frac{\overline{\rho}_1 z_1 + \overline{\rho}_2 z_2 + z_1 z_2}{\rho_1 z_2 + \rho_2 z_1 + 1} =$$

$$= \overline{\rho}_1 z_1 + \overline{\rho}_2 z_2 + (1 - |\rho_1|^2 - |\rho_2|^2) z_1 z_2 + \dots.$$

Наслідок. *Мають місце рівності*

$$\sup\left\{\left|\widehat{f}_{1,0}\right| + \left|\widehat{f}_{0,1}\right| + \left|\widehat{f}_{1,1}\right| : f \in B^0(\mathbb{D}^2)\right\} =$$

$$= \sup\left\{\left|\widehat{f}_{1,0} + \widehat{f}_{0,1} + \widehat{f}_{1,1}\right| : f \in B^0(\mathbb{D}^2)\right\} =$$

$$= \sup\left\{\left|\frac{1}{2}\widehat{f}_{0,0} + \widehat{f}_{1,0} + \widehat{f}_{0,1} + \widehat{f}_{1,1}\right| : f \in B(\mathbb{D}^2)\right\} = \frac{3}{2},$$

де $B^0(\mathbb{D}^2) := \{f \in B : \widehat{f}_{0,0} = 0\}$.

Точні верхні межі досягаються на послідовності функцій $\{f_{\rho_1,\rho_2}\}_{|\rho_1|+|\rho_2|<1}$.

Про асимптотично майже періодичні розв'язки рівнянь із запізненням

Ю. М. Мисло, В. І. Ткаченко
Ужгородський національний університет, м. Ужгород
Інститут математики НАН України, м. Київ
julia.pah@gmail.com

Розглядається система диференціальних рівнянь із запізненням та нефіксованими моментами імпульсної дії

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), x(t-h)),\ t \neq \tau_k(x(t)), \tag{1}$$

$$x(t+0) = x(t) + I_k(x(t)), \quad t = \tau_k(x(t)), k \in \mathbb{Z}, \tag{2}$$

де $x \in \mathbb{R}^n$, $h > 0$. Імпульсна дія відбувається при досягненні розв'язками поверхонь $\Gamma_k = \{(t,x) :\ t = \tau_k(x)\}, k \in \mathbb{Z}$, які рівномірно відділені одна від іншої.

Через $\mathcal{PC}^k(J, \mathbb{R}^n)$, $J \subseteq \mathbb{R}$ позначимо простір усіх кусково-неперервних функцій $x : J \to \mathbb{R}^n$ таких, що

i) множина $T = \{t_j \in J :\ t_{j+1} > t_j, j \in \mathbb{Z}\}$ розривів функції x не має скінченних граничних точок;

ii) функції неперервні зліва $x(t_j - 0) = x(t_j)$ і існують границі $\lim\limits_{t \to t_j + 0} x(t) = x(t_j + 0)$;

iii) функція $x(t)$ гладка класу C^k на множині $J \setminus T$.

Розглядаємо систему (1), (2) з такими умовами:

(**H1**) Позначимо $U_\rho = \{x \in \mathbb{R}^n :\ \|x\| \leq \rho\}$, де ρ – деяке додатне число. Припустимо, що послідовність $\{\tau_k\}$ функцій імпульсної дії $\tau_k :\ U_\rho \to \mathbb{R}$ має рівномірно майже періодичні послідовності різниць рівномірно відносно $x \in U_\rho$ і існують $\theta > 0$ і $\Theta > 0$ такі, що $\inf_x \tau_{k+1}(x) - \sup_x \tau_k(x) \geq \theta$ і $\sup_x \tau_{k+1}(x) - \inf_x \tau_k(x) \leq \Theta$ для всіх $x \in U_\rho$ і $k \in \mathbb{Z}$.

(**H2**) Функція $f(t,x,y)$ майже періодична по t і ліпшицева по $x, y \in U_\rho$ зі сталою $L_1 > 0 :\ \|f(t,x_1,y_1) - f(t,x_2,y_2)\| \leq L_1(\|x_1 - x_2\| + \|y_1 - y_2\|)$.

(**H3**) Вектор-функції $I_j :\ U_\rho \to \mathbb{R}^n$ ліпшицеві по $x \in U_\rho$ зі сталою $L_1 > 0$. Послідовность $\{I_j(x)\}$ майже періодична рівномірно відносно $x \in U_\rho$.

Теорема. *Припустимо, що* $M_0 N_1 + N_1 < 1$, *де* $M_0 = \sup\limits_{t \in \mathbb{R}, x, y \in U_\rho} \|f(t,x,y)\|$, *а* N_1 *є сталою Ліпшиця для поверхонь імпульсів*

$$|\tau_j(x) - \tau_j(y)| \leq N_1 \|x - y\|,\ j \in \mathbb{Z},\ x, y \in U_\rho.$$

Нехай розв'язок $\xi(t)$ *системи (1), (2) при всіх* $t \in [0, \infty)$ *належить* U_ρ *і є рівномірно асимптотично стійким при* $t \geq 0$. *Тоді* $\xi(t)$ *асимптотично w-майже періодичний, а система (1), (2) має w-майже періодичний розв'язок, який є асимптотично стійким при* $t \geq 0$.

1. Myslo Y. M., Tkachenko V. I. Global attractivity in almost periodic single species models // Functional Differential Equations. – 2011. – **18**, No 3–4, – P. 269–278.
2. Tkachenko V. I. Almost periodic solutions of evolution differential equations with impulsive action. Mathematical Modeling and Applications in Nonlinear Dynamics. – New York: Springer, 2016. – P. 161-205.
3. Samoilenko A. M., Perestyuk N. A. Impulsive differential equations, World Scientific, Singapore, 1995.

Про асимптотику q-поліномів Бернштейна на степеневих функціях

Д. А. Найко
Вінницький національний аграрний університет, м. Вінниця
dmnaiko@ukr.net

Наведемо означення q-поліномів Бернштейна, введених Філіпсом [1] у 1997 році. Для $q > 0$ та будь-якого $n = 0, 1, 2, ...$ визначаються числа

$$[n]_q := 1 + q + ... + q^{n-1} \quad (n \in N), \quad [0]_q := 0;$$

$$[n]_q! = [1]_q[2]_q...[n]_q \ \ (n \in N), \ \ [0]_q! := 0; \ \ \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q := \frac{[n]_q!}{[k]_q![n-k]_q!}, \ 0 \le k \le n.$$

Означення. *Нехай $f \in C[0,1]$. Тоді поліном*

$$B_n(f, q; x) := \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{[k]_q}{[n]_q}\right) \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q x^k \prod_{s=0}^{n-1-k} (1 - q^s x), \quad n = 1, 2, ...$$

називається q-поліномом Бернштейна.

Якщо $q = 1$, то $B_n(f, q; x)$ – класичний многочлен Бернштейна.

При $0 < q \le 1$ $B_n(f, q; x)$ є додатним лінійним оператором на $[0, 1]$.

У випадку $q \ge 1$ Філіпс [1] показав, що $B_n(t^2, q; x) = x^2 + x(1-x)/[n]_q$. Наступна теорема узагальнює цей результат.

Теорема. *При фіксованому $i \in N$ q-поліном Бернштейна $B_n(t^i, q; x)$ має таке асимптотичне подання:*

$$B_n(t^i, q; x) = x^i + \sum_{m=1}^{i} \frac{1}{[n]_q^m} \sum_{p=i-m}^{i} (-1)^{p+m-i} x^p S_q(i, p) \sum_{(s_1, \dots, s_{p+m-i})}^{p-1} [s_1]_q ... [s_{p+m-i}]_q,$$

де $A_m(i, q, x) := \sum\limits_{p=i-m}^{i} (-1)^{p+m-i} x^p S_q(i, p) \cdot \sum\limits_{(s_1, \dots, s_{p+m-i})}^{p-1} [s_1]_q ... [s_{p+m-i}]_q$ не залежать від n, а функції $S_q(i, j)$ задовольняють рекурентне співвідношення

$$S_q(i + 1, j) = S_q(i, j - 1) + [j]_q S_q(i, j),$$

де $S_q(0, 0) := 1$, $S_q(i, 0) := 0$ при $i > 0$, $S_q(i, j) := 0$ при $i < j$ (див. [2]).

1. Phillips G. M. Bernstein polynomials based on the q-integers // Ann. Numer. Math. – 1997. – **4**. – P. 258–264.
2. Найко Д. А. Про деякі апроксимаційні властивості q-параметричних многочленів Бернштейна // Збірник праць Ін-ту математики НАН України. – 2016. – **13**, № 2. – С. 214–226.

Наближення періодичних аналітичних функцій повторними лінійними середніми Валле Пуссена

О. О. Новіков, О. Г. Ровенська, Ю. О. Козаченко
Донбаський державний педагогічний університет, м. Слов'янськ
sgpi@slav.dn.ua

Нехай L – множина 2π-періодичних, сумовних на $[-\pi;\pi]$ функцій. Нехай $\psi(k)$ – фіксована послідовність дійсних чисел і $\beta \in \mathbb{R}$. Наслідуючи О. І. Степанця [1], функції $f \in L$, яка має ряд Фур'є

$$S[f] = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx + b_k \sin kx,$$

якщо це можливо, поставимо у відповідність функцію f_β^ψ, для якої ряд Фур'є має вигляд

$$S[f_\beta^\psi] = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\psi(k)} \left(a_k \cos(kx + \beta\pi/2) + b_k \sin(kx + \beta\pi/2)\right).$$

Множину неперервних функцій f, які мають таку похідну f_β^ψ, що $\operatorname{esssup}|f_\beta^\psi(x)| \le 1$, позначимо $C_{\beta,\infty}^\psi$. Нехай $q \in (0;1)$. Через D_q позначимо множину послідовностей $\psi(k)$, які задовольняють умову $\lim\limits_{k\to\infty} \frac{\psi(k+1)}{\psi(k)} = q$. Питання наближення класів $C_{\beta,\infty}^\psi$, $\psi \in D_q$, вивчалися в роботах О. І. Степанця, А. С. Сердюка, В. І. Рукасова, С. О. Чайченка та інших.

Подвійні методи Валле-Пуссена для випадку $p_1 \le p_2$ задаються співвідношенням

$$V_{n,\overline{p}}^{(2)}(f,x) = \frac{1}{p_1} \sum_{k=n-p_1}^{n-1} \frac{1}{p_2} \sum_{m=k-p_2+1}^{k} S_m(f,x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} \lambda_k^{(n)} (a_k(f) \cos kx + b_k(f) \sin kx),$$

де

$$\lambda_k^{(n)} = \begin{cases} 1, & 1 \le k \le n - p_1 - p_2 + 1; \\ 1 - \frac{(k-n+p_1+p_2)(k-n+p_1+p_2-1)}{2p_1p_2}, & n - p_1 - p_2 + 1 \le k \le n - p_2; \\ 1 - \frac{2k-2n+2p_2+p_1-1}{2p_2}, & n - p_2 \le k \le n - p_1; \\ 1 - \frac{2p_1p_2-(n-k)(n-k+1)}{2p_1p_2}. & n - p_1 \le k \le n - 1. \end{cases}$$

Теорема. *Нехай $q \in (0;1)$, $\psi \in D_q$, $\beta \in \mathbb{R}$. Тоді за умови $n - p_1 - p_2 \to \infty$ виконується асимптотична формула*

$$\mathcal{E}(C_{\beta,\infty}^\psi, V_{n,p}^{(2)}) = \frac{8\psi(n-p_1-p_2+2)}{\pi p_1 p_2 (1+q)^3} \Pi\left(\frac{4q}{(1+q)^2}; \frac{2\sqrt{q}}{1+q}\right) +$$

$$+O(1)\left(\frac{\psi(n-p_1-p_2)}{p^2(n-2p)(1-q)^4} + \frac{\psi(n-p_1-p_2)q^p}{p^2(1-q)^3} + \frac{\psi(n-p_1-p_2)\varepsilon_{n-p_1-p_2+2}}{(1-q)^2}\right), \qquad (4)$$

де $\varepsilon_m = \sup_{k\ge m}\left|\frac{\psi(k+1)}{\psi(k)} - q\right|$,

$$\Pi(n;k) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{du}{\left(1 - n\sin^2 u\right)\sqrt{1 - k^2 \sin^2 u}}$$

– повний еліптичний інтеграл третього роду.

1. Степанец А. И. Классификация и приближения периодических функцій. – Киев: Наукова думка, 1987. – 268 с.

Деякі підходи до розвинення функцій в ланцюгові дроби

М. М. Пагіря
Мукачівський державний університет, м. Мукачево
pahirya@gmail.com

Відомо, що аналітичну функцію комплексної змінної можна наближувати багаточленом, узагальненим багаточленом, апроксимантою Паде або ланцюговим дробом. Існує декілька способів отримати розвинення функції комплексної змінної в ланцюгові дроби. Серед них метод Лагранжа для основного диференціального рівняння Ріккаті, побудова відповідного степеневому ряду правильного ланцюгового C–дробу, представлення функцій у вигляді відношення гіпергеометричних функцій, метод Вісковатова тощо. Для розвинення функцій в ланцюговий дріб також використовують формулу Тіле, яка є аналогом формули Тейлора в теорії ланцюгових дробів [1].

Доведені нові властивості для обернених похідних Тіле, встановлені правила оберненого диференціювання за Тіле, отримані розвинення функцій в ланцюгові дроби Тіле та визначені області збіжностей отриманих розвинень [2].

Узагальнена формула Тіле для квазі–обернених ланцюгових дробів, яка ґрунтується на обернених похідних 2–го типу. Обґрунтовані властивості обернених похідних 2–го типу, встановлені взаємозв'язки обернених похідних 2–го типу із оберненими похідними Тіле та "звичайними" похідними функції, а також правила оберненого диференціювання 2–го типу, отримані розвинення деяких функцій в квазі–обернені ланцюгові дроби і вказані області збіжності отриманих розвинень [2, 3].

1. Thiele T. N. Interpolationsprechnung. – Leipzig: Comm. von B.G.Teubner, 1909.
2. Пагіря М. М. Наближення функцій ланцюговими дробами. – Ужгород: Ґражда, 2016. – 412 с.
3. Pahirya M. M. Expansion of function $z \ln z$ in the quasi–reciprocal continued fraction // International Journal of Advanced Research in Mathematics. – 2016. – No 7. – P. 1–9.

Найкращі наближення класів згорток узагальненими сплайнами

Н. В. Парфінович

Дніпропетровський національний університет імені Олеся Гончара, м. Дніпро

Нехай C і L_p – простори 2π-періодичних функцій $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ з відповідними нормами $\|\cdot\|_C$ і $\|\cdot\|_{L_p} = \|\cdot\|_p$. Найкраще наближення класу функцій $M \subset L_p$ множиною $H \subset L_p$ в метриці L_p позначимо через $E(M, H)_p$, а поперечник Колмогорова цього класу в L_p через $d_n(M, L_p)$.

Згортку $K * \varphi$ функції $K \in L_1$ (ядра згортки) і $\varphi \in L_1$ означимо рівністю

$$(K * \varphi)(x) = \int_0^{2\pi} K(x-t)\varphi(t)\,dt.$$

Для ядра K покладемо $\mu = \mu(K) = 1$, якщо $K \perp 1$ і $\mu = \mu(K) = 0$ в супротивному випадку. Якщо задані ядро K і множина $F \in L_1$, то через $K * \varphi$ позначимо клас функцій вигляду $f(x) = a\mu + (K * \varphi)(x),\ \ \varphi \in F,\ \varphi \perp \mu,\ a \in \mathbb{R}$.

Неперервне на $(0, 2\pi)$ ядро K, що не є тригонометричним поліномом, будемо називати CVD-ядром ($K \in CVD$), якщо $\nu(a\mu + K * \varphi) \le \nu(\varphi)$ для довільних $\varphi \in C$, $\varphi \perp \mu$, $a \in \mathbb{R}$ ($\nu(g)$ – кількість змін знаку 2π-періодичної функції g на періоді).

Для невід'ємної функції $f \in L_1$ позначимо через $r(f, t)$ неспадне переставлення звуження функції f на проміжок $[0, 2\pi]$. Якщо g-довільна функція із L_1, покладемо

$$\Pi(g, t) := r(g_+, t) - r(g_-, 2\pi - t).$$

Множину $F \subset L_1$ назвемо Π-інваріантною, якщо з $f \in F$ і $\Pi(g) = \Pi(f)$ випливає $g \in F$.

Нехай $S^k_{2n,m}$ ($n, m \in \mathbb{N}$, $k = 1, 2$) – простори 2π-періодичних сплайнів порядку m дефекту k з вузлами в точках $kj\pi/n$, $j \in \mathbb{Z}$, а $\varphi_{n,0}(t) = \operatorname{sign}\sin \mathrm{nt}$, $t \in \mathbb{R}$.

Теорема. *Нехай $n, m \in \mathbb{N}$, $K \in CVD$, F – довільна Π-інваріантна множина 2π-періодичних функцій. Тоді*

$$E(K * F, K * S^2_{2n,m})_1 = \sup_{\substack{f \in F \\ f \perp \mu}} \int_0^{2\pi} \Pi(f, t)\Pi(K(-\cdot) * \varphi_{n,o}, t)\,dt.$$

Результати цієї теореми показують, що простори $K * S^2_{2n,m}$ разом з просторами $K * S^1_{2n,m}$ є екстремальними для поперечників $d_{2n}(K * F, L_1)$. Результати, що стосуються таких наближень у випадку, коли K-ядро Бернуллі, а також історія питання викладені в [1], стосовно наближень класів $K * F$ ($K \in CVD$) просторами $K * S^1_{2n,m}$ див. [2].

1. Бабенко В. Ф., Парфинович Н. В. О точных значениях наилучших приближений классов дифференцируемых периодических функций сплайнами // Матем. заметки. – 2010. – **87**, № 5. – С. 669–683.
2. Бабенко В. Ф. Приближение классов сверток // Сиб. мат. журн. – 1987. – **28**, № 5. – С. 6–21.

Сліди узагальнених потенціалів

Б. Г. Пелешенко, Т. М. Семиренко
Дніпропетровський державний аграрно-економічний університет, м. Дніпро
dsaupelesh@mail.ru, semirenkot@mail.ru

Нехай через $\bar{E}\,(0,\infty)$ позначається симетричний простір функцій, заданих на півпрямій $(0,\infty)$, з фундаментальною функцією $\phi_E(t)$, $0<t<\infty$.

Через X позначимо простір з додатною мірою μ. Для кожної вимірною за мірою μ на X функції f через $\mu_f(t) =: \mu\{x\in X : f(x)>t\}\quad (t>0)$ позначається функція розподілу і через f^*_μ позначається незростаюча перестановка цієї функції, яка задана на $(0,\infty)$, тобто $f^*_\mu(s) =: \inf\{t\in(0,\infty) : \mu_f(t)<s\}$. Далі, через $E(X)$ позначається симетричний простір вимірних за мірою μ на X функцій з скінченною нормою $\|f\|_{E(X)} := \left\|f^*_\mu\right\|_{\bar{E}(0,\infty)}$.

Нехай X і Y – простори з відповідно додатними мірами μ та ν. Позначимо через $E^X = E(X)$ і $F^Y = F(Y)$ симетричні простори.

Додатна міра μ на $\mathbb{R}^n$ є розмірності a, якщо для будь-якої кулі K_r радіуса r виконується нерівність $\mu\,(K_r)\le C\,(\mu)\,r^a$, а стала $C(\mu)$ залежить тільки від μ. Нехай $k\,(x,y) = \frac{1}{g(|x-y|)}$, де $g:[0,\infty)\to[0,\infty)$, $g(0)=0$; показники розтягування фундаментальної функції $0<\gamma_g\le\delta_g<n$ і g зростає. Для міри μ позначимо символом $H^g_E(\mu)$ простір функцій u, поданих у вигляді

$$u(y) = \int k(x,y)f(x)dx,$$

де функція $f\in E^X$.

Покладемо $u^{**}_\nu(t) = \frac{1}{t}\int\limits_0^t u^*_\nu(\tau)d\tau$. Має місце наступна теорема.

Теорема. *Нехай $X=Y=\mathbb{R}^n$, μ є міра розмірності a, міра ν – розмірності b, $0<\gamma_g\le\delta_g<a$. Нехай $\phi(t) = \frac{t}{g\left((t)^{\frac{1}{a}}\right)}$ для $t>0$ і $\phi(0)=0$, G^X – такий симетричний простір з нормою $\|f\|_{G^X} := \left\|f^*_\mu\right\|_{\bar{G}(0,\infty)}$, що для границь розтягування фундаментальної функції $\phi_{\bar{G}}$ простору $\bar{G}(0,\infty)$ виконується нерівність*

$$\delta_\phi<\gamma_{\phi_{\bar{G}}}\le\delta_{\phi_{\bar{G}}}<1.$$

Тоді існує така стала $C>0$, що для всякої $f\in G^X$ виконується нерівність

$$\left\|\left[g\left(t^{\frac{1}{a}}\right)\right]t^{-1}(u)^{**}\left(t^{\frac{b}{a}}\right)\right\|_{\bar{G}(0,\infty)}\le C\,\|f^*(t)\|_{\bar{G}(0,\infty)}\,.$$

Наслідок. *Нехай $X=Y=\mathbb{R}^n$, μ є міра розмірності a, міра ν – розмірності b; $g(t)=t^{n-\alpha}$, де $0<\alpha<n$. Нехай $L_p(0,\infty)$, де $p>1$ – простір Лебега і $L_{q,p}(0,\infty)$ – простір функцій $h(t)$ з нормою $\|h\|_{L_{q,p}(0,\infty)} = \left\{q^{-2}(q-1)\int\limits_0^\infty[h^{**}(t)]^p\,t^{\frac{p}{q}-1}dt\right\}^{\frac{1}{p}}$. Якщо $L^X_p = L_p(X)$ та $L^Y_{q,p}(Y)$ – простори відповідно з нормами $\|f\|_{L^X_p} := \left\|f^*_\mu\right\|_{L_p(0,\infty)}$ та $\|u\|_{L^Y_{q,p}} := \|u^*_\nu\|_{L_{q,p(0,\infty)}}$, і $n-\alpha = \frac{a}{p'}+\frac{b}{q}$ ($p' = \frac{p}{p-1}$), то існує така стала $C>0$, що для всякої $f\in L^X_p$ виконується нерівність*

$$\|u^*_\nu\|_{L_{q,p(0,\infty)}}\le C\left\|f^*_\mu(t)\right\|_{L_p(0,\infty)}\,.$$

Задача Коші і А-деформація поверхні зі стаціонарним середнім геодезичним скрутом

Т. Ю. Подоусова[1], Н. В. Вашпанова[2]

[1]Одеська державна академія будівництва та архітектури, м. Одеса

[2]Одеська національна академія харчових технологій, м. Одеса

tatyana_top@mail.ru

Відомо [1], що на будь-якій регулярній поверхні S у довільній точці існує середній геодезичний скрут, який має представлення

$$2\tilde{H} = \frac{\rho_{11}g_{22} - 2\rho_{12}g_{12} + \rho_{22}g_{11}}{g_{11}g_{22} - g_{12}^2},$$

де $g_{\alpha\beta}$, $\rho_{\alpha\beta}$-коефіцієнти першої та четвертої квадратичних форм S відповідно.

Об'єктом дослідження є А-деформація регулярної поверхні, задана у E_3-просторі рівнянням $\overline{r} = \overline{r}(x^1, x^2)$, що не змінює середній геодезичний скрут.

Математична модель цієї задачі: диференціальне рівняння другого порядку з частинними похідними відносно невідомої функції $\mu(x^1, x^2) \in C^2$:

$$\rho^{k\alpha}\frac{\partial\mu}{\partial x^k \partial x^\alpha} + \left(\left(\frac{H}{K}\right)_\alpha c^{\alpha s}b_s^k + \frac{H_\alpha}{K}c^{ks}b_s^\alpha - \rho^{s\alpha}\Gamma_{s\alpha}^k\right)\frac{\partial\mu}{\partial x^k} + \left(\frac{H_k}{K}\right)_{,\alpha} c^{\alpha s}b_s^k\mu = 0.$$

Отримано наступний результат.

Теорема. *Будь-яка регулярна поверхня S класу C^4 ненульових повної та середньої кривин без омбілічних точок при наступних умовах* [2]

$$\mu|_{x^2=g(x^1)} = \varphi(x^1), \qquad \frac{\partial\mu}{\partial x^2}|_{x^2=g(x^1)} = F(x^1)$$

допускає нетривіальні А-деформації із стаціонарним середнім геодезичним скрутом. Тензорні поля виражаються через дві довільні функції кожна від однієї змінної та функцію $\mu(x^1, x^2) \in C^2(\mu \neq 0)$, яка є розв'язком рівняння

$$\frac{\partial\mu}{\partial x^1 \partial x^2} + a\frac{\partial\mu}{\partial x^1} + b\frac{\partial\mu}{\partial x^2} + c\mu = 0,$$

де a, b, c-відомі функції точки поверхні.

Наслідок. *При нетривіальній А-деформації регулярної поверхні без омбілічних точок із стаціонарним середнім геодезичним скрутом зберігаються довжини ліній геодезичного скруту.*

Слід відзначити, що кожна нетривіальна А-деформація поверхні, що не змінює середній геодезичний скрут, описує безмоментний напружений стан рівноваги оболонки з поверневим навантаженням

$$X = \left(\rho^{\alpha\beta}\frac{\partial\mu}{\partial x^\alpha} + H_\alpha c^{\beta\alpha}\mu\right)\overline{r}_\beta.$$

Знайдено геометричний зміст функції $\mu(x^1, x^2)$.

Проведена ілюстрація результатів на конкретних прикладах.

1. Вашпанова Т. Ю., Безкоровайна Л. Л. LGT-сітка поверхні та її властивості // Вісник Київського нац. ун-ту ім. Т. Шевченка. Серія: Фіз.-мат. науки науки. – 2010. – **2**. – С. 7–11.
2. Кошляков Н. С., Глинер Э. Б., Смирнов М. М. Уравнения в частных производных математической физики. – Москва: Высшая школа, 1970. – 712 с.

Про окружнісну сплайн-інтерполяцію плоских кривих

О. В. Поляков, О. М. Вакарчук

Дніпропетровський національний університет імені Олеся Гончара, м. Дніпро

ov_polyakov@mail.ru, alexeyvakarchuk@yandex.ua

Питання наближення плоских кривих поліноміальними кривими та сплайн-кривими, утвореними за допомогою дуг кіл, в різний час вивчались Бл. Сендовим, В. Поповим, М. Г. Ніколчевою, Ю. С. Зав'яловим, В. О. Леусом, В. А. Скороспєловим та іншими.

Нехай γ – замкнена гладка опукла крива, яка проходить через точки $P_0, P_1, ..., P_n$ (P_0=P_n); P_jP_{j+1} – відрізок, що з'єднує точки P_j та P_{j+1}, $|P_jP_{j+1}|$ – його довжина; β_{2j} та β_{2j+1} $(j = 0, 1, \ldots, n-1)$ — гострі кути між дотичними до γ в точках P_j та P_{j+1} відповідно і прямою, яка проходить через них. Запропоновано новий підхід до побудови гладкої інтерполяційної кривої $\lambda(\gamma)$, що складається із дуг кіл і проходить через точки $P_0, P_1, ..., P_{n-1}$ та має в них ті ж дотичні, що і крива γ. Також обчислено оцінки похибок інтерполяції у хаусдорфовій метриці ρ_H. Наведемо один з отриманих результатів.

Нехай $l(P_jP_{j+1})$ $(j = 0, 1, \ldots, n-1)$ — довжина найменшої дуги, що з'єднує точки P_j та P_{j+1}; $l(\gamma)$ – довжина кривої γ;

$$\max\{l(P_jP_{j+1})/|P_jP_{j+1}| : j = 0, 1, ..., n-1\} \le k, \tag{1}$$

де $k > 1$ деяке задане число.

Вважаємо, що на кривій γ задана натуральна параметризація, тобто γ має параметричне рівняння $x = x(s)$, $y = y(s)$, де $0 \le s \le l(\gamma)$. Нехай функції x та y є неперервно диференційованими на $[0, l(\gamma)]$. Позначимо

$$|\Delta_n(\gamma)| = \max\{|P_jP_{j+1}| : j = 0, 1, ..., n-1\};$$

$$G(\gamma) = \left\{\left(\max\left\{|x^{`}(s)| : 0 \le s \le l(\gamma)\right\}\right)^2 + \left(\max\left\{|y^{`}(s)| : 0 \le s \le l(\gamma)\right\}\right)^2\right\}^{1/2};$$

$$F(t, \tau) = \mathrm{tg}(t)/(1 + \sec(t) + \mathrm{tg}(t)\,\mathrm{cosec}(\tau) + \mathrm{tg}(t)\,\mathrm{ctg}(\tau));$$

$$K = \max\{F(\beta_{2j}, \beta_{2j+1}) : j = 0, 1, ..., n-1\} + G(\gamma)k.$$

Теорема. *Нехай γ – довільна замкнена гладка опукла крива на площині і її розбиття на n частин точками $P_0, P_1, ..., P_n$ $(P_0 = P_n)$ задовольняє умову* (1). *Тоді відхилення γ від інтерполяційної кривої $\lambda(\gamma)$ у хаусдорфовій метриці задовольняє нерівності*

$$\rho_H(\gamma; \lambda(\gamma)) \le K \cdot |\Delta_n(\gamma)|.$$

1. Завьялов Ю. С., Леус В. А., Скороспелов В. А. Сплайны в инженерной геометрии. – Москва: Машиностроение, 1985. — 220 с.
2. Николчева М. Г. Аппроксимация кривых на плоскости // Труды Международной конференции по конструктивной теории функций, Варна, 1–5 июня 1981 г. – София: Болг. АН, 1983. — С. 115—117.
3. Сендов Бл., Попов В. А. Аппроксимация кривых в плоскости полиномиальными кривыми // Доклады Болг. АН. — 1970. — **23**, № 6. – С. 639–642.

Про середньоквадратичні наближення вейвлетами Шенона-Котельникова

О. В. Поляков

Дніпропетровський національний університет імені Олеся Гончара, м. Дніпро

ov_polyakov@mail.ru

Нехай $L_2(\mathbb{R})$ – простір вимірних, сумовних в квадраті на $\mathbb{R}$ функцій зі звичайною нормою $\|f\|_2$.

Модулем гладкості m-го порядку будемо називати величину

$$\omega_m(f;t) = \sup_{|u|\le t} \Big\| \sum_{j=0}^{m} (-1)^{m-j} C_m^j f(x+jh \Big\|_2.$$

Відмітимо, що $\omega_1(f;t) = \omega(f;t)$.

Будемо розглядати послідовність підпросторів $\{V_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ простору $L_2(\mathbb{R})$, яку називають кратномастабним аналізом (КМА) (відповідні означення див, наприклад, [1]).

Нехай задано КМА, $\{V_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ який породжується масштабною функцією $\varphi(t)=\frac{\sin \pi t}{\pi t}$. Цей КМА породжує ортонормовані вейвлети Шенона-Котельникова $\psi^s(t)=2\varphi^s(2t-1)-\varphi^s(t-\frac{1}{2})$.

Для $k \in \mathbb{Z}$ покладемо

$$E\left(f;V_k\right)_2 = \inf_{h\in V_k} \|f-h\|_2$$

В роботі [1], використовуючи результати М. І. Черниха, було доведено, що для будь-якої функції $f \in L(\mathbb{R})$, яка не є константою (з точністю до множини міри нуль), і будь-якого натурального n має місце нерівність

$$E\left(f;V_{n-1}\right)_2 < \frac{1}{\sqrt{2}} \omega\left(f;\frac{1}{2^n}\right)_2. \tag{1}$$

При цьому константа в правій части нерівності (1) зменшена бути не може.

Пропонуємо наступні результати

Теорема. *Для довільної функції $f \in L_2(\mathbb{R})$, яка не є константою (з точністю до множини міри нуль), і будь-яких натуральних n і m має місце нерівність*

$$E\left(f;V_{n-1}\right)_2 \le \frac{1}{2^{\frac{m}{2}}} \left(2^{n-1}\pi \int_0^{\frac{1}{2^n}} \omega_m^{\frac{2}{m}}(f;t)_2 \sin(2^n \pi u) du\right)^{\frac{m}{2}}. \tag{2}$$

$$E\left(f;V_{n-1}\right)_2 < \frac{1}{2^{\frac{m}{2}}} \omega_m\left(f;\frac{1}{2^n}\right)_2. \tag{3}$$

.

Ці нерівності є деякими аналогами нерівностей, які встановлені В. В. Шалаєвим в періодичному випадку.

1. Бабенко В. Ф., Жиганова Г. С., Новикова Л. С. О неравенствах типа Джексона для наилучших L_2-приближений при помощи вейвлет // Вісник Дніпропетровського національного університету. Серія Математика. – 2006. – С. 3–8.

Про рівномірну збіжність рядів Фур'є до (ψ, β) похідних

Олена Радзієвська
Національний університет харчових технологій, м. Київ
radzl58@mail.ru

Для формулювання результату роботи наведемо необхідні означення. Нехай L_p – простір вимірних 2π-періодичних функцій $f(x)$, для яких

$$\int_0^{2\pi} |f(x)|^p dx < \infty,$$

де p фіксоване і $1 < p < \infty$;

$E_n(f)_p$ – найкраще наближення у метриці простору L_p функції f тригонометричними поліномами порядку не вище $n-1$;

через $f_\beta^\psi(x)$ позначимо (ψ, β)-похідну функції [1, с. 25], вважаючи що $-\infty < \beta < \infty$ і функція $\psi(t) > 0$ при $t \geq 1$.

Теорема. *Нехай $\psi(t) > 0$ – додатна незростаюча функція і найкращі наближення функції $f \in L_p$ задовольняють умову*

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^{\frac{1}{p}} \frac{E_k(f)_p}{k\psi(k)} < \infty.$$

Тоді у функції існує неперервна (ψ, β)-похідна, ряд Фур'є якої збігається до неї рівномірно.

1. Степанец А. И. Классификация и приближения периодических функцій. – Киев: Наукова думка, 1987. – 268 с.

Ентропійні числа і поперечники класів періодичних функцій двох змінних у просторі L_∞

А. С. Романюк
Інститут математики НАН України, м. Київ
romanyuk@imath.kiev.ua

У доповіді мова буде йти про точні за порядком оцінки ентропійних чисел, колмогоровських та лінійних поперечників класів періодичних функцій двох змінних $B^r_{p,\theta}$ Нікольського–Бєсова [1] у просторі L_∞.

Нехай $\mathcal{X}$ – банахів простір і $B_{\mathcal{X}}(y,R)$ – куля в $\mathcal{X}$ радіуса R з центром у точці y, тобто

$$B_{\mathcal{X}}(y,R)=\{x\in\mathcal{X}\ :\ \|x-y\|\le R\}.$$

Для компактної множини $V\subset\mathcal{X}$ її ентропійні числа означаються таким чином [2]

$$\varepsilon_k(V,\mathcal{X})=\inf\{\,\varepsilon:\ \exists y^1,\dots,y^{2^k}\in\mathcal{X}:\ V\subseteq\bigcup_{j=1}^{2^k}B_{\mathcal{X}}(y^j,\,\varepsilon)\}.$$

Колмогоровським поперечником центрально-симетричної множини W у просторі $\mathcal{X}$ називається величина [3]

$$d_M(W,\mathcal{X})=\inf_{L_M}\sup_{w\in W}\inf_{u\in L_M}\|w-u\|_{\mathcal{X}},$$

де L_M – підпростори розмірності M простору $\mathcal{X}$.

Лінійний поперечник центрально-симетричної множини W у просторі $\mathcal{X}$ визначається за формулою [4]

$$\lambda_M(W,\mathcal{X})=\inf_{A}\sup_{w\in W}\|w-Aw\|_{\mathcal{X}},$$

де інфімум береться по всіх лінійних операторах A, що діють в $\mathcal{X}$ і розмірність області значень яких не перевищує M.

Нехай L_q – простір функцій двох змінних 2π-періодичних за кожною змінною і зі скінченною нормою, яка визначається стандартним чином.

Справедливі такі твердження.

Теорема 1. *Нехай* $2\le p<\infty,\ 2\le\theta<\infty, r=(r_1,\,r_1),\ r_1>\frac{1}{2}$. *Тоді*

$$\varepsilon_M(B^r_{p,\theta},L_\infty)\asymp d_M(B^r_{p,\theta},L_\infty)\asymp M^{-r_1}(\log M)^{r_1+1-\frac{1}{\theta}}.$$

Теорема 2. *Нехай* $1\le\theta<\infty, r=(r_1,\,r_1),\ r_1>0$. *Тоді*

$$\varepsilon_M(B^r_{\infty,\theta},L_\infty)\asymp d_M(B^r_{\infty,\theta},L_\infty)\asymp \lambda_M(B^r_{\infty,\theta},L_\infty)\asymp M^{-r_1}(\log M)^{r_1+1-\frac{1}{\theta}}.$$

1. Лизоркин П. И., Никольский С. М. Пространства функций смешанной гладкости с декомпозиционной точки зрения // Тр. Мат. ин-та АН СССР, 1989. – **187**. – С. 143–161.
2. Höllig K. Diameters of classes of smooth functions // Quantitative approximation. N. Y.: Acad. Press, 1980. – P. 163–176.
3. Kolmogoroff A. Über die beste Annäherung von Functionen einer gegeben Functionenclasse // Ann. Math. – 1936. – **37**. – P. 107–111.
4. Тихомиров В. М. Поперечники множеств в функциональном пространстве и теория наилучших приближений // Успехи мат. наук. – 1960. – **15**, № 3. – С.81–120.

Гибридная дифференциально разностная краевая задача

А. М. Самойленко, А. А. Бойчук, С. М. Чуйко
Институт математики НАН Украины, г. Киев
Донбасский государственный педагогический университет, г. Славянск
boichuk@imath.kiev.ua, chujko-slav@inbox.ru

Математическое описание непрерывных процессов с кратковременными возмущениями, длительностью которых можно пренебречь, приводит к изучению краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений с импульсным воздействием [1–3]. Исследование дискретных процессов приводит к изучению краевых задач для разностных уравнений [4–6]. Предлагаемая гибридная дифференциально-разностная система содержит неизвестную кусочно-непрерывного аргумента, а также неизвестную дискретного аргумента, для нахождения которых предложена система обыкновенных дифференциальных уравнений, содержащая неизвестную дискретного аргумента, и система разностных уравнений, содержащая неизвестную кусочно-непрерывного аргумента.

Исследуем задачу о нахождении условий существования и построении решений

$$x(t) \in \mathbb{R}^n, \quad t \in \Omega \cup \Theta, \quad \Omega := [a, \tau_1[\cup [\tau_{p_1}, \tau_{p_1+1}[\cup ... \cup [\tau_{p_q}, \tau_{p_q+1}] \subset [a, b], \quad a := \tau_0 := \tau_{p_0},$$

$$y(k) := y(\tau_k) \in \mathbb{R}^m, \ \tau_k \in \Theta := \{a, \ \tau_1, \ \tau_2 \ , \ ... \ , \ \tau_{p_1}, \ \tau_{p_1+1} \ , \ ... \ , \ \tau_{p_2}, \ \tau_{p_2+1}, \ ... \ , \ b\}, \ \tau_{p_q+1} := b$$

гибридной нетеровой $(m + n \neq \mu + \nu)$ дифференциально-разностной краевой задачи

$$x'(t) = A(t, k)x(t) + B(t, k)y(k) + \varphi(t, k), \quad t \in \Omega, \tag{1}$$

$$y(k + 1) = C(k)x(k) + D(k)y(k) + \psi(k), \quad \tau_k \in \Theta, \tag{2}$$

$$\Delta x(\tau_{p_i+1}, \tau_{p_{i+1}}) := S_{\tau_{p_i+1}} x(\tau_{p_i+1} - 0) + b_{\tau_{p_i+1}}, \quad \ell x(\cdot) = \alpha \in \mathbb{R}^\mu, \quad \wp\, y(\cdot) = \beta \in \mathbb{R}^\nu. \tag{3}$$

Первую компоненту искомого решения $x(t) \in \mathbb{C}^1[\Omega_I]$ краевой задачи (1)–(3) ищем в классе непрерывно дифференцируемых на множестве $\Omega \subset [a, b]$ функций за исключением точек $\tau_1, \ \tau_{p_1+1}, \ \tau_{p_2+1}, \ ... \ , \ \tau_{p_{q-1}}$, в которых искомые решения $x(t)$ могут претерпевать ограниченные разрывы

$$\Delta x(\tau_{p_i+1}, \tau_{p_{i+1}}) := x(\tau_{p_{i+1}}) - x(\tau_{p_i+1} - 0) \leq \rho, \quad i = 0, \ 1, \ 2, \ ... \ , \ q - 1.$$

Вторую компоненту искомого решения $y(k) \in \mathbb{R}^m, \ \tau_k \in \Theta$ нетеровой краевой задачи (1)–(3) ищем среди ограниченных последовательностей. Матрицы

$$A(t, k) \in \mathbb{R}^{n\times n}, \quad B(t, k) \in \mathbb{R}^{n\times m},$$

а также вектор-функцию $\varphi(t, k) \in \mathbb{R}^n$ предполагаем непрерывными по первому и второму аргументу на отрезке $[a, b]$. Матрицы $C(k) \in \mathbb{R}^{m\times n}, \ D(k) \in \mathbb{R}^{m\times m}, \ S_{\tau_i} \in \mathbb{R}^{m\times m}$ и вектор-функцию $\psi(k) \in \mathbb{R}^m$ предполагаем ограниченными на множестве Θ функциями, $\ell x(\cdot)$ – линейный ограниченный векторный функционал: $\ell x(\cdot) : \ \mathbb{C}^1[\Omega_I] \to \mathbb{R}^\mu$, $\wp\, y(\cdot)$ – линейный ограниченный векторный функционал, определенный на пространстве ограниченных на множестве Θ вектор-функций:

$$\wp\, y(\cdot) : \ \{y(k) : \ \Theta \to \mathbb{R}^m\} \to \mathbb{R}^\nu, \quad \mu \neq \nu.$$

Поставленная гибридная краевая задача (1)–(3) является обобщением краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений с импульсным воздействием [1–3, 7, 8],

краевых задач для разностных уравнений [4–6], а также различных краевых задач для систем обыкновенных дифференциальных уравнений [3].

Нами предложен алгоритм построения решений задачи Коши для гибридной системы дифференциально-разностных уравнений (1), (2), а также условия разрешимости и схема построения решений линейной нетеровой краевой задачи для гибридной системы дифференциально - разностных уравнений (1)–(3) в критическом и некритическом случае.

Поскольку множество $\Omega \cup \Theta$ является частным случаем множества типа "time scale" , постольку полученные результаты могут быть получены аналогично [9, 10]. Схема исследования гибридных краевых задач для систем дифференциально-разностной уравнений может быть перенесена на задачи о бифуркация решений краевых задач для дифференциально-разностных систем с импульсным воздействием [3], на гибридные дифференциально-разностные краевые задачи для систем с импульсным воздействием более общего вида [7, 8], матричные дифференциально-разностные краевые задачи для систем с импульсным воздействием [11–14], а также – на на гибридные дифференциально-разностные краевые задачи для систем с импульсным воздействием в абстрактных пространствах [3, 15].

1. Мышкис А. Д., Самойленко А. М. Системы с толчками в заданные моменты времени // Математ. сборник. Новая серия. – 1967. – **74 (2)**. – С. 202–208.
2. Самойленко А. М., Перестюк Н. А. Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием. – Киев: Вища шк., 1987. – 287 с.
3. Boichuk A. A., Samoilenko A. M. Generalized inverse operators and Fredholm boundary-value problems (2nd edition). – Berlin; Boston: De Gruyter, 2016. – 298 p.
4. Гельфанд А. О. Исчисление конечных разностей. – Москва: ГИФМЛ. – 1959. – 400 с.
5. Мартынюк Д. И. Лекции по качественной теории разностных уравнений. – Киев: Наук. думка. – 1972. – 246 с.
6. Бойчук А. А. Краевые задачи для систем разностных уравнений // Укр. мат. журн. – 1997. – **49**, № 6. – С. 832–835.
7. Chuiko S. M. A Generalized Green operator for a boundary value problem with impulse action // Differential Equations. – 2001. – **37**, No 8. – P. 1189–1193.
8. Чуйко С. М. Оператор Грина краевой задачи с импульсным воздействием // Доклады Академии Наук. – 2001. – **379**, № 2. – С. 170–172.
9. Agarwal R. P., Bohner M. Basic calculus on time scales and some of its applications // Results Math. – 1999. – **35**, No 1–2. – P. 3–22.
10. Agarwal R. P., Bohner M., Boichuk A., Strakh O. Fredholm boundary value problems for perturbed systems of dynamic equations on time scales // Math. Methods in the Applied Sciences. – 2014. – **38**, No 4. – P. 4178–4186.
11. Campbell S. L. Singular Systems of differential equations. – San Francisco – London – Melbourne: Pitman Advanced Publishing Program. – 1980. – 178 p.
12. Chuiko S. M. The Green's operator of a generalized matrix linear differential-algebraic boundary value problem // Sib. Math. J. – 2015. –**56**, No 4. – P. 752–760.
13. Boichuk A. A., Krivosheya S. A. Criterion of the solvability of matrix equations of the Lyapunov type // Ukr. Math. J. – 1998. – **50**, No 8. – P. 1162–1169.
14. Chuiko S. M. Generalized Green Operator of Noetherian boundary-value problem for matrix differential equation // Russian Mathematics. – 2016. – **60**, No 8. – P. 64–73.
15. Чуйко С. М. Линейная краевая задача для матричного дифференциального уравнения / О семинаре по качественной теории дифференциальных уравнений в Московском университете // Дифференц. уравнения. – 2016. – **52**, № 11. – С. 1578–1579.

Наближення узагальнених інтегралів Пуассона інтерполяційними тригонометричними поліномами

А. С. Сердюк
Інститут математики НАН України, м. Київ
serdyuk@imath.kiev.ua

Нехай L_p, $1 \le p < \infty$, – простір 2π–періодичних сумовних у p–му степені на $[0, 2\pi)$ функцій з нормою $\|\varphi\|_p = \left(\int\limits_0^{2\pi} |\varphi(t)|^p dt\right)^{1/p}$, а L_∞ – простір 2π–періодичних вимірних і суттєво обмежених функцій з нормою $\|\varphi\| = \operatorname{ess\,sup}\limits_t |\varphi(t)|$.

Через $C^{\alpha,r}_{\beta,p}$, $\alpha > 0$, $r > 0$, $1 \le p \le \infty$, $\beta \in \mathbb{R}$, позначимо множину 2π–періодичних функцій $f(x)$, які при всіх $x \in \mathbb{R}$ зображуються згорткою

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} \varphi(x-t) P_{\alpha,r,\beta}(t)dt, \quad a_0 \in \mathbb{R}, \quad \varphi \perp 1, \quad \|\varphi\|_p \le 1, \tag{1}$$

з фіксованим ядром $P_{\alpha,r,\beta}(t)$ вигляду

$$P_{\alpha,r,\beta}(t) = \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\alpha k^r} \cos\left(kt - \frac{\beta\pi}{2}\right), \quad r > 0, \quad \alpha > 0, \quad \beta \in \mathbb{R}. \tag{2}$$

Функцію f у рівності (1) називають узагальненим інтегралом Пуассона функції φ, а ядро $P_{\alpha,r,\beta}$ вигляду (2) – узагальненим ядром Пуассона.

Для будь–якої функції $f \in C^{\alpha,r}_{\beta,p}$ через $\widetilde{S}_{n-1}(f;x)$, $n \in \mathbb{N}$, позначимо тригонометричний поліном порядку $n-1$, який інтерполює f по системі рівномірно розподілених вузлів $x_k^{(n-1)} = \frac{2k\pi}{2n-1}$, $k \in \mathbb{Z}$, тобто такий, що $\widetilde{S}_{n-1}(f; x_k^{(n-1)}) = f(x_k^{(n-1)})$, $k \in \mathbb{Z}$.

Розглядається апроксимативна характеристика

$$\widetilde{\mathcal{E}}_n(C^{\alpha,r}_{\beta,p}; x) = \sup_{f \in C^{\alpha,r}_{\beta,p}} \left| f(x) - \widetilde{S}_{n-1}(f;x) \right|, \quad x \in \mathbb{R} \tag{3}$$

і досліджується питання про асимптотичну поведінку величин (3) при $n \to \infty$ у випадку, коли $r \in (0,1)$, $\alpha > 0$, $1 \le p < \infty$ і $\beta \in \mathbb{R}$.

Теорема. *Нехай $r \in (0,1)$, $\alpha > 0$, $1 \le p < \infty$ і $\beta \in \mathbb{R}$. Тоді для всіх $x \in \mathbb{R}$ при $p = 1$ має місце асимптотична при $n \to \infty$ рівність*

$$\widetilde{\mathcal{E}}_n(C^{\alpha,r}_{\beta,1}; x) = e^{-\alpha n^r} n^{1-r} \left| \sin\frac{2n-1}{2}x \right| \left(\frac{2}{\pi\alpha r} + \frac{O(1)}{n^{\min\{r, 1-r\}}} \right), \tag{4}$$

а при $1 < p < \infty$ – рівність

$$\widetilde{\mathcal{E}}_n(C^{\alpha,r}_{\beta,p}; x) = e^{-\alpha n^r} n^{\frac{1-r}{p}} \left| \sin\frac{2n-1}{2}x \right| \left(\frac{2\|\cos t\|_{p'}}{\pi^{1+\frac{1}{p'}} (\alpha r)^{\frac{1}{p}}} F\left(\frac{1}{2}, \frac{3-p'}{2}; \frac{3}{2}; 1\right)^{\frac{1}{p'}} + \frac{O(1)}{n^{\min\{r, \frac{1-r}{p}\}}} \right), \tag{5}$$

в якій $F(a,b;c;z)$ – гіпергеометрична функція Гаусса, $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$. У формулах (4) і (5) $O(1)$ – величини, що рівномірно обмежені по x, n і β.

Наведена теорема доповнює результати робіт [1]–[3], в яких було знайдено сильну асимптотику величин (3) при $x \in \mathbb{R}$, $\beta \in \mathbb{R}$ і $\alpha > 0$ у випадках, коли $r \ge 1$ і $1 \le p \le \infty$ та коли $r \in (0,1)$ і $p = \infty$.

1. Степанець О. І., Сердюк А. С. Оцінка залишку наближення інтерполяційними тригонометричними многочленами на класах нескінченно диференційовних функцій // Теорія наближення функцій та її застосування: Праці Ін–ту математики НАН України. – 2000. – **31**. – С. 446–460.
2. Степанец А. И., Сердюк А. С. Приближение периодических аналитических функций интерполяционными тригонометрическими многочленами // Укр. мат. журн. – 2000. – **52**, № 12. – С. 1689–1701.
3. Сердюк А. С. Наближення інтерполяційними тригонометричними поліномами на класах періодичних аналітичних функцій // Укр. мат. журн. – 2012. – **64**, № 5. – С. 698–712.

Наближення класів згорток періодичних функцій лінійними методами, побудованими на основі їх коефіцієнтів Фур'є–Лагранжа

А. С. Сердюк, І. В. Соколенко
Інститут математики НАН України, м. Київ
serdyuk@imath.kiev.ua, sokol@imath.kiev.ua

Нехай C і L_p, $1 \le p \le \infty$, – простори 2π-періодичних функцій зі стандартними нормами $\|\cdot\|_C$ і $\|\cdot\|_p$. Нехай, далі, $\psi = \psi(k)$ і $\bar\beta = \beta_k$, $k = 1, 2, \ldots$, – довільні послідовності дійсних чисел. Позначимо через $C^{\psi}_{\bar\beta,2}$ (див. [1]) множину всіх 2π-періодичних функцій f, які зображуються за допомогою згортки

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} \varphi(x-t)\Psi_{\bar\beta}(t)dt, \quad a_0 \in \mathbb{R}, \quad \varphi \in B^0_2 := \{h \in L_2 : \ \|h\|_2 \le 1, \ h \perp 1\},$$

$$\Psi_{\bar\beta} \sim \sum_{k=1}^{\infty} \psi(k)\cos\left(kt - \frac{\beta_k\pi}{2}\right), \quad \sum_{k=1}^{\infty}\psi^2(k) < \infty.$$

Нехай $f \in C$ і $\widetilde{S}_n(f;x)$ – тригонометричний поліном порядку n, що інтерполює $f(x)$ у точках $x_k^{(n)} = 2k\pi/(2n+1)$, $k = 0, 1, \ldots, 2n$, тобто

$$\widetilde{S}_n(f;x) = \frac{a_0^{(n)}}{2} + \sum_{k=1}^{n}(a_k^{(n)}\cos kx + b_k^{(n)}\sin kx),$$

де $a_k^{(n)}$ і $b_k^{(n)}$ – коефіцієнти Фур'є–Лагранжа функції f (див.[2, с. 128-129]).

Розглянемо лінійні поліноміальні методи наближення функцій f з класів $C^{\psi}_{\bar\beta,2}$, які побудовані на основі їх коефіцієнтів Фур'є–Лагранжа $a_k^{(n)}$ і $b_k^{(n)}$. Нехай $\Lambda = \|\lambda_k^{(n)}\|$ і $\mathrm{M} = \|\mu_k^{(n)}\|$, $n = 0, 1, \ldots,$ $k = 0, 1, \ldots,$ – нескінченні трикутні матриці дійсних чисел такі, що

$$\begin{array}{lll} \lambda_k^{(n)} = 0, & \mu_k^{(n)} = 0, & k = n+1, n+2, \ldots, \\ \lim\limits_{n\to\infty}\lambda_k^{(n)} = 1, & \lim\limits_{n\to\infty}\mu_k^{(n)} = 0, & k = 1, 2, \ldots \end{array} \tag{1}$$

Позначимо через $\widetilde{U}_n = \widetilde{U}_n(\Lambda;\mathrm{M})$ лінійний оператор, який кожній функції $f \in C$ ставить у відповідність тригонометричний поліном вигляду

$$\widetilde{U}_n(f;x) = \frac{a_0^{(n)}}{2} + \sum_{k=1}^{n}\left(\lambda_k^{(n)}(a_k^{(n)}\cos kx + b_k^{(n)}\sin kx) + \mu_k^{(n)}(-b_k^{(n)}\cos kx + a_k^{(n)}\sin kx)\right).$$

Теорема. *Нехай послідовність дійсних чисел $\psi(k)$ така, що $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\psi^2(k)<\infty$, а матриці $\Lambda=\|\lambda_k^{(n)}\|$ і $\mathrm{M}=\|\mu_k^{(n)}\|$ задовольняють умови (1). Тоді для довільних $\bar\beta=\beta_k,\beta_k\in\mathbb{R}$, і $n\in\mathbb{N}$ у кожній точці $x\in\mathbb{R}$*

$$\widetilde{\mathcal{E}}_n(C^{\psi}_{\bar\beta,2};\Lambda;\mathrm{M};x)=\sup_{f\in C^{\psi}_{\bar\beta,2}}|f(x)-\widetilde{U}_n(f;x)|=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\Bigg(\sum_{k=1}^{n}\Big((1-\lambda_k^{(n)})^2+(\mu_k^{(n)})^2\Big)\psi^2(k)+$$

$$+\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{k=m(2n+1)-n}^{m(2n+1)+n}\Bigg(\Big(\cos m(2n+1)x-\lambda^{(n)}_{|k-m(2n+1)|}\Big)^2+\Big(\sin m(2n+1)x+\mu^{(n)}_{|k-m(2n+1)|}\Big)^2\Bigg)\psi^2(k)\Bigg)^{1/2}.$$

1. Степанец А. И. Методы теории приближений: В 2 ч. – Киев: Ин–т математики НАН Украины, 2002. – Ч.1. – 427 с. (Труды Ин–та математики НАН Украины; Т. 40).
2. Степанец А. И. Методы теории приближений: В 2 ч. – Киев: Ин–т математики НАН Украины, 2002. – Ч.2. – 468 с. (Труды Ин–та математики НАН Украины; Т. 40).

Інтерференція у випадку наближення операторами Валле Пуссена функцій, визначених на дійсній осі

Є. С. Сілін

Донбаський державний педагогічний університет, м. Слов'янськ

silin-evgen@meta.ua

У [1] О. І. Степанець запропонував наступне означення класів $\widehat{C}^{\overline{\psi}}_{\infty}$. Нехай $\widehat{L}$ — простір функцій f, заданих на дійсній осі $\mathbb{R}$, які мають скінченну норму: $||f||_{\widehat{L}}=\sup\limits_{a\in\mathbb{R}}\int_a^{a+2\pi}|f(t)|\,dt$, а $\widehat{C}$ — підмножина неперервних функцій з $\widehat{L}$. $\mathfrak{A}$ — множина функцій $\psi(t)$, які зростають та неперервні на $[0,1)$, $\psi(t)\geq 0$, $\psi(0)=0$, $\psi(t)$ опукла на $[1,\infty)$, $\lim_{t\to\infty}\psi(t)=0$ і $\psi'(t+0)$ має обмежену варіацію на $[0;\infty)$. $\mathfrak{A}':=\{\psi\in\mathfrak{A}:\int_1^{\infty}\psi(t)/t\,dt<\infty\}$. Покладемо $\overline{\psi}:=\psi_{1+}+i\psi_{2-}$, де ψ_{1+} і ψ_{2-} — парне та непарне продовження функцій $\psi_1\in\mathfrak{A}$ і $\psi_2\in\mathfrak{A}'$ відповідно.

Якщо $f\in\widehat{C}$ можна подати у наступному вигляді:

$$f(x)=A+\int_{\mathbb{R}}\varphi(x+t)\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}}\overline{\psi}(s)e^{-ist}dsdt:=A+\varphi*\widehat{\overline{\psi}},$$

де A — стала, $\int_{\mathbb{R}}=\lim_{a\to\infty}\int_{-a}^{a}$, $\varphi:\operatorname{ess\,sup}|\varphi(t)|\leq 1$, то кажуть, що функція $\varphi=:f^{\overline{\psi}}$ є $\overline{\psi}$-похідною функції f (див. [1]), при цьому пишуть $f\in\widehat{C}^{\overline{\psi}}_{\infty}$. Для $f\in\widehat{C}^{\overline{\psi}}_{\infty}$ також означимо *оператор Валле Пуссена*

$$V_{\sigma,h}(f;x)=A+f^{\overline{\psi}}*\widehat{\lambda_{\sigma,h}\overline{\psi}}(x),$$

де $0<h=h(\sigma)<\sigma<\infty$,

$$\lambda_{\sigma,h}(t)=\begin{cases}1, & 0\leq|t|\leq\sigma-h,\\ \frac{\sigma-|t|}{h}, & \sigma-h\leq|t|\leq\sigma,\\ 0, & \sigma\leq|t|.\end{cases}$$

Множина $\mathfrak{A}$ неоднорідна відносно швидкості спадання до нуля функцій $\psi(t)$, тому виділяють наступні підмножини [1]: $\mathfrak{A}_0 := \{\psi \in \mathfrak{A} : 0 < t/(\eta(t) - t) < K_1\}$, де $\eta(t) = \psi^{-1}\left(\frac{1}{2}\psi(t)\right)$ та $\overline{F} := \{\psi \in \mathfrak{A} : \eta'(t) \leq K_2\}$. Тут, і далі, K_1, $K_2, \ldots$ — деякі додатні сталі, які не залежать від t.

Предметом нашого дослідження є суми

$$\Sigma_{\sigma,h,m} = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i [f(x + \delta_i) - V_{\sigma,h}(f; x + \delta_i)],$$

де $\alpha_i(\sigma)$ та $\delta_i(\sigma)$ — величини, які рівномірно обмежені по σ.

Теорема 1. *Нехай $\psi_1 \in \mathfrak{A}_0$, $\psi_2 \in \mathfrak{A}'_0$, $\mathfrak{A}'_0 := \mathfrak{A}_0 \cap \mathfrak{A}'$, дійсні числа $\sigma > h \geq 1$ такі, що $0 \leq \lim\limits_{\sigma\to\infty}(h/\sigma) < 1$, а величини α_i та δ_i рівномірно обмежені по σ і h. Тоді*

$$\sup_{f\in\widehat{C}^{\overline{\psi}}_{\infty}} ||\Sigma_{\sigma,h,m}||_{\widehat{C}} = |\overline{\psi}(\sigma)|\left(\frac{4}{\pi^2}R_m \ln\frac{\sigma}{h} + \frac{2}{\pi}|\sum_{i=1}^{m}\int_{\sigma}^{\infty}\frac{\psi_2(t)}{t}\cos\left(\frac{a\delta_i}{\sigma}\right)dt|\right)+$$

$$+O(1)|\overline{\psi}(\sigma)|, \quad \sigma \to \infty,$$

де

$$R_m = \sqrt{(\sum_{i=1}^{m}\alpha_i\cos(\sigma\delta_i + \gamma))^2 + (\sum_{i=1}^{m}\alpha_i\sin(\sigma\delta_i + \gamma))^2}, \tag{1}$$

$\gamma = \operatorname{arctg}\frac{\psi_2(\sigma)}{\psi_1(\sigma)}$, *O(1) — величина, рівномірно обмежена щодо σ, h.*

Теорема 2. *Нехай функції $\psi_i \in \overline{F}$, $i = 1, 2$, і задовольняють умову $K_3 \leq \frac{\eta(\psi_1;t)-t}{\eta(\psi_2;t)-t} \leq K_4$, $t \geq 1$, а величини α_i та δ_i рівномірно обмежені по σ і h. Тоді для дійсних чисел $\sigma > h \geq 1$ таких, що $\eta(\psi;\sigma) - \sigma < \frac{h}{\pi}$ (в якості $\eta(\psi;\sigma)$ може виступати $\eta(\psi_1;\sigma)$ чи $\eta(\psi_2;\sigma)$) при $\sigma \to \infty$ та*

$$\sup_{f\in\widehat{C}^{\overline{\psi}}_{\infty}} ||\Sigma_{\sigma,h,m}(f;x;\alpha;\delta)||_{\widehat{C}} = \frac{4|\overline{\psi}(\sigma)|}{\pi^2}R_m\left|\ln\frac{\eta(\sigma)-\sigma}{h}\right| + O(1)(|\overline{\psi}(\sigma - h)|), \tag{2}$$

де величина R_m означена співвідношенням (1), $\gamma = \operatorname{arctg}\frac{\psi_2(\sigma)}{\psi_1(\sigma)}$, O(1) — величина, рівномірно обмежена щодо σ, h. Якщо ж $\eta(\psi;\sigma) - \sigma > \frac{h}{\pi}$, то (2) має місце за умови, що $\delta_i = O((\eta(\psi;\sigma) - \sigma)^{-1})$, $i = \overline{1, m}$.

Зазначимо, що, за певних умов, $R_m = 0$ [2].

1. Степанец А. И. Методы теории приближений: В 2 ч. – Киев: Ин–т математики НАН Украины, 2002. – Ч.2. – 468 с. (Труды Ин–та математики НАН Украины; Т. 40).
2. Дрозд В.В. Одновременное приближение функций и их производных операторами Фурье в среднем // Одновременное приближение функций и их производных операторами Фурье. – Киев, 1989. – С. 46–58. – (Препр. / АН Украины. Ин-т математики; 89.17).

Найкращі білінійні наближення узагальнених класів Нікольського–Бєсова періодичних функцій багатьох змінних

К.В. Соліч
Східноєвропейський національний університет імені Лесі Українки, Луцьк
sokava@mail.ru

Досліджуються оцінки найкращих білінійних наближень класів $B^{\Omega}_{p,\theta}$ періодичних функцій багатьох змінних у просторі L_q при деяких співвідношеннях між параметрами p, q та θ. Класи $B^{\Omega}_{p,\theta} \subset L_p(\pi_d)$ визначаються за допомогою: $\Omega(t)$, $t = (t_1, ..., t_d) \in \mathbb{R}^d_+$, – мажорантної функції для модуля неперервності l–го порядку ($l \in \mathbb{N}$) функції $f \in L_p(\pi_d)$; числових параметрів p і θ, $1 \le p, \theta \le \infty$. Крім того функція $\Omega(t)$ задовольняє, так звані, умови Барі – Стєчкіна (S^{α}) і (S_l).

Означимо досліджувану апроксимативну характеристику. Нехай $L_q(\pi_{2d})$, $q = (q_1, q_2)$, – множина функцій $f(x, y)$, $x, y \in \mathbb{R}$, зі скінченною мішаною нормою

$$\|f(x, y)\|_{q_1,q_2} = \| \, \|f(\cdot, y)\|_{q_1} \|_{q_2},$$

де норма обчислюється спочатку в просторі $L_{q_1}(\pi_d)$ по змінній $x \in \mathbb{R}$, а потім від результату – по змінній $y \in \mathbb{R}$ в просторі $L_{q_2}(\pi_d)$. Для класу функцій $F \subset L_q(\pi_{2d})$ означимо найкраще білінійне наближення порядку M:

$$\tau_M(F)_{q_1,q_2} := \sup_{f \in F} \inf_{u_j(x), v_j(y)} \|f(x, y) - \sum_{j=1}^{M} u_j(x) v_j(y)\|_{q_1,q_2},$$

де $u_j \in L_{q_1}(\pi_d)$, $v_j \in L_{q_2}(\pi_d)$ і $\tau_0(f)_{q_1,q_2} := \|f(x, y)\|_{q_1,q_2}$.

Зауважимо, що у випадку $q_1 = q_2 = q$ будемо писати $\tau_M(F)_q$.

Теорема 1. *Нехай* $1 \le \theta \le \infty$ *і* $\Omega(t) \in \Phi_{\alpha,l}$, $\alpha > \alpha(p, q)$, *де*

$$\alpha(p, q) = \begin{cases} 2d(\frac{1}{p} - \frac{1}{q})_+, & 1 \le p \le q \le 2 \quad \textit{або} \\ & 2 \le q \le p \le \infty; \\ \max\{\frac{2d}{p}; d\}, & 2 \le p \le q \le \infty \quad \textit{або} \\ & 1 \le p < 2 < q \le \infty. \end{cases}$$

Тоді для $M \in \mathbb{N}$ *справедливі порядкові співвідношення*

$$\tau_M(B^{\Omega}_{p,\theta})_q \asymp \begin{cases} \Omega(M^{-\frac{1}{d}}) M^{\frac{1}{p} - \frac{1}{q}}, & 1 \le p \le q \le 2, \\ \Omega(M^{-\frac{1}{d}}), & 2 \le p \le q \le \infty \quad \textit{або} \\ & 2 \le q \le p \le \infty, \\ \Omega(M^{-\frac{1}{d}}) M^{\frac{1}{p} - \frac{1}{2}}, & 1 \le p < 2 < q \le \infty. \end{cases}$$

Зауваження. У випадку $\Omega(t) = t^r$, $r > \alpha(p, q)$, теорема 1 доведена в роботі [1].

1. Романюк А.С., Романюк В.С. Наилучшие билинейные приближения функций из пространств Никольского–Бесова // Укр. мат. журн. – 2012. – **64**, № 5. – С. 685–697.

Найкраще сумісне наближення пари функцій різних класів

В. А. Сорич, Н. М. Сорич
Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка,
Кам'янець-Подільський, Україна
nina.sorich@gmail.com

Нехай L_∞, C та L – простори 2π-періодичних відповідно вимірних та суттєво обмежених, неперервних на всій осі і сумовних на $(0;2\pi)$ функцій $f(\cdot)$ із нормами $\|f\|_\infty = \operatorname{esssup}|f(x)|$, $\|f\|_C = \max|f(x)|$ і $\|f\|_L = \|f\|_1 = \int_0^{2\pi}|f(x)|dx$, а $\mathcal{U}_\infty^0$ та $\mathcal{U}_1^0$ – одиничні кулі просторів L_∞ та L, елементи яких ортогональні константі.

Через $B_{r,\beta}(t)$, $\mathcal{P}_\gamma^q(t)$ позначимо відомі ядра Бернуллі та Пуассона ($r>0$, $0<q<1$, $\beta,\gamma\in\mathbb{R}$). Через $W_{\beta,\infty}^r$ ($W_{\beta,1}^r$), $P_{\gamma,\infty}^q$ ($P_{\gamma,1}^q$) позначимо класи згорток елементів із $\mathcal{U}_\infty^0$ ($\mathcal{U}_1^0$) із ядрами $B_{r,\beta}(t)$, $\mathcal{P}_\gamma^q(t)$ відповідно. Нехай

$$\sum\nolimits_n(\varphi;t_{n-1,i};x) = ((\varphi * B_{r,\beta})(x) - t_{n-1,1}(x)) + \left((\varphi * \mathcal{P}_\gamma^q)(x) - t_{n-1,2}(x)\right),$$

де символ "$*$" – згортка двох функцій.

Розглядається задача знаходження точних значень величин

$$E_{n,2}(\mathcal{U}_\infty^0)_C = \sup_{\varphi\in\mathcal{U}_\infty^0}\inf_{t_{n-1,i}}\left\|\sum\nolimits_n(\varphi;t_{n-1,i};x)\right\|_C,$$

$$E_{n,2}(\mathcal{U}_1^0)_L = \sup_{\varphi\in\mathcal{U}_1^0}\inf_{t_{n-1,i}}\left\|\sum\nolimits_n(\varphi;t_{n-1,i};x)\right\|_L,$$

які приймемо за найкраще сумісне наближення класів $W_{\beta,\infty}^r$ та $P_{\gamma,\infty}^q$ ($W_{\beta,1}^r$ та $P_{\gamma,1}^q$) в просторі C (L).

При певних обмеженнях на параметри r, β, γ справедлива рівність

$$E_{n,2}(\mathcal{U}_\infty^0)_C = E_{n,2}(\mathcal{U}_1^0)_L =$$

$$= \frac{4}{\pi}\left|n^{-r}\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{\sin\left[(2\nu+1)\theta_n\pi - \frac{\beta\pi}{2}\right]}{(2\nu+1)^{r+1}} + \sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{q^{(2\nu+1)n}}{2\nu+1}\sin\left[(2\nu+1)\theta_n\pi - \frac{\gamma\pi}{2}\right]\right|,$$

де $\theta_n\in[0;1)$ єдиний корінь рівняння

$$n^{-r}\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{\cos\left[(2\nu+1)\theta_n\pi - \frac{\beta\pi}{2}\right]}{(2\nu+1)^{r}} + \sum_{\nu=0}^{\infty}q^{(2\nu+1)n}\cos\left[(2\nu+1)\theta_n\pi - \frac{\gamma\pi}{2}\right] = 0.$$

У багатьох важливих випадках значення величин $E_{n,2}(\mathcal{U}_\infty^0)_C$, $E_{n,2}(\mathcal{U}_1^0)_L$ менші за суму найкращих наближень класів $W_{\beta,\infty}^r$ ($W_{\beta,1}^r$) та $P_{\gamma,\infty}^q$ ($P_{\gamma,1}^q$) отриманих в класичних роботах.

1. Степанец А. И. Методы теории приближений: В 2 ч. – Киев: Ин–т математики НАН Украины, 2002. – Ч.1. – 427 с. (Труды Ин–та математики НАН Украины; Т. 40).

Критерій елемента найкращого наближення функцій багатьох змінних у просторі $L_{p_1,\ldots,p_{n-1},1}$

В. М. Трактинська, М. Є. Ткаченко

Дніпропетровський національний університет імені Олеся Гончара, м. Дніпро

victoria-dp@yandex.ua, mtkachenko2009@ukr.net

Нехай $L_{p_1,\ldots,p_n}(1 \le p_i < \infty, 1 \le i \le n)$ – простір дійснозначних сумовних на $K = I_1 \times I_2 \times \ldots \times I_n$, де $I_i = [a_i, b_i], 1 \le i \le n$, функцій n-змінних $f(x) = f(x_1, \ldots, x_n)$ із нормою

$$\|f\|_{p_1,\ldots,p_n} = \left[\int\limits_{I_n} \ldots \left[\int\limits_{I_2} \left[\int\limits_{I_1} |f(x)|^{p_1} dx_1 \right]^{\frac{p_2}{p_1}} dx_2 \right]^{\frac{p_3}{p_2}} \ldots dx_n \right]^{\frac{1}{p_n}}.$$

Покладемо

$$|f|_{p_k,\ldots,p_i} = \left[\int\limits_{I_i} \ldots \left[\int\limits_{I_{k+1}} \left[\int\limits_{I_k} |f(x)|^{p_k} dx_k \right]^{\frac{p_{k+1}}{p_k}} dx_{k+1} \right]^{\frac{p_{k+2}}{p_{k+1}}} \ldots dx_i \right]^{\frac{1}{p_i}},$$

де $1 \le k < i \le n$.

Нехай $H_m = \mathrm{span}\{\varphi_1, \ldots, \varphi_m\}$ для деякої системи лінійно незалежних функцій $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_m\} \subset L_{p_1,\ldots,p_{n-1},1}$, $(1 < p_i < \infty, i = 1, 2, ..., n-1)$. Тоді елементи множини H_m (поліноми P_m) подають у вигляді

$$P_m = \sum_{k=1}^{m} \lambda_k \varphi_k.$$

Розглядається випадок наближення функцій у метриці простору $L_{p_1,\ldots,p_{n-1},1}$, $(1 < p_i < \infty$, $i = 1, 2, ..., n-1)$ поліномами з множини H_m.

Введемо функцію

$$G_0 = |f - P_m^*|^{p_1 - 1} |f - P_m^*|_{p_1}^{p_2 - p_1} \cdot \ldots \cdot |f - P_m^*|_{p_1,\ldots,p_{n-2}}^{p_{n-1} - p_{n-2}} |f - P_m^*|_{p_1,\ldots,p_{n-1}}^{1 - p_{n-1}} \mathrm{sgn}(f - P_m^*),$$

де $P_m^* \in H_m$.

Позначимо $E^* = \{x_n \in I_n : |f - P_m^*|_{p_1,\ldots,p_{n-1}} = 0\}$.

Нехай $f \in L_{p_1,\ldots,p_{n-1},1}$, але $f \notin H_m$. Тоді має місце така теорема.

Теорема. *Для того щоб поліном P_m^* був поліномом найкращого наближення для функції f у метриці $L_{p_1,\ldots,p_{n-1},1}$ $(1 < p_i < \infty, i = 1, 2, ..., n-1)$, необхідно і достатньо, щоб для будь-якого полінома $P_m \in H_m$ виконувалася умова*

$$\left| \int\limits_K P_m \cdot G_0 dx_1 ... dx_n \right| \le \int\limits_{E^*} |P_m|_{p_1,\ldots,p_{n-1}} dx_n.$$

Ця теорема поширює результат Г.С. Смирнова [1] (критерій елемента найкращого наближення в просторі $L_{p,1}(I_1 \times I_2)$) на випадок наближення функцій багатьох змінних.

1. Смирнов Г. С. Критерий полинома наилучшего приближения в пространствах $L_{p,1}$, $L_{1,q}$ // Укр. мат. журн. – 1973. – **25**, № 3. – С.415–419.

Про асимптотичну поведінку точних верхніх меж відхилень бігармонічних інтегралів Пуассона від функцій з класів $W^r_\beta H^\alpha$

Ю. І. Харкевич, І. В. Кальчук
Східноєвропейський національний університет імені Лесі Українки, Луцьк
kharkevich.juriy@gmail.com, kalchuk_i@ukr.net

Нехай C — простір 2π-періодичних неперервних функцій, у якому норма задається за допомогою рівності $\|f\|_C = \max\limits_t |f(t)|$.

Нехай $r > 0$ і β — фіксоване дійсне число. Якщо ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^r \left(a_k \cos\left(kx + \frac{\beta\pi}{2}\right) + b_k \sin\left(kx + \frac{\beta\pi}{2}\right)\right)$$

є рядом Фур'є деякої функції $\varphi \in L$, то цю функцію називають (r,β)–похідною функції f в розумінні Вейля–Надя і позначають через f^r_β. Множину усіх функцій f, котрі задовольняють таку умову, позначають через W^r_β [1].

Якщо $f \in W^r_\beta$, і при цьому $f^r_\beta \in H^\alpha$, тобто f^r_β задовольняє умову Ліпшиця порядку α:

$$|f^r_\beta(x+h) - f^r_\beta(x)| \le |h|^\alpha, \quad 0 < \alpha \le 1, \ 0 \le h \le 2\pi, \ x \in \mathbb{R},$$

то кажуть, що f належить до класу $W^r_\beta H^\alpha$.

Величину

$$B_\delta(f;x) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t+x)\left\{\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(1 + \frac{k}{2}\left(1 - e^{-\frac{2}{\delta}}\right)e^{-\frac{k}{\delta}}\right)\cos kt\right\} dt, \quad \delta > 0,$$

принято називати бігармонічним інтегралом Пуассона функції f.

В даній роботі вивчається асимптотична поведінка при $\delta \to \infty$ величин

$$\mathcal{E}(W^r_\beta H^\alpha; B_\delta)_C = \sup_{f \in W^r_\beta H^\alpha} \|f(x) - B_\delta(f;x)\|_C.$$

Теорема *Нехай $r > 0$, $0 \le \alpha < 1$, $r + \alpha \le 2$, $\beta \in \mathbb{R}$. Тоді при $\delta \to \infty$ має місце рівність*

$$\mathcal{E}(W^r_\beta H^\alpha; B_\delta)_C = \frac{\theta(\alpha)}{\delta^{r+\alpha}} A(\alpha,\tau) + O\left(\frac{1}{\delta^{1+r}} + \frac{1}{\delta^2}\right),$$

$$2^{\alpha-1} \le \theta(\alpha) \le 1,$$

де величина $A(\alpha,\tau)$ означена співвідношенням

$$A(\alpha,\tau) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} |t|^\alpha \left|\int\limits_0^\infty \tau(u)\cos\left(ut + \frac{\beta\pi}{2}\right) du\right| dt$$

і для неї справедлива оцінка

$$A(\alpha,\tau) = \begin{cases} O(1), & r + \alpha < 2, \\ O(\ln\delta), & r + \alpha = 2. \end{cases}$$

1. *Nagy B.* Über gewise Extremalfragen bei transformierten trigonometrischen Entwicklungen, I. Periodischer Fall, Berichte der math. phys. KL. Akademie, Leipzig, 90 (1938), 103–134.

ПОЛУЧЕНИЕ ОЦЕНОК ОБЛАСТИ УСТОЙЧИВОСТИ ПРИ ИССЛЕДОВАНИИ КВАДРАТИЧНЫХ СИСТЕМ

Д. Я. Хусаинов, С. В. Камратов
Киевский национальный университет имени Т. Г. Шевченка, г. Киев
khusainov@unicyb.kiev.ua

Одним из универсальных методов исследования устойчивости решений нелинейных динамических систем является второй метод Ляпунова. Общепринятым является сведение исследуемого решения к нулевому решению и исследование устойчивости нулевого положения равновесия. В то же время, бывает, что нелинейная система не имеет нулевого решения, а имеется некоторая область, находящаяся в окрестности начала координат, которая является асимптотически устойчивой. И требуется провести оценку этой области. В частности, значительное число "странных аттракторов" представляют собой асимптотически устойчивые множества, находящиеся в некоторой окрестности нуля. С использованием метода квадратичных функций Ляпунова можно провести оценку области устойчивости, а именно, вычислить эллипс, внутри которого они находятся.

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений с квадратичной правой частью. Запишем ее в универсальном векторно-матричном виде

$$\dot{x} = Ax + X^T Bx, \tag{1}$$

где

$$x \in R^n,\ A \in R^{n\times n}, \quad X^T = \left[X_1^T, X_2^T,\ \dots\ ,\ X_n^T\right],$$

$$B^T = \left[B_1^T, B_2^T,\ \dots\ ,\ B_n^T\right], \quad X_i \in\ R^{n\times n}, \quad B_i \in\ R^{n\times n}.$$

Здесь X_i^T – матрицы, у которых на $i-$й строке стоят единицы, остальные элементы нулевые, B_i, $i = \overline{1,n}$ – симметричные матрицы. Для систем с нелинейностью этого вида полная производная функции Ляпунова имеет вид

$$\frac{d}{dt}V(x) = \dot{x}Hx + x^T H\dot{x} = \left[Ax + X^T Bx\right]^T Hx + x^T H\left[Ax + X^T Bx\right] = -x^T Cx + S_3(x)$$

$$S_3(x) = x^T(X^T B + BX)\,x. \tag{2}$$

Здесь $S_3(x)$ – кубическая форма вида (2). Область гарантированной асимптотической устойчивости нулевого положения равновесия имеет вид внутренности эллипса

$$U_s = \left\{x \in R^n : |x| < \frac{\lambda_{\min}(C)}{2\,|H|\,|B|}\right\}.$$

В ряде случаев система не имеет нулевого решения, т.е. $R(0) \neq 0$. В этом случае функция Ляпунова $V(x) = x^T Hx$ позволяет оценить область притяжения $U_{stab}(x)$ нелинейной системы.

1. Давидов В. Ф., Хусаінов Д. Я. Мажорантні оцінки розв'язків диференціальних систем з квадратичною правою частиною // Вісник Київського ун-ту. Серія: Фізико-математичні науки, 1994. – С. 206–211.

МАТРИЧНА ДИФЕРЕНЦІАЛЬНО АЛГЕБРАЇЧНА КРАЙОВА ЗАДАЧА З ІМПУЛЬСНИМ ВПЛИВОМ

С. М. Чуйко, М. В. Дзюба

Донбаський державний педагогічний університет, м. Слов'янськ

chujko-slav@inbox.ru

Знайдено конструктивні необхідні і достатні умови існування, а також конструкція узагальненого оператора Гріна для побудови розв'язків [1–3]

$$Z(t) \in \mathbb{C}^1_{\alpha\times\beta}\{[a,b]\setminus\{\tau_i\}_I\} := \mathbb{C}^1\{[a,b]\setminus\{\tau_i\}_I\}\otimes\mathbb{R}^{\alpha\times\beta}, \quad i=1,\ 2,\ \dots\ ,\ p$$

матричної диференціально-алгебраїчної крайової задачі [4, 5]

$$\mathcal{A}Z'(t) = \mathcal{B}Z(t) + F(t), \quad t\neq\tau_i, \quad \mathcal{L}Z(\cdot) = \mathfrak{A}, \quad \mathfrak{A}\in\mathbb{R}^{\mu\times\nu}. \tag{1}$$

Тут

$$\mathcal{A}Z(t):\ \mathbb{C}^1_{\alpha\times\beta}\{[a,b]\setminus\{\tau_i\}_I\}\to\mathbb{C}_{\gamma\times\delta}\{[a,b]\setminus\{\tau_i\}_I\} := \mathbb{C}^1\{[a,b]\setminus\{\tau_i\}_I\}\otimes\mathbb{R}^{\gamma\times\delta}$$

– матричний диференціально-алгебраїчний оператор, який за означенням, для будь-яких скалярних функцій $\zeta(t),\xi(t)\in\mathbb{C}^1\{[a,b]\setminus\{\tau_i\}_I\}$ і будь-яких сталих матриць $\Xi_1,\Xi_2\in\mathbb{R}^{\alpha\times\beta}$ забезпечує рівність

$$\mathcal{A}(\zeta'(t)\Xi_1+\xi'(t)\Xi_2)(t) = \zeta'(t)\mathcal{A}(\Xi_1)(t)+\xi'(t)\mathcal{A}(\Xi_2)(t).$$

Аналогічно, алгебраїчний матричний оператор

$$\mathcal{B}Z(t):\ \mathbb{C}^1_{\alpha\times\beta}\{[a,b]\setminus\{\tau_i\}_I\}\to\mathbb{C}^1_{\gamma\times\delta}\{[a,b]\setminus\{\tau_i\}_I\}$$

за означенням для будь-яких скалярних функцій $\zeta(t),\xi(t)\in\mathbb{C}^1\{[a,b]\setminus\{\tau_i\}_I\}$ і будь-яких сталих матриць $\Xi_1,\Xi_2\in\mathbb{R}^{\alpha\times\beta}$ забезпечує рівність

$$\mathcal{B}(\zeta(t)\Xi_1+\xi(t)\Xi_2)(t) = \zeta(t)\mathcal{B}(\Xi_1)(t)+\xi(t)\mathcal{B}(\Xi_2)(t).$$

Тут також $F(t)\in\mathbb{C}_{\gamma\times\delta}\{[a,b]\setminus\{\tau_i\}_I\}$ – неперервна при $t\neq\tau_i$ матриця та $\mathcal{L}Z(\cdot)$ – лінійний обмежений матричний функціонал:

$$\mathcal{L}Z(\cdot) := \sum_{i=0}^{p}\ell_i z(\cdot):\ \mathbb{C}^1_{\alpha\times\beta}\{[a,b]\setminus\{\tau_i\}_I\}\to\mathbb{R}^{\mu\times\nu}, \quad \alpha\neq\beta\neq\gamma\neq\delta\neq\mu\neq\nu, \quad i=1,\ 2,\ \dots\ ,\ p,$$

де

$$\ell_i z(\cdot):\ \mathbb{C}^1_{\alpha\times\beta}[\tau_i,\tau_{i+1}[\to\mathbb{R}^{\mu\times\nu}, \quad i=0,\ \dots\ ,\ p-1, \quad \tau_0:=a, \quad \ell_p z(\cdot):\ \mathbb{C}^1_{\alpha\times\beta}[\tau_p,b]\to\mathbb{R}^{\mu\times\nu}$$

– лінійні обмежені матричні функціонали.

1. Boichuk A. A., Samoilenko A. M. Generalized inverse operators and Fredholm boundary-value problems (2-d edition). – Berlin; Boston: De Gruyter, 2016. – 298 p.
2. Самойленко А. М., Перестюк Н. А. Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием. – Киев: Вища шк., 1987. – 287 с.
3. Чуйко С. М. Оператор Грина краевой задачи с импульсным воздействием // Дифференц. уравнения. – 2001. – **37**, № 8. – С. 1132–1135.
4. Campbell S. L. Singular Systems of differential equations. – San Francisco–London–Melbourne: Pitman Advanced Publishing Program. – 1980. – 178 p.
5. Chuiko S. M. The Green's operator of a generalized matrix linear differential-algebraic boundary value problem // Sib. Math. J. – 2015. – **56**, No 4. – P. 752–760.

Автономна періодична задача для рівняння типу Хілла

С. М. Чуйко, О. В. Нєсмєлова
Донбаський державний педагогічний університет, м. Слов'янськ
chujko-slav@inbox.ru

Досліджено задачу про знаходження умов існування і побудову розв'язків [1]

$$y(t,\varepsilon):\ y(\cdot,\varepsilon)\in\mathbb{C}^2[0,T_1(\varepsilon)],\ T_1(0)=2\pi,\ y(t,\cdot)\in\mathbb{C}[0,\varepsilon_0]$$

автономної періодичної задачі для слабконелінійного рівняння типу Хілла [2]

$$y''(t,\varepsilon)+y(t,\varepsilon)=\varepsilon\cdot Y(y(t,\varepsilon),\varepsilon). \tag{1}$$

Розв'язок періодичної задачі для рівняння (1) шукаємо у малому околі періодичного розв'язку $y_0(t)\in\mathbb{C}^2[0,2\pi]$ породжуючої періодичної задачі для рівняння

$$y_0''(t)+y_0(t)=0.$$

Тут $Y(y,\varepsilon)$ – нелінійна скалярна функція, зокрема, поліном від невідомої y та малого параметра ε, визначеного на відрізку $[0,\varepsilon_0]$. Нами розглянуто випадок наявності кратних коренів рівняння для породжуючих амплітуд

$$F(c_0,\beta_0):=\int_0^{2\pi}H_r(s)\Big[Y(y_0(s,c_0),\varepsilon)-2\cdot\beta_0\cdot y_0(s,c_0)\Big]\,ds=0,\quad H_r(t):=\begin{bmatrix}\sin t\\ -\cos t\end{bmatrix}.$$

Невідома $\beta(\varepsilon)$ визначає період [3]

$$T(\varepsilon):=2\pi(1+\varepsilon\beta(\varepsilon)),\quad \beta(\varepsilon)\in\mathbb{C}[0,\varepsilon_0],\quad \beta(0):=\beta_0$$

розв'язку рівняння (1).

Для знаходження розв'язків поставленої задачі у частинному критичному випадку отримані конструктивні необхідні і достатні умови існування, а також побудована збіжна ітераційна схема. Запропонована ітераційна техніка дозволяє знаходження розв'язків автономної періодичної задачі для рівняння типу Хілла, які є періодичними функціями. Як приклад, досліджено задачу про знаходження періодичних розв'язків слабконелінійного рівняння Дюффінга

$$y''+y=\varepsilon\cdot y^3.$$

Одержані нами другі наближення до періодичного розв'язку рівняння Дюффінга значно перевершують за точністю наближення, отримані за традиційним методом простих ітерацій, а також технікою Бубнова–Гальоркіна. Для оцінки точності знайдених наближень до періодичних розв'язків рівняння Дюффінга використовувались величини нев'язок цих наближень у вихідних рівняннях.

1. Boichuk A. A., Samoilenko A. M. Generalized inverse operators and Fredholm boundary-value problems (2-d edition). – Berlin; Boston: De Gruyter, 2016. – 298 p.
2. Якубович В. А., Старжинский В. М. Линейные дифференциальные уравнения с периодическими коэффициентами и их приложения. – Москва: Наука, 1972. – 720 с.
3. Чуйко С. М., Бойчук И. А. Автономная нетерова краевая задача в критическом случае // Нелінійні коливання. – 2009. – **12**, № 3. – С. 405–416.

Умови існування єдиного положення рівноваги задачі Коші для лінійних матричних диференціально-алгебраїчних рівнянь

С. М. Чуйко, Д. В. Сисоєв
Донбаський державний педагогічний університет, м. Слов'янськ
chujko-slav@inbox.ru

Встановлено достатні умови існування єдиного положення рівноваги

$$Z(t) \in \mathbb{C}^1_{\alpha\times\beta}[a,b] := \mathbb{C}^1[a,b] \otimes \mathbb{R}^{\alpha\times\beta}, \quad \mathcal{A}Z'(t) = 0, \quad \mathcal{B}Z(t) + \mathcal{F}(t) = 0$$

задачі Коші для диференціально-алгебраїчних рівнянь

$$\mathcal{A}Z'(t) = \mathcal{B}Z(t) + \mathcal{F}(t), \quad Z(a) = \mathfrak{A}, \quad \mathfrak{A} \in \mathbb{R}^{\alpha\times\beta}. \tag{1}$$

Тут [1–3]

$$\mathcal{A}Z'(t) := \sum_{i=1}^{p} S_i(t)Z'(t)R_i(t), \quad \mathcal{B}Z(t) := \sum_{j=1}^{q} \Phi_j(t)Z(t)\Psi_j(t)$$

– лінійні матричні оператори,

$$S_i(t), \Phi_i(t) \in \mathbb{C}_{\gamma\times\alpha}[a,b], \quad R_i(t), \Psi_j(t) \in \mathbb{C}_{\beta\times\delta}[a,b], \quad F(t) \in \mathbb{C}_{\gamma\times\delta}[a,b]$$

– неперервні матриці; крім того $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{N}$ – довільні натуральні числа.

Матричне диференціально-алгебраїчне рівняння (1) узагальнює традиційні постановки, як для матричних диференціальних рівнянь [4, 5], так і для диференціально-алгебраїчних рівнянь [2, 3, 5]. Запропонована конструктивна схема побудови положення рівноваги задачі Коші у випадку, коли лінійний оператор L, відповідний однорідній частині рівняння не має оберненого.

Дослідження крайових задач, як матричних, так і диференціально-алгебраїчних, грунтується на дослідженні алгебраїчних матричних рівнянь, зокрема, результати, отримані для матричного диференціального рівняння Ляпунова [6] та результати дослідження матричних рівнянь [5, 6, 7], у тому числі, рівнянь типу Ляпунова та Сильвестра.

1. Boichuk A. A., Samoilenko A. M. Generalized inverse operators and Fredholm boundary-value problems (2-d edition). – Berlin; Boston: De Gruyter, 2016. – 298 p.
2. Campbell S. L. Singular Systems of differential equations. – San Francisco–London–Melbourne: Pitman Advanced Publishing Program. – 1980. – 178 p.
3. Chuiko S. M. The Green's operator of a generalized matrix linear differential-algebraic boundary value problem // Sib. Math. J. – 2015. – **56**, No 4. – P. 752–760.
4. Boichuk A. A., Krivosheya S. A. A Critical Periodic Boundary Value Problem for a Matrix Riccati Equations // Differential Equations. – 2001. – **37**, No 4. – P. 464–471.
5. Chuiko S. M. Generalized Green Operator of Noetherian boundary-value problem for matrix differential equation // Russian Mathematics. – 2016. – **60**, No 8. – P. 64–73.
6. Boichuk A. A., Krivosheya S. A. Criterion of the solvability of matrix equations of the Lyapunov type // Ukr. Math. J. – 1998. – **50**, No 8. – P. 1162–1169.
7. Chuiko S. M. A generalized matrix differential-algebraic equation // Journal of Mathematical Sciences (N.Y.). – 2015. – **210**, No 1. – P. 9–21.

50 ЛЕТ ТЕОРИИ ИМПУЛЬСНЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ

С. М. Чуйко, Е. В. Чуйко, А. С. Чуйко
Донбасский государственный педагогический университет, г. Славянск
chujko-slav@inbox.ru

В 2017 году исполняется 50 лет конструктивной теории импульсных краевых задач, а именно, – 50 лет с момента публикации статьи [1]. Как известно, исследование импульсных краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений, традиционное для киевской школы нелинейных колебаний, было начато в 1937 году Н. М. Крыловым и Н. Н. Боголюбовым с изучения механизма часов, в котором затухание колебаний, вызываемое трением, компенсировалось периодическими толчками анкера [2]. Кроме того, в 1937 году разрывные механические, а также электрические колебания обсуждались в известной монографии А. А. Андронова, А. А. Витта и С. Э. Хайкина [3]. Заметим, что исследование импульсных краевых задач, предшествовавшее публикации статьи [1], носило постановочный характер и ограничивалось перечислением примеров импульсных процессов в механике, электронике, физиологии [3,4]; кроме того, исследование импульсных краевых задач было сосредоточено преимущественно на линейных системах [5].

Таким образом, в 2017 году исполняется 50 лет формулировке общих положений теории краевых задач для нелинейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений с импульсным воздействием в фиксированные моменты времени [1]. В частности были получены условия единственности решения задачи Коши, а также условия существования единственного периодического решения задачи Коши для нелинейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений с импульсным воздействием в фиксированные моменты времени.

Дальнейшее развитие теории краевых задач для нелинейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений с импульсным воздействием в фиксированные моменты времени прежде всего связано с монографиями А. М. Самойленко и Н .А. Перестюка [6], а также А. М. Самойленко и А. А. Бойчука [7]. Исследованию теории краевых задач для линейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений с импульсным воздействием в фиксированные моменты времени в виде произвольных линейных функционалов, в отличие от статьи [1], заданных не обязательно в окрестности моментов импульсного воздействия посвящена статья [8].

1. Мышкис А. Д., Самойленко А. М. Системы с толчками в заданные моменты времени // Математ. сборник. Новая серия. – 1967. – **74 (2)**. – С. 202–208.
2. Крылов Н. М., Боголюбов Н. Н. Введение в нелинейную механику. – Киев: Изд-во АН УССР, 1937. – 365 с.
3. Андронов А. А., Витт А. А., Хайкин С. Э. Теория колебаний. – Москва: Наука, 1981. – 568 с.
4. Fitzhugh R. Impulses and physiological states in models of nerve membrane // Biophysical Journal. – 1961. – No 1. – P. 445–466.
5. Мильман В. Д., Мышкис А. Д. Об устойчивости движения при наличии толчков // Сиб. мат. журн. – 1960. – **1**, № 2. – С. 233–237.
6. Самойленко А. М., Перестюк Н. А. Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием. – Киев: Вища шк., 1987. – 287 с.
7. Boichuk A. A., Samoilenko A. M. Generalized inverse operators and Fredholm boundary-value problems. – Utrecht; Boston: VSP, 2004. – 317 P.
8. Chuiko S. M. A Generalized Green operator for a boundary value problem with impulse action // Differential Equations. – 2001. – **37**, No 8. – P. 1189 – 1193.

Гріді-алгоритми на класах (ψ, β)-диференційовних функцій

Вікторія Шкапа
Київський національний університет технологій та дизайну, м. Київ
vshkapa@ukr.net

Досліджуються гріді-алгоритми на класах $L^{\psi}_{\beta,p}$ періодичних функцій однієї змінної у просторі L_q для деяких співвідношень між параметрами p та q. Класи $L^{\psi}_{\beta,p}$ було введено О.І. Степанцем (див., наприклад, [1, с. 25]). Зазначимо, що у випадку $\psi(|k|) = |k|^{-r},\ r > 0,\ k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ вони збігаються з класами Вейля-Надя $W^r_{\beta,p}$ (див., наприклад, [1, с. 25]).

Через B позначимо множину додатних і незростаючих функцій ψ, для кожної з яких існує така стала $C > 0$, що $\frac{\psi(t)}{\psi(2t)} \leq C,\ t \in \mathbb{N}$.

L_q – простір вимірних 2π-періодичних функцій f зі стандартною нормою.

Нехай $\{\hat{f}(k(l))\}_{l=1}^{\infty}$ – коефіцієнти Фур'є $\{\hat{f}(k)\}_{k\in\mathbb{Z}}$ функції $f \in L_1$, впорядковані у порядку незростання їх модулів, тоді величину

$$G_m(L^{\psi}_{\beta,p})_q := \sup_{f\in L^{\psi}_{\beta,p}} \left\| f(x) - \sum_{l=1}^{m} \hat{f}(k(l)) e^{ik(l)x} \right\|_q$$

називають величиною наближення в просторі L_q класу $L^{\psi}_{\beta,p}$ за допомогою гріді апроксимант. З історією дослідження даної величини для деяких важливих функціональних класів можна ознайомитися у монографії [2].

Сформулюємо отримані результати.

Теорема 1. *Нехай $1 < p < q \leq 2$, $\psi \in B$, $\beta \in \mathbb{R}$ і, крім того, існує $\varepsilon > 0$ таке, що послідовність $\psi(t)t^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}+\varepsilon},\ t \in \mathbb{N}$, не зростає. Тоді справедлива порядкова оцінка*

$$G_m(L^{\psi}_{\beta,p})_q \asymp \psi(m) m^{\frac{1}{p}-\frac{1}{2}}.$$

Теорема 2. *Нехай $1 \leq q \leq 2 \leq p < \infty$, $\psi \in B$, $\beta \in \mathbb{R}$. Тоді справедливе наступне співвідношення*

$$G_m(L^{\psi}_{\beta,p})_q \asymp \psi(m).$$

Зауваження. Поклавши в теоремах 1, 2 $\psi(|k|) = |k|^{-r}$, отримаємо відповідні результати для величин $G_m(W^r_{p,\beta})_q$, які раніше було отримано В. М. Темляковим у роботі [3].

1. Степанец А. И. Классификация и приближение периодических функций. – Київ: Наук. думка, 1987. – 286 с.
2. Temlyakov V. N. Greedy approximation. – Cambridge: Cambridge University Press, 2011. – 418 p.
3. Temlyakov V. N. Greedy algorithms with regard to multivariate systems with special structure // Constr. Approx. – 2000. – **16**. – P. 399–425.

Наближення функцій з класів Нікольського–Бєсова цілими функціями

Сергій Янченко
Інститут математики НАН України, м. Київ
yan.sergiy@gmail.com

У доповіді мова буде йти про точні за порядком оцінки наближення функцій з класів $S^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}B(\mathbb{R}^d)$ [1] за допомогою цілих функцій експоненціального типу з носіями їх перетворення Фур'є у східчастому гіперболічному хресті, $p=1$.

Нехай $L_q(\mathbb{R}^d)$, $1\leqslant q\leqslant\infty$, – простір вимірних функцій $f(\boldsymbol{x})=f(x_1,\dots,x_d)$ визначених на $\mathbb{R}^d$, $d\geqslant 1$, зі стандартною нормою $\|\cdot\|_q$.

Вектору $\boldsymbol{r}=(r_1,\dots,r_d)$, $0<r_1=\dots=r_\nu<r_{\nu+1}\leqslant\dots\leqslant r_d$, поставимо у відповідність вектор $\boldsymbol{\gamma}=(\gamma_1,\dots,\gamma_d)$, $\gamma_j=r_j/r_1$, $j=\overline{1,d}$. Для $\boldsymbol{s}\in\mathbb{Z}^d_+$, $n\in\mathbb{N}$, покладемо $Q^\gamma_n=\bigcup_{(\boldsymbol{s},\boldsymbol{\gamma})\leqslant n}Q^*_{2^{\boldsymbol{s}}}$, де $Q^*_{2^{\boldsymbol{s}}}=\big\{\boldsymbol{\lambda}=(\lambda_1,...,\lambda_d):\eta(s_j)2^{s_j-1}\leqslant|\lambda_j|<2^{s_j},\lambda_j\in\mathbb{R},\ j=\overline{1,d}\big\}$, та позначимо

$$G\big(Q^\gamma_n\big)=\Big\{f\in L_q(\mathbb{R}^d):\ \operatorname{supp}\mathfrak{F}f\subseteq Q^\gamma_n\Big\}.$$

Множина Q^γ_n породжує в $\mathbb{R}^d$, так званий, східчастий гіперболічний хрест.

Для $f\in L_q(\mathbb{R}^d)$, $1\leqslant q\leqslant\infty$, означимо величину

$$E\big(f,G\big(Q^\gamma_n\big)\big)_q:=E_{Q^\gamma_n}(f)_q:=\inf_{g\in G(Q^\gamma_n)}\|f(\cdot)-g(\cdot)\|_q, \tag{1}$$

яка називається найкращим наближенням функції f цілими функціями з множини $G\big(Q^\gamma_n\big)$. Якщо $F\subset L_q(\mathbb{R}^d)$ – деякий функціональний клас, то покладемо $E_{Q^\gamma_n}(F)_q=\sup_{f\in F}E_{Q^\gamma_n}(f)_q$.

Далі, для $f\in L_q(\mathbb{R}^d)$, $1\leqslant q\leqslant\infty$, розглянемо

$$S_{Q^\gamma_n}f(\boldsymbol{x})=S_{Q^\gamma_n}(f,\boldsymbol{x})=\sum_{(\boldsymbol{s},\boldsymbol{\gamma})\leqslant n}\delta^*_{\boldsymbol{s}}(f,\boldsymbol{x}),\quad \boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^d,$$

де $\delta^*_{\boldsymbol{s}}(f,\boldsymbol{x})=\mathfrak{F}^{-1}(\chi_{Q^*_{2^{\boldsymbol{s}}}}\cdot\mathfrak{F}f)$, $\chi_{Q^\gamma_n}$ – характеристична функцію множини Q^γ_n, а $\mathfrak{F}f$ і $\mathfrak{F}^{-1}f$ відповідно пряме й обернене перетворення Фур'є функції f. Означимо такі величини

$$\mathcal{E}_{Q^\gamma_n}(f)_q=\|f(\cdot)-S_{Q^\gamma_n}f(\cdot)\|_q\ \text{ та }\ \mathcal{E}_{Q^\gamma_n}(F)_q=\sup_{f\in F}\mathcal{E}_{Q^\gamma_n}(f)_q.$$

Теорема 1. *Нехай $1<q<\infty$ і $r_1>1-\frac{1}{q}$. Тоді для $1\leqslant\theta\leqslant\infty$ мають місце порядкові співвідношення*

$$E_{Q^\gamma_n}(S^{\boldsymbol{r}}_{1,\theta}B)_q\asymp\mathcal{E}_{Q^\gamma_n}(S^{\boldsymbol{r}}_{1,\theta}B)_q\asymp 2^{-n\left(r_1-1+\frac{1}{q}\right)}n^{(\nu-1)\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{\theta}\right)_+},$$

де $a_+=\max\{a;\ 0\}$.

Теорема 2. *Нехай $r_1>1$, $1\leqslant\theta\leqslant\infty$. Тоді має місце порядкове співвідношення*

$$\mathcal{E}_{Q^\gamma_n}\big(S^{\boldsymbol{r}}_{1,\theta}B\big)_\infty\asymp 2^{-n(r_1-1)}n^{(\nu-1)\left(1-\frac{1}{\theta}\right)}.$$

Точні за порядком оцінки величини (1) для класів Нікольського $S^{\boldsymbol{r}}_1H(\mathbb{R}^d)$ (теорема 1) встановлено в [2]. Результат теореми 2 є новим і для класів Нікольського.

1. Аманов Т. И. Теоремы представления и вложения для функциональных пространств $S^{(r)}_{p,\theta}B(\mathbb{R}_n)$ и $S^{(r)*}_{p,\theta}B$, $(0\leqslant x_j\leqslant 2\pi;\ j=1,\dots,n)$ // Тр. Мат. ин-та АН СССР. – 1695. – **77**. – С. 5–34.
2. Heping W., Yongsheng S. Approximation of functions in $\widetilde{S^r_1L}$, S^r_1H by entire functions // Approx. Theory and its Appl. – 1999. – **11**, No 4. – P. 88–93.

Квазілінійні диференціальні рівняння і системи еліптичного типу в дивергентній формі

Микола Іванович Яременко

Національний технічний університет України "КПІ імені Ігоря Сікорського" , м. Київ

math.kiev@gmail.com

Розглянемо в усьому евклідовому просторі R^l квазілінійну диференціальну систему еліптичного типу в дивергентній формі, вигляду:

$$\lambda u^k - \sum_{i,j=1,...,l} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(x,\vec{u})\frac{\partial}{\partial x_j}u^k\right) + b^k(x,\vec{u},\nabla\vec{u}) = f^k, \quad k=1,...,N, \tag{1}$$

де невідомою є вектор-функція $u^k(x) = \left(u^1,....,u^N\right)$, $\lambda > 0$ дійсне число і $f(x) = f^k = (f^1,...,f^N)$– задана вектор-функція. Функція $b(x,u,\nabla u) = b^k(x,u^k,\nabla u^k)$ – вектор-функція довжини N трьох змінних: вектора розмірності l, вектора розмірності N, матриці розмірності $l \times N$. Вимірна матриця $a_{ij}(x,u)$ розмірності $l \times l$ задовольняє умову еліптичності. Узагальненим (слабким) розв'язком в $W_1^p(R^l,d^lx)$ називається елемент $u(x)$ який задовольняє інтегральну тотожність:

$$\lambda\langle u,v\rangle + \left\langle \sum_{i,j=1,...l} a_{ij}\frac{\partial}{\partial x_j}u, \frac{\partial}{\partial x_i}v\right\rangle + \langle b,v\rangle = \langle f,v\rangle,$$

для будь-якого елементу $v \in W_{1,0}^q(R^l,d^lx)$. Виходячи з цього означення за лівими частинами системи побудуємо скалярну форму $h_\lambda^p : \left(\overset{N}{\underset{1}{\times}} W_1^p(R^l,d^lx)\right) \times \left(\overset{N}{\underset{1}{\times}} W_1^q(R^l,d^lx)\right) \to R$,

$$h_\lambda^p(u,\nu) \equiv \lambda\langle u,v\rangle + \langle \nabla v \circ a \circ \nabla u\rangle + \langle b(x,u,\nabla u),v\rangle,$$

яку будемо вважати визначеною для всіх елементів $u \in W_1^p(R^l,d^lx)$, $v \in W_1^q(R^l,d^lx)$. Для кожного фіксованого вектора $u \in W_1^p$ форма $h_\lambda^p(u,v)$ є неперервним лінійним (по $v \in W_1^q$) функціоналом над W_1^q, а отже кожному $u \in W_1^p$ ставиться у відповідність елемент спряженого до W_1^q простору W_{-1}^p, тобто існує відображення $A^p : W_1^p \to W_{-1}^p$. Оператор $A^p : W_1^p \to W_{-1}^p$ діє таким чином: $h_\lambda^p(u,v) = \langle A^p(u),v\rangle$.

Теорема. *Нехай система* (1) *задовольняє умовам:* 1) $b(x,y,z)$ *є вимірною векторною функцією своїх аргументів і* $b \in L_{loc}^1(R^l)$; 2) *вектор-функція* $b(x,y,z)$ *майже скрізь задовольняє нерівності:* $|b(x,u,\nabla u)| \le \mu_1(x)|\nabla u| + \mu_2(x)|u| + \mu_3(x)$, *функції* $\mu_1^2 \in PK_\beta(A)$, $\mu_2 \in PK_\beta(A)$, $\mu_3 \in L^p(R^l)$. 3) *приріст вектор-функції* $b(x,y,z)$ *майже скрізь задовольняє умову:* $|b(x,u,\nabla u) - b(x,v,\nabla v)| \le \mu_4(x)|\nabla(u-v)| + \mu_5(x)|u-v|$, *де* $\mu_4^2 \in PK_\beta(A)$, $\mu_5 \in PK_\beta(A)$, *тоді u(x) є узагальненим розв'язком системи* (1), *що належить простору* $W_1^2(R^l,d^lx)$, *і нехай матриця* $a_{ij}(x)$ *є еліптичною, і нехай коефіцієнти системи* (1) *додатково задовольняють умовам* $\left|\frac{\partial}{\partial x_k}a_{ij}(x)\right| < \infty$, *і умови форм-обмеженості функції* b *(тобто належність функцій* μ_i *до відповідних функціональних класів,* $\mu_1^2 \in PK_\beta$, $(\mu_1\mu_2)^2 \in PK_\beta$, $\mu_2^2 \in PK_\beta$, $\mu_1\mu_3 \in PK_\beta$, $\mu_2\mu_3 \in PK_\beta$, $\mu_2 \in PK_\beta$, $\mu_3^2 \in L^2$ *крім того число* λ *є достатньо великим, тобто більшим* λ_0, *яке визначається з умов задачі. Тоді розв'язок буде належати простору* $W_2^2(R^l,d^lx)$, *тобто буде покращення властивостей розв'язку, звуження класу функцій до якого належить розв'язок.*

1. Ладыженская О.А., Уральцева Н.Н. Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа. – Москва: Наука, 1973. – 579 с.
2. Яременко М.І. Квазілінійні рівняння та нелінійні напівгрупи стиску. – Київ: НТУУ "КПІ" , 2013. – 201 с.

Покажчик

Донбаський державний педагогічний університет
Інститут математики НАН України

Міжнародна конференція

«ТЕОРІЯ НАБЛИЖЕННЯ ФУНКЦІЙ ТА ЇЇ ЗАСТОСУВАННЯ»

присвячена 75-річчю з дня народження
члена-кореспондента НАН України,
професора О.І. Степанця (1942 – 2007)

28 травня – 3 червня 2017 року
Слов'янськ, УКРАЇНА

Тези доповідей

Donbas State Pedagogical University
Institute of Mathematics of NAS of Ukraine

International conference

«THEORY OF APPROXIMATION OF FUNCTIONS AND ITS APPLICATIONS»

In honor of 75th anniversary of
Corresponding Member of NAS of Ukraine,
Professor Alexander Stepanets (1942-2007)

May, 28 – June 3, 2017
Slovyansk, UKRAINE

ABSTRACTS

Комп'ютерна верстка та підготовка оригінал-макета
А. В. Стьопкін, П. В. Куліш

Підп. до друку 10.06.2013. Формат 60x90/16. Папір офс. Офс. друк. Обл. вид. арк. 21,5. Ум. друк. арк. 30,1. Зам. 58. Тираж 100 пр.

Видавництво Б.І. Маторіна
Донбаський державний педагогічний університет
84116 м. Слов'янськ, вул. Г. Батюка, 19
Тел.: +38 06262 3-20-99; +38 050 518 88 99. E-mail: matorinb@ukr.net

Свідоцтво про внесення суб'єкта видавничої справи до Державного реєстру видавців, виготівників і розповсюджувачів видавничої продукції ДК № 3141, видане Державним комітетом телебачення та радіомовлення України від 24.03.2008 р.